



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

POSTGRADO FORESTAL

Modelos de volumen comercial variable para *Pinus patula* en Zacualtipán, Hidalgo

DISRAELI HERNÁNDEZ PÉREZ

T E S I S

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:**

MAESTRO EN CIENCIAS

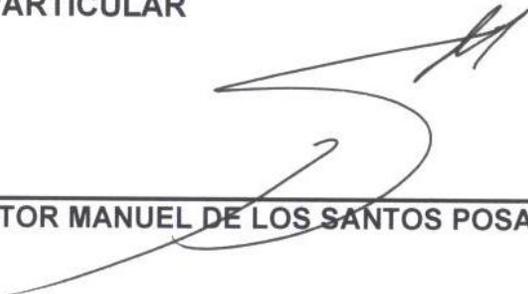
**MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MÉXICO
2012**

La presente tesis titulada: "**Modelos de volumen comercial variable para *Pinus patula* en Zacualtipán, Hidalgo**", realizada por: **Disraelí Hernández Pérez**, bajo la dirección del Consejo Particular indicado, ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS
FORESTAL**

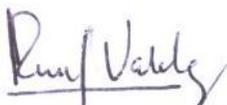
CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERO:



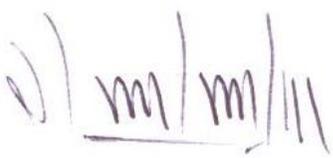
DR. HÉCTOR MANUEL DE LOS SANTOS POSADAS

ASESOR:



DR. JOSÉ RENÉ VALDEZ LAZALDE

ASESOR:



DR. VÍCTOR HUGO VOLKE HALLER

Montecillo, Texcoco, Estado de México, enero 2012.

Agradecimiento

A Dios, gracias por concederme una vida llena de bendiciones, y de abundante gozo de lograr un objetivo más y de los regalos que recibo día tras día, sin duda a través de tu sabiduría.

Expreso mi gratitud al Colegio de Postgraduados por su excelencia académica, en especial al Postgrado Forestal por haberme dado la oportunidad de continuar mi preparación durante estos dos años.

Al Dr. Héctor Manuel De los Santos Posadas, por su excelencia como profesor y consejero, por compartir conmigo su tiempo y enseñanzas, quien además de realizar una revisión exhaustiva de este trabajo, lo mejoro sustancialmente.

Al Dr. J. René Valdez Lazalde, por su muestra de amistad, por las enseñanzas compartidas, observaciones y sugerencias para enriquecer el presente trabajo.

Al Dr. Víctor Volke Haller, por sus valiosos consejos para ayudar a mejorar este trabajo.

Al Dr. Gregorio Pérez Ángeles, por ser el enlace con el ejido y por su amistad, además del su valioso tiempo en la revisión del manuscrito.

A todos los profesores del Postgrado Forestal y personal administrativo, quienes siempre me mostraron su amistad y apoyo.

A mis compañeros del Colegio de Postgraduados: Dr. Gerardo Rodríguez Ortiz, M.C. Wenceslao Santiago García, M.C. Juan Carlos Tamarit, M.C. Gerónimo Quiñónez Barraza, M.C. Luisa Patricia Uranga Valencia, Ing. Jesús Aguilar Cerdas por los agradables momentos compartidos en el Colegio y su apoyo desinteresado.

Al ejido Atopixco, Zacualtipán de Ángeles, Hidalgo por las facilidades durante la toma de datos en las zonas de aprovechamiento.

Dedicatoria

Lo que haces en vida resuena en la eternidad.

Con alegría dedico este trabajo a mi madre la Sra. Leonor Pérez Hernández, como una muestra de mi profundo amor, admiración, gratitud y respeto, por sus consejos que nunca puse en saco roto y por hacer de mí lo que soy.

A mi padre Sr. Rafael Hernández Pérez, por todo lo que me ha dado en esta vida, especialmente por sus sabios consejos y espíritu de lucha constante para seguir adelante.

A Lizbeth, por el gran AMOR que me ha mostrado, a pesar de momentos muy difíciles siempre me alentó hacia delante cuando todo es oscuridad.

A mi querida hermana Obdulia, por alentarme a seguir superándome y por ser siempre la parte sensible de la familia.

A mi hermana Nadia Dalila y su bella familia, mi cuñado Edgar y en especial a mi sobrino Daniel por darme una felicidad muy especial.

A toda la familia Hernández-Pérez, con acento especial a mi tío: Diego C. Pérez Hernández, por sus constantes muestras de apoyo.

Agradezco a todas las personas que me dan su amistad incondicional y me demuestran su aprecio.

Respetuosamente

Israeli Hernández Pérez

CONTENIDO

| | |
|--|-----|
| ÍNDICE DE FIGURAS..... | iii |
| ÍNDICE DE TABLAS..... | iv |
| RESUMEN..... | v |
| ABSTRACT..... | vi |
| 1. INTRODUCCIÓN..... | 1 |
| 1.1. Objetivos..... | 3 |
| 2. REVISIÓN DE LITERATURA..... | 4 |
| 2.1. Volumen maderable..... | 4 |
| 2.2. Volumen comercial variable y ahusamiento..... | 5 |
| 2.2.1. Funciones de volumen..... | 5 |
| 2.2.2. Funciones de ahusamiento..... | 6 |
| 2.3. Modelos segmentados..... | 8 |
| 2.4. Compatibilidad de funciones ahusamiento – volumen..... | 8 |
| 2.5. Métodos de ajuste..... | 9 |
| 2.5.1. Regresión aparentemente no correlacionadas (SUR) y Máxima verosimilitud con información completa (FIML)..... | 10 |
| 2.6. Modelos de efectos mixtos..... | 11 |
| 2.7. Antecedentes del uso de los modelos de efectos mixtos (MEM) en el ámbito forestal..... | 12 |
| 2.8. Tablas de volumen comercial variable..... | 13 |
| 3. METODOLOGÍA..... | 15 |
| 3.1. Descripción del área de estudio..... | 15 |

| | |
|---|----|
| 3.2. Elección de la muestra..... | 17 |
| 3.3. Información en campo..... | 17 |
| 3.4. Función de diámetro-altura..... | 20 |
| 3.5. Cubicación de los árboles muestra..... | 20 |
| 3.6. Modelos compatibles ahusamiento-volumen..... | 23 |
| 3.7. Modelos segmentados compatibles ahusamiento-volumen..... | 24 |
| 3.8. Estrategia de ajuste..... | 28 |
| 3.9. Datos auxiliares para comparar los sistemas de cubicación..... | 32 |
| 4. RESULTADOS..... | 33 |
| 4.1. Cálculo de tamaño de muestra en regresión..... | 33 |
| 4.2. Ajuste de los sistema compatible ahusamiento-volumen..... | 34 |
| 4.3. Ajuste bajo MEM..... | 44 |
| 4.4. Volumen comercial variable con corteza y sin corteza..... | 46 |
| 4.5. Tabla de volumen con distribución de productos..... | 50 |
| 5. CONCLUSIONES..... | 53 |
| 6. LITERATURA CITADA..... | 55 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1. Localización del área de estudio y mapa de las áreas de cortas del ejido Atopixco en las anualidades ejercidas hasta el 2010..... | 15 |
| Figura 2. Derribo y medición del arbolado en secciones de 1 m..... | 18 |
| Figura 3. Diámetro sobre el fuste y volumen comercial vs. Altura del fuste para los árboles muestreados..... | 22 |
| Figura 4. Gráfica de residuales de ahusamiento vs. los valores predichos del volumen comercial (V_c) para los sistemas: a) Fang <i>et al.</i> (2000); b) Max y Burkhart (1967) y c) Cruz <i>et al.</i> (2008) | 40 |
| Figura 5. Gráfica de residuales de ahusamiento vs. los valores predichos de diámetro de fuste (d) para los sistemas: a) Fang <i>et al.</i> (2000); b) Max y Burkhart (1967) y c) Cruz <i>et al.</i> (2008)..... | 41 |
| Figura 6. Gráfica de residuales de ahusamiento vs. los valores observados de altura para los sistemas: a) Fang <i>et al.</i> (2000); b) Max y Burkhart (1967) y c) Cruz <i>et al.</i> (2008)..... | 44 |
| Figura 7. Gráfica de residuales de ahusamiento vs. los valores predichos de diámetro (d) y volumen comercial del sistema Fang <i>et al.</i> (2000) ajustado con MEM..... | 46 |
| Figura 8. Volumen comercial con corteza por clase diamétrica para <i>Pinus patula</i> en Zacualtipán Hidalgo..... | 52 |

ÍNDICE DE CUADROS

| | |
|---|----|
| Cuadro 1. Distribución de frecuencias de diámetros con corteza (D) y altura total (H) para los 78 árboles de <i>Pinus patula</i> utilizados para el sistema ahusamiento-volumen..... | 19 |
| Cuadro 2. Valores estadísticos descriptivos de los datos usados..... | 23 |
| Cuadro 3. Sistemas compatibles ahusamiento-volumen..... | 25 |
| Cuadro 4. Sistemas compatibles segmentados ahusamiento-volumen..... | 27 |
| Cuadro 5. Valores y significancia estadística de los coeficientes obtenidos con ajuste compatible ahusamiento-volumen de <i>Pinus patula</i> en Zacualtipán, Hidalgo..... | 36 |
| Cuadro 6. Estadísticos de ajuste de los sistemas ensayados ahusamiento-volumen de <i>Pinus patula</i> en Zacualtipán, Hidalgo..... | 38 |
| Cuadro 7. Bondad de ajuste y parámetros estimados para el sistema Fang <i>et al.</i> (2000) con efectos mixtos a través de RMV. CIA es el Criterio de Información de Akaike y CIB es el Criterio de Información Bayesiano (Pinheiro y Bates, 2000)..... | 44 |
| Cuadro 8. Estadísticos de ajuste del modelo de regresión para volumen sin corteza..... | 49 |
| Cuadro 9. Contenido de corteza para <i>Pinus patula</i> | 50 |
| Cuadro 10. Volumen comercial con distribución de productos (m ³) para rodales de <i>Pinus patula</i> | 51 |

MODELOS DE VOLUMEN COMERCIAL VARIABLE PARA *Pinus patula* EN
ZACUALTIPÁN, HIDALGO

Disraeli Hernández Pérez, M. C.
Colegio de Postgraduados, 2012

RESUMEN

Se presenta un sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial variable para estimar con mayor precisión el volumen total y la distribución de productos maderables en *Pinus patula*, cultivado en rodales coetáneos, repoblados bajo el sistema de árboles padre. Se utilizaron, de forma destructiva, 78 árboles. La base de datos se sometió a la evaluación de 11 sistemas compatibles de ahusamiento-volumen que incluyen modelos segmentados. Todos los sistemas se ajustaron mediante estimación simultánea de parámetros a partir de máxima verosimilitud con información completa (MVIC) que optimiza el ajuste, minimizando los errores de manera conjunta. El sistema segmentado de Fang *et al.* (2000), resultó ser el más preciso en el ajuste, explicando 97.06 y 98.09% de la variabilidad en el ahusamiento y en el volumen comercial variable, respectivamente; se incluyó en su estructura efectos mixtos (EM) para controlar la variabilidad debida al árbol, corregir heterocedasticidad y mejorar las predicciones en el volumen comercial. El ajuste vía EM sugiere que al controlar de manera más específica el ajuste, los puntos de inflexión que ocurren con MVIC a 1.34 y 82.3% de altura relativa sobre el fuste cambian al 1.39 y 97.1%, lo que sugiere que bajo EM una estructura más simple, con un solo punto de inflexión, es suficiente para modelar la forma del fuste, sin perder capacidad predictiva. En ambos casos se infiere que bajo silvicultura intensiva los fustes son mucho más cilíndricos que en rodales naturales sin manejo intensivo. Comparando estos resultados con los obtenidos en árboles de la misma especie pero medidos en rodales recién abiertos al manejo forestal, los puntos de inflexión respectivos ocurren al 5.7 y 22.4% de altura relativa.

Palabras clave: Ahusamiento, estimación simultánea, efectos mixtos, modelos segmentados, *Pinus patula*, sistema compatible, volumen comercial.

TAPER AND MERCHANTABLE VOLUME MODELS FOR *Pinus patula*, AT
ZACUALTIPÁN, HIDALGO

Disraeli Hernández Pérez, M. C.
Colegio de Postgraduados, 2012

ABSTRAC

A compatible taper and merchantable volume system for *Pinus patula* on naturally regenerated, fast-growing stands (seed tree method), was developed to increase the precision of total timber estimation and product distribution. Seventy eight trees were destructively sampled. The taper-volume data were then fitted to 11 compatible systems that included segmented models. All systems were fitted with Full Information Maximum Likelihood (FIML) to optimize fitting while simultaneously minimizing the volume-taper errors. The segmented system proposed by Fang *et al.* (2000) produced the best fit while explaining 97.06 and 98.09% of the taper and volume variability; the system was then fitted including mixed effects (ME) to control variability due to the tree effect and correct heteroscedasticity. The ME fit suggests that the inflection points estimated at 1.34 and 82.3% of relative height (FIML) changed to 1.39 and 97.1%, which indicate that under a ME fit a simpler structure, with a single point of inflection, is sufficient to model the shape of the stem, without losing predictive power. In both cases it appears that under intensive silviculture tree stems are much more cylindrical than in natural stands without intensive management. Comparing these results with those obtained from trees of the same species growing on natural stands recently open to timber management, the respective inflection points were estimated at 5.7 and 22.4% of relative height.

Key Words: Taper, simultaneous estimation, mixed effects, segmented models, *Pinus patula*, compatible system, merchantable volume.

1. INTRODUCCIÓN

El primer paso en la secuencia de decisiones de manejo forestal con fines maderables es la definición del producto o productos finales; lo cual involucra establecer especificaciones y características de los productos en el momento de la venta, y además, definir las propiedades que deberá tener el árbol para que se le considere producto (Mendoza, 1993). Esto obliga a que el administrador forestal conozca además del volumen a extraer, la distribución de los productos por las dimensiones del diámetro y longitud de los troncos; por tal motivo es necesario contar con herramientas cuantitativas confiables, que respalden sus decisiones silvícolas (Valdez y Lynch, 2000).

A fin de modelar adecuadamente la distribución de los productos durante el inventario, se han desarrollado diversas ecuaciones para simular el perfil del fuste de los árboles; desde modelos simples de ahusamiento en base a proporciones, hasta estructuras geométricas y trigonométricas que incluyen modelos de tipo polinomial segmentado (Pompa *et al.*, 2009). El aproximar adecuadamente el valor real de los bosques debería acercar a los productores al establecimiento de una economía y mercado que permita negociar en condiciones más justas el valor de sus recursos.

El objetivo del presente trabajo es proponer un sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial variable para *Pinus patula*, especie que aporta el mayor volumen y valor de la producción maderable en la región de Zacualtipán,

Hidalgo, y donde actualmente no se cuenta con un sistema local de cubicación en pie que permita optimizar el cálculo del volumen total y de la distribución de los productos del arbolado para el inventario forestal maderable, previo a su aprovechamiento e industrialización.

1.1. Objetivos

a. Objetivo general

Construir un sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial variable para bosques de *Pinus patula* manejados intensivamente en la región de Zacualtipán, Hidalgo.

b. Objetivos particulares.

- Ajustar modelos compatibles de ahusamiento-volumen como sistemas de ecuaciones bajo el enfoque de Máxima Verosimilitud con Información Completa y como estructuras de efectos mixtos.
- Ejemplificar el uso y aplicación del sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial variable en el inventario forestal y en el cálculo de distribución de productos.

2. REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. Volumen maderable

En los inventarios forestales el volumen de un rodal se estima a partir del volumen calculado para cierto número de parcelas de muestreo. A su vez, para calcular el volumen de una parcela es necesario medir el volumen de cada árbol, ya sea por cubicación directa o con una función de volumen a partir del diámetro normal y alguna medida de la altura del fuste (estimación indirecta). Por facilidad metodológica, ésta es la manera más común de cubicar sitios de inventarios a partir de estimaciones indirectas.

Para generar las funciones de volumen existen dos métodos de cubicación de árboles individuales comúnmente usados (García, 1995): el primero partiendo de una función general de volumen (volumen del árbol en función a su diámetro normal y a su altura) y ajustando estas funciones vía regresión. El segundo método, desarrollado en este trabajo, es la determinación del volumen de cada árbol a partir de su forma a lo largo del fuste usando funciones de ahusamiento que puedan integrarse para obtener el volumen total y parcial, dependiendo del tipo de productos que se desee evaluar durante el inventario.

2.2. Funciones de volumen comercial variable y ahusamiento

2.2.1. Funcion de volumen

La dificultad en la determinación directa del volumen mediante la cubicación de secciones, hace conveniente contar con expresiones matemáticas que, basadas en una muestra seleccionada y medida cuidadosamente, permitan estimar el volumen de los árboles de manera rápida y poco costosa (Prodan *et al.*, 1997; Quiñonez, 2009). Para ello, se han diseñado funciones de volumen; este método estima el volumen de forma indirecta a través de variables fáciles de medir y han probado ser precisas (Romahn *et al.*, 1994). Husch *et al.* (1982), definen una ecuación de volumen o tabla de volumen como una expresión tabulada que establece los volúmenes de árboles de acuerdo con una o más dimensiones fáciles de medir, tales como el diámetro normal, la altura y la forma. La importancia de las tablas de volumen radica en que constituyen la base de los inventarios forestales (Romahn *et al.*, 1994).

Existen distintos tipos de funciones de volumen, las principales son: a) los modelos de volumen local o tarifas que relacionan el volumen del árbol con sólo una variable dependiente, generalmente el diámetro normal o transformaciones y potencias de esta misma variable, donde el calificativo de "local" se debe a que son de aplicación a un área geográfica limitada (predio o rodal), para la cual, la relación diámetro y altura está implícita en el modelo de volumen; generalmente una cierta clase de edad y un mismo sitio; b) las funciones generales de volumen, son modelos que estiman el volumen con dos o más dimensiones del árbol (diámetro y altura total o comercial y en algunos casos una expresión de la forma); estas son de aplicación más amplia

que las locales, debido a que la relación diámetro-altura es explícita en el modelo, lo cual facilita su uso para clases de edad y sitios diferentes; c) las funciones de proporción de volumen, las cuales permiten estimar en forma consistente el volumen comercial hasta cualquier diámetro límite sobre el fuste y estimar la proporción de volumen hasta un índice de utilización especificado (Prodan *et al.*, 1997).

2.2.2. Funciones de ahusamiento

El ahusamiento se define como el coeficiente de estrechamiento del diámetro con el incremento en altura. Este tipo de ecuaciones permiten estimar en forma directa el diámetro a cualquier altura o la altura a cualquier diámetro. Son útiles para cubicar el volumen del fuste hasta cualquier diámetro mínimo deseado, por lo que brindan información para estimar la porción de volumen comercial, con ciertas características fijadas por la industria o las comercializadoras de materias primas.

Las funciones de ahusamiento se basan en el supuesto de que la forma del árbol varia continuamente a lo largo de su longitud y es monotónicamente decreciente a medida que la distancia del tocón a la punta comercial se aproxima a la altura total (Lee *et al.*, 2003). Son consideradas la forma más flexible y precisa de obtener el volumen comercial de un árbol en pie (Clutter *et al.*, 1983; Torres *et al.*, 1993; Cruz *et al.*, 2008). Dentro de su estructura generalmente contienen al diámetro normal (D) y la altura total (Prodan *et al.*, 1997). Basados en su estructura matemática estas se pueden agrupar en los siguientes tipos:

Las más simples corresponden a funciones polinómicas de diferentes grados para describir el perfil del fuste y que si bien son muy flexibles no están basadas en algún principio geométrico concreto (Coffré, 1983; Kozak, 1997). El segundo tipo corresponde a funciones basadas en principios geométricos y el tercer tipo incluye los dos anteriores pero vinculadas como segmentos, es decir se componen de dos o tres expresiones que se activan o desactivan de acuerdo con la altura en la que se quiere predecir el diámetro (Cao *et al.*, 1980).

Las características anteriores las hacen ideales para el procesamiento de inventarios forestales, ya que son flexibles en su aplicación y no presentan cruces ilógicos en las estimaciones conjuntas de volúmenes hasta diferentes diámetros límites de utilización comercial (Higuera, 1994).

En las funciones de ahusamiento, los supuestos necesarios para la optimalidad de los mínimos cuadrados están lejos de cumplirse; el supuesto de homocedasticidad es poco realista considerando que hay puntos perfectamente conocidos cerca de los cuáles los errores deberían ser más pequeños; igualmente, el supuesto de independencia es insostenible, ya que, para un árbol determinado, los diámetros cercanos tienden a desviarse del promedio de la misma dirección (Prodan *et al.*, 1997).

2.3. Modelos segmentados

Gallant y Fuller (1973) señalan que un modelo segmentado es un modelo de regresión que consiste en submodelos injertados; este sistema usa ecuaciones diferentes para distintas partes del fuste e integra tales modelos de forma que sus primeras derivadas son iguales en el punto de intersección (Torres y Magaña, 2001). Luego son unidos, con la condición de que las funciones se conecten correctamente en los puntos de unión para formar un modelo polinomial segmentado (Max y Burkhart, 1976). Husch *et al.* (1982), citan en su trabajo estas funciones y asumen que el fuste de un árbol puede dividirse en tres formas geométricas: cono, paraboloides y neiloides. Este tipo de modelos fueron introducidos por Max y Burkhart (1976) en un intento de proporcionar una mejor descripción del perfil del árbol mediante una función de ahusamiento. Cao *et al.* (1980), señalan que estos estudios han mostrado una mejor descripción del perfil fustal que una ecuación de ahusamiento polinomial o de proporción variable. La ventaja de los modelos segmentados es la predicción de los diámetros en las diferentes porciones del fuste con valor de sesgo menores a los encontrados al trabajar con funciones no segmentadas (Prodan *et al.*, 1997).

2.4. Compatibilidad de funciones ahusamiento - volumen

Para lograr una verdadera integración, que describa de forma simultánea tanto el perfil completo del árbol como el volumen, se necesita un sistema que use en

conjunto los dos componentes de ahusamiento y volumen comercial variable, dada la estrecha relación de éstas (Pompa *et al.*, 2009).

La compatibilidad entre funciones de volumen y ahusamiento la sugirió y desarrolló Demarschalk (1972), de forma tal que las ecuaciones de ahusamiento sean también representaciones realistas de modelos de volumen total y parcial. Cruz *et al.* (2008) mencionan que es posible definir un sistema compatible de ahusamiento-volumen a partir de sus variables y de su estructura geométrica; esta condición permite distribuir de forma porcentual el volumen por productos y eliminar las discrepancias existentes en la cubicación del volumen total y comercial ajustados de manera separada.

Como opción, si se desea evitar la integración de los modelos de ahusamiento, se pueden ajustar modelos de volumen comercial variable (Demarschalk, 1972; Clutter, 1980; Cao *et al.*, 1980; Cruz *et al.*, 2008). La exactitud y precisión de estas ecuaciones depende de la estructura matemática definida para las funciones de volumen de punta no comercial de la cual se derivan y a partir de estas funciones es posible derivar ecuaciones de ahusamiento compatible (Clutter, 1980).

2.5. Métodos de ajuste

El ajuste puede darse mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) o como un sistema de ecuaciones simultáneas (Cruz *et al.*, 2008). La teoría econométrica

ofrece la solución con los métodos de ecuaciones aparentemente no correlacionadas y máxima verosimilitud con información completa (SUR, FIML por sus siglas en inglés). Y finalmente puede complementarse con la adición de efectos aleatorios bajo el enfoque de modelos de efectos mixtos (MEM).

2.5.1. Regresiones aparentemente no correlacionadas (SUR) y máxima verosimilitud con información completa (FIML)

Se sabe que si dos ecuaciones son compatibles implica que están relacionadas y, por tanto, los componentes del error están correlacionados; en este caso, MCO producirá estimadores teóricos robustos, pero que ignoran los errores que suceden de manera simultánea a lo largo del fuste entre el ahusamiento y el volumen comercial.

La técnica de estimación de parámetros SUR proporciona una mejor ganancia de la estimación de parámetros cuando los componentes del error se correlacionan para un sistema de ecuaciones; además permite compatibilidad total dentro del sistema, de forma que los parámetros comunes de ambas ecuaciones toman los mismos valores mientras se cumple con el criterio de minimización de cuadrados de los errores (Galán *et al.*, 2007). En ambas técnicas, es posible ajustar un sistema de forma simultánea (ahusamiento y volumen comercial), ya que los estimadores de los parámetros llegan a ser consistentes, lo cual representa una ventaja (Borders, 1989; Fang *et al.*, 2000; Cruz *et al.*, 2008). Gujarati (2004) describe que el método de máxima verosimilitud con información completa, consiste en estimar los parámetros desconocidos de tal manera que la

probabilidad de observar las $y(x)$ dadas sea lo más alta posible (máxima) en la función de verosimilitud.

Los estimadores por máxima verosimilitud tienen algunas propiedades asintóticas deseables; en particular, como condición general, los estimadores de FIML muestran normalidad en las asíntotas y mínima varianza. Conociendo la distribución de las asíntotas y teniendo estimaciones para las desviaciones estándar hacen posible el uso de pruebas estadísticas en muestras grandes; este método considera una distribución normal de los errores (Bruce *et al.*, 2003).

2.6. Modelos de efectos mixtos

Los modelos de efectos mixtos (MEM) son una herramienta flexible para el análisis de datos agrupados, los cuales se originan en áreas como la agricultura, la biología, la economía, la manufactura y la geofísica; estos modelos estadísticos pueden ser expresados como modelos lineales que incorporan efectos fijos y aleatorios (Cruz, 2007).

Los efectos aleatorios por su parte son asociados con unidades experimentales individuales tomadas al azar de una población. A un modelo que considera tanto los efectos fijos como los aleatorios se les conoce como un MEM; son usados principalmente para describir la relación entre una variable respuesta y alguna covariables en datos agrupados de acuerdo con uno o más factores de clasificación. Tales grupos de datos incluyen los análisis longitudinales, variables remedidas, diseños en bloques, etc. (Pinheiro y Bates, 2000; Cruz, 2007). En los

modelos de volumen-ahusamiento el análisis mediante MEM permite un uso más eficiente de los datos al controlar la variación aleatoria individual y desplazar los problemas de heterocedasticidad y autocorrelación; además, es posible usar estimaciones de los efectos aleatorios para tener predicciones más precisas (Fang y Bailey, 2001).

La idea conceptual de estos modelos es que cada individuo o unidad experimental tenga su propia línea de regresión y que los parámetros poblacionales sean el promedio de los coeficientes individuales.

Existen dos métodos de ajuste para estos modelos

- a) Estimación por máxima verosimilitud restringida (RMLE, por sus siglas en inglés)
- b) Estimación por máxima verosimilitud (MLE, por sus siglas en inglés)

2.7. Antecedentes del uso de los modelos de efectos mixtos en el ámbito forestal

Gregoire y Schabenberger (1996) ajustaron un modelo no lineal de efectos mixtos para predecir el volumen acumulado de los fustes. El ajuste se realizó por RMLE y por estimación de ecuaciones generalizadas, demostrando que ambos métodos son muy similares y presentan ventajas para datos anidados cuando se comparan con ajustes realizados mediante MCO.

Para modelos de altura dominante, Fang y Bailey (2001) desarrollaron una metodología general de construcción de modelos no lineales de efectos mixtos,

donde se ilustra, bajo una estructura compleja de efectos fijos, cuales parámetros deberían ser considerados mixtos, además de como determinar la estructura apropiada de la varianza-covarianza para cada unidad experimental.

Cruz *et al.* (2008) desarrolló un sistema compatible de volumen comercial y ahusamiento para estimar volumen sin corteza de *Pinus cooperi* Blanco. El sistema se basó en un modelo lineal polinómico previamente usado y modificado en función de los datos para añadir flexibilidad. Las ecuaciones se ajustaron como un sistema completamente simultáneo para compensar la variación entre ahusamiento y volumen comercial, con efectos mixtos (EM) para controlar la variabilidad debida al árbol, corregir heterocedasticidad y lograr predicciones precisas en árboles de alto valor comercial. La información adicional que provee la estructura de EM mejora notablemente la capacidad predictiva en la parte baja del fuste. Adicionalmente, el ajuste simultáneo del sistema de ahusamiento-volumen mediante EM reduce los errores estándares de los estimadores de los parámetros.

2.8. Tablas de volumen comercial variable

Una de las aplicaciones más relevantes de las funciones de ahusamiento-volumen es la elaboración de tablas de volumen comercial. Estas tablas varían de acuerdo con el diámetro que se define como diámetro mínimo comercial; por lo tanto, es posible una vez establecido el diámetro mínimo de las trozas/productos, y a través de métodos numéricos, o por simple despeje, estiman la altura (h) a la que sucede dicho diámetro y así, calcular el número de trozas de longitud comercial que

pueden obtenerse del fuste (Torres y Magaña, 2001). En este caso, las tablas de cubicación se puede expresar como el conjunto de dos ecuaciones: una que proporciona el volumen hasta una cierta altura y otra que permite calcular la altura a un determinado diámetro (Diéguez *et al.*, 2003).

La estimación del volumen por distribución de productos requiere adicionalmente de un sistema de valoración de la calidad de trozas, el cual se incorpora como otra variable para identificar el potencial de la trocería para diferentes industrias como la de aserrío, contrachapado, celulósicos y otras. Esta información es muy dependiente de la localidad y de las condiciones de manejo del bosque o plantación. Al igual que el caso de las tablas de volumen, el volumen se puede estimar tanto a nivel total de la troza como el volumen por tipo de producto final.

3. METODOLOGÍA

3.1. Descripción del área de estudio.

El área de estudio se localiza en el ejido Atopixco, que tienen una superficie de 1170.97 ha. Se ubica dentro del municipio de Zacualtipán, Hidalgo, entre las coordenadas $20^{\circ} 37' 26''$ N y $98^{\circ} 37' 48''$ W; y $20^{\circ} 35' 20''$ N y $98^{\circ} 35' 23''$ W (Figura 1).

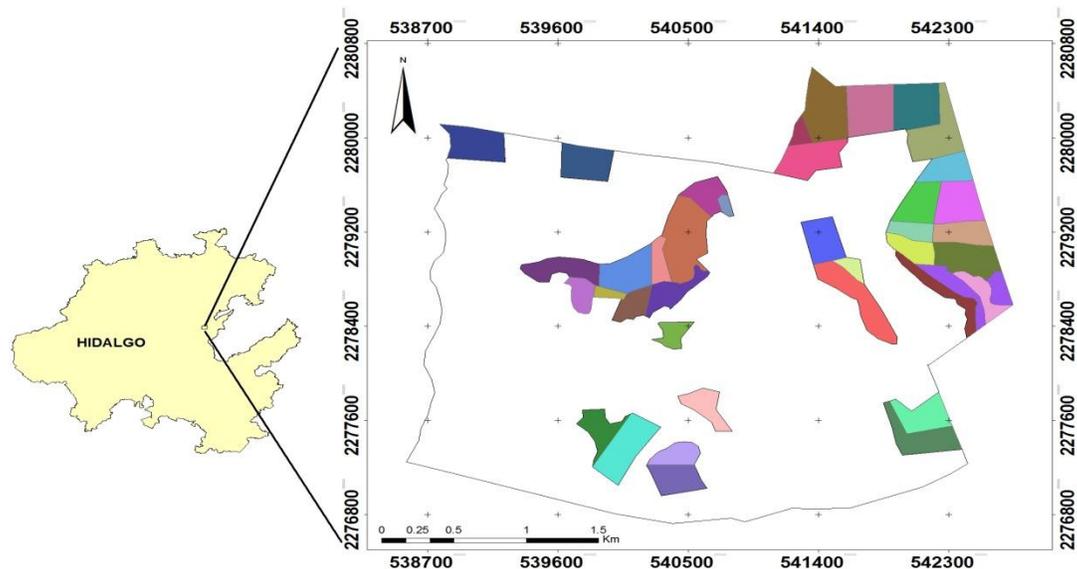


Figura 1. Localización del área de estudio y mapa de las áreas de cortas del ejido Atopixco en las anualidades ejercidas hasta el 2010.

Colinda al norte con el municipio de Tianguistengo, al sur con el municipio de Metzquitlán, al este con Veracruz y al oeste con el municipio de Metztitlán y Xochicoatlán. Su fisiografía comprende la Sierra Madre Oriental, conocida como

Sierra Alta Hidalguense y una parte del Eje Neovolcánico, subprovincia Carso Huasteco. Está conformado por pendientes, mesetas y cañones; la altitud media es de 2100 m (EMM, 2000; Cruz *et al.*, 2010).

El sustrato edáfico está representado por suelos acrisol órtico (Ao), luvisol crómico (Lc) y feozem háplico (Hh). Se puede observar, en la parte norte del ejido que el suelo es rico en nutrimentos; caso contrario es la parte sur donde el suelo es delgado y pedregoso (EMM, 2000). El clima es templado húmedo (C(m)) y templado subhúmedo (C(w2)) con temperatura media anual entre 13.5 °C y precipitación media anual de 2050 mm (Santiago, 2009).

En los rodales intervenidos encontramos especies como: *Pinus patula*, *Pinus teocote* y, en menor abundancia, *Pinus greggii* y *Pinus montezumae*. En las áreas de vegetación natural existen especies tales como: *Quercus crassipes*, *Q. laurina*, *Q. excelsa*, *Q. castanea*, *Q. rugosa*, *Cornus disciflora*, *Viburnum sp*, *Cleyera theaeoides*, *Alnus sp*, *Arbutus xalapensis*, *Prunus serotina*, *Symplocos sp*, *Ternstroemia sp*, *Vaccinium leacanthum*, entre otras (Ángeles, 1995).

En las últimas tres décadas, la masa forestal en el área de estudio ha sido orientada hacia *Pinus patula* mediante el denominado “Método de Desarrollo Silvícola” por ello los rodales se caracterizan por ser monoespecíficos (puros), coetáneos, de cobertura y edades variables a lo largo del paisaje que van desde 0 hasta 27 años (Aguirre, 2007; Santiago, 2009). El 30 de abril de 1991, el ejido Atopixco recibió el Premio Nacional al Mérito Nacional Forestal, como

reconocimiento al buen manejo y aprovechamiento de sus recursos forestales (Cruz, 2008).

3.2. Elección y tamaño de la muestra.

La selección de los árboles para elaborar modelos de volumen debería cubrir de la mejor manera posible la mayor diversidad de tamaños y formas (Torres y Magaña, 2001). Existen varias reglas sobre el tamaño de la muestra selectiva, una de ellas es la de Chapman (1924) donde aconseja un mínimo de 10 árboles por cada categoría diamétrica y altura. Una estimación reciente sobre el tamaño de muestra lo hace Pompa (1997) con el método propuesto por Lares (1994) para estimar el tamaño de muestra en regresión asumiendo que 50 individuos por estrato y por especie son suficientes para la estimación.

3.3. Información en campo

Los datos se obtuvieron dentro de varias áreas de corta sujetas a aclareos y cortas de regeneración dentro del programa de manejo vigente. Cada árbol seleccionado debía estar libre de daño físico o mecánico y tener buena conformación. Después de ser marcados en pie, los individuos fueron derribados con el propósito de efectuar una cubicación rigurosa. Con ayuda de la cinta métrica se seccionaron trozas de un metro de longitud solo la primera troza fue de 0.30 m. para todos los árboles con la finalidad de hacer mediciones en el diámetro normal, en centímetros (D). Las variables necesarias fueron: diámetro con corteza,

en centímetros (d); alturas para cada sección con respecto al suelo, en metros (h), medidas llevadas desde la primera troza hasta llegar a diámetros menores a lo largo del fuste.

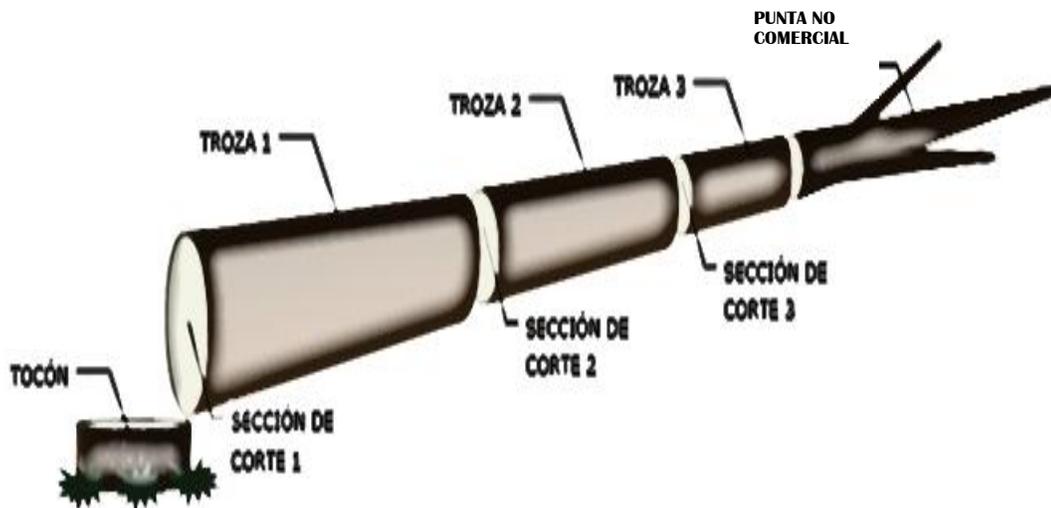


Figura 2. Derribo y medición del arbolado en secciones de 1 m.

La altura total, en metros (H), se estimó a partir de la suma total de los segmentos de cada árbol. En el Cuadro 1, se pueden observar los intervalos de altura de 10 a 31 m, de igual manera para el diámetro de 9 a 63 cm, teniendo un total de 78 árboles de *P. patula*. En general existe una buena distribución de datos, lo cual confiere a una estimación eficiente entre los rangos mencionados.

Cuadro 1. Distribución de frecuencias de diámetro con corteza (D) y altura total (H) para los 78 árboles de *Pinus patula* utilizados para el sistema ahusamiento-volumen.

| D (cm) | H (m) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Total | | | |
|--------------|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|----|---|---|
| | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | |
| 11 | | | | | | | | II | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 3 |
| 12 | I | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 13 | | | | | I | I | I | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| 14 | | | | | | I | | I | I | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| 15 | | | I | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 16 | | | | | | I | I | | I | I | III | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 8 |
| 17 | | | | | | | | | I | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 18 | | | | | | | | | I | I | | I | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| 19 | | | | | | | | | II | | I | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| 20 | | | | | | | | | II | I | II | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 5 |
| 21 | | | | | | | | | | II | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 3 |
| 22 | | | | | | | | | | | II | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 3 |
| 23 | | | | | | | | | | | | I | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 24 | | | | | | | | | | I | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 25 | | | | | | | | | | | II | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 3 |
| 26 | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 29 | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 31 | | | | | | | | | | | | I | | | | | II | | | | | | | | | | | | | | | | | | 3 |
| 32 | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 34 | | | | | | | | | | | | | | | | I | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 36 | | | | | | | | | | | | | | | | II | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | 3 |
| 37 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | 1 |
| 42 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | 1 |
| 43 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | 1 |
| 45 | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 46 | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | I | | | | | 2 |
| 47 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | 1 |
| 48 | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 49 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | 1 |
| 50 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | 1 |
| 51 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | 1 |
| 52 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | | 1 |
| 54 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | | | 1 |
| 63 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | I | 1 |
| Total | 1 | | 1 | | 1 | 3 | 4 | 4 | 10 | 8 | 13 | 5 | 2 | 5 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 78 | | |

3.4. Función de diámetro-altura.

En muchos inventarios no es posible medir todas las alturas de los árboles presentes en los sitios de inventario y se recurre a una función de Altura-Diámetro. En este trabajo para la estimación de la altura total (H) en función al diámetro normal (D), se optó por el siguiente modelo de predicción ajustado por Santiago (2009), usando información proveniente de parcelas de remediación de la misma zona de estudio.

$$H = \alpha_0 \times e^{-\alpha_1 \times e^{-\alpha_2 \times D}} \quad \therefore \quad \hat{H} = 34.63 \times e^{-1.89 \times e^{-0.0462 \times D}}$$

La expresión corresponde a una modificación del modelo de Gompertz, es asintótica, y por lo tanto, es apta para los inventarios forestales por ser una función local, además de ser una ecuación sencilla y de alta confiabilidad para la estimación.

3.5. Cubicación de los árboles muestra.

El supuesto básico para la cubicación de las trozas fue que al dividir el fuste en varios segmentos cortos, éstos se asemejan a un cilindro, por lo tanto, mientras menor sea la longitud de la troza mejor será su aproximación de volumen (Torres y Magaña, 2001).

Bailey (1995) propone el método de trozas traslapadas, que utiliza la fórmula de Newton generalizada en cada par de trozas. Para ello primero se obtiene el volumen de la punta aplicando la ecuación del cono (v_1), que uniendo esta parte con la segunda sección (v_2) se calcula otro volumen con la fórmula de Newton (V_1), debido a que estas dos secciones tienen una medida en común (la sección final para la primera y la sección inicial para la segunda), es posible utilizar este sistema.

A partir de esta medición, el volumen de todas las trozas seccionadas se calcula con el sistema de trozas sobrepuestas hasta obtener el volumen total de fuste completo. Así se logró una información final de 1695 pares de diámetros (d) y alturas (h). Este método aumenta la precisión y disminuye el error de cálculo (Reyes, 2006; Cruz *et al.*, 2008). Los datos de ahusamiento y volumen acumulado se presentan gráficamente en la Figura 3.

El cálculo del volumen total del fuste se obtuvo sumando el volumen parcial de las secciones correspondientes, de la siguiente manera:

$$V_t = \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (v_1 + v_2 + \dots + v_n)$$

Donde:

V_t = Volumen total del fuste.

v_i = Volumen de la sección i .

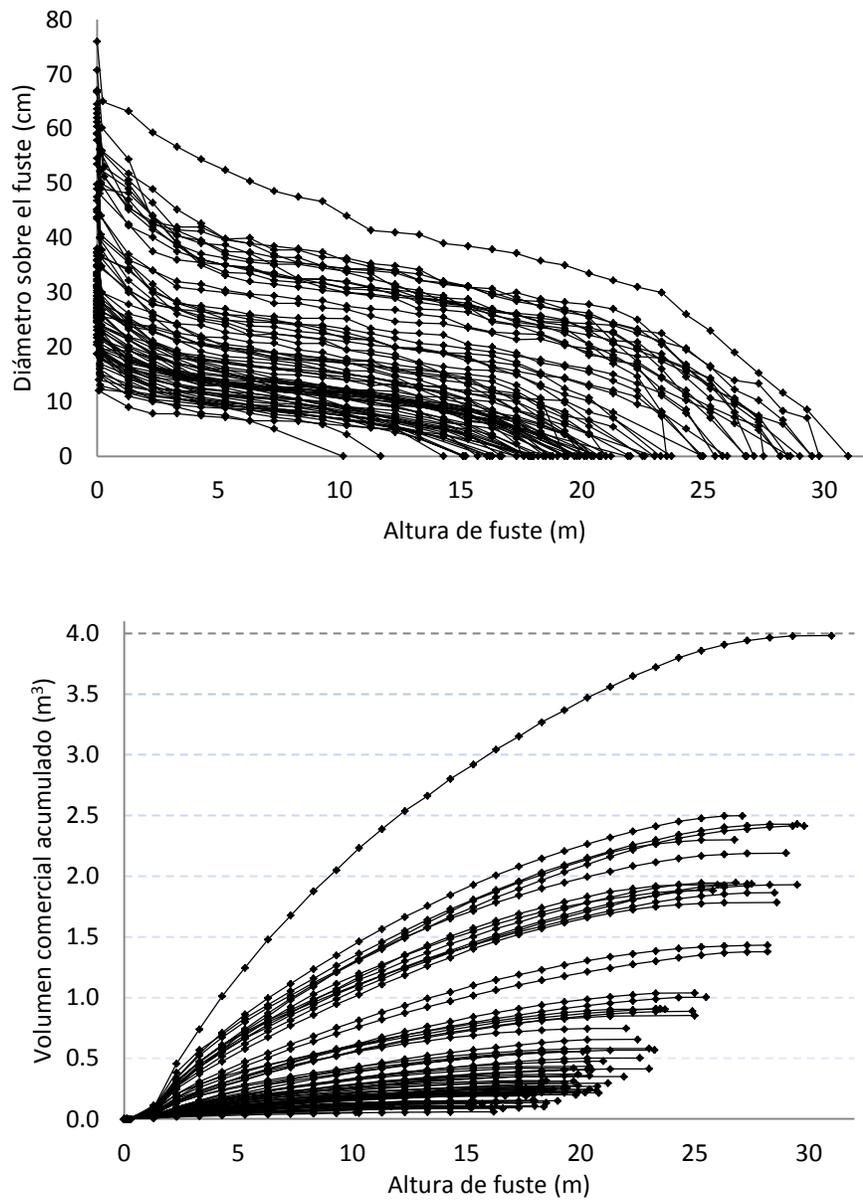


Figura 3. Diámetro sobre el fuste y volumen comercial acumulado vs. Altura del fuste para los árboles muestreados.

El resumen estadístico de las principales variables del árbol como número de observaciones, valores de media, mínimo, máximo y desviación estándar se muestran en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Valores estadísticos descriptivos de los datos usados.

| Variable[†] | n | Media | Desviación estándar | Mínimo | Máximo |
|-----------------------------|----------|--------------|--------------------------------|---------------|---------------|
| D (cm) | 78 | 27.77 | 13.450 | 9.0 | 63.2 |
| H (m) | 78 | 10.27 | 7.180 | 10.15 | 31.0 |
| V(m ³) | 78 | 0.517 | 0.670 | 0.005 | 3.98 |
| d (cm) | 1695 | 18.11 | 11.970 | 2.30 | 76.0 |
| h (m) | 1695 | 21.99 | 4.530 | 0.080 | 31.0 |

[†] *D* es el diámetro normal; *H* es la altura total; *V* es el volumen total; *d* es el diámetro de una sección a la altura *h*; *h* es la altura de cada sección con respecto al suelo.

3.6. Modelos compatibles ahusamiento-volumen

Para el presente estudio se analizaron 11 sistemas compatibles de ahusamiento-volumen seleccionados de la bibliografía, mismos que se clasificaron de acuerdo con su función de ahusamiento en modelos compatibles de ahusamiento-volumen y modelos compatibles ahusamiento-volumen segmentados.

Las expresiones usadas cumplen con la condición de que $h = H$ cuando $d = 0$, por lo cual pueden emplearse para predecir diámetros (*d*) a cualquier altura del árbol (*h*). Los sistemas evaluados no segmentados son: Lenhart y Cutter (1971); Clutter (1980); sistema compatible Cielito I, modificado por Cruz *et al.* (2008); Diéguez *et al.* (2006) plasman en su estudio para *Pinus silvestris* L., los siguientes modelos que también se analizaron fueron de: Kozak *et al.* (1969), Demaerchalk (1972),

Fang y Bailey (1999), con excepción del caso I-b; debido a que los datos no se ajustaron conforme a la expresión (Figura 3).

3.7. Modelos segmentados compatibles ahusamiento-volumen

La ventaja de modelar todo el fuste a través de una expresión única es que los modelos resultantes son fáciles de ajustar y usar; habitualmente se integran con facilidad para transformarlos en ecuaciones de volumen, pueden en muchos casos reordenarse para el cálculo de alturas comerciales (Prodan *et al.*, 1997).

Se ha sugerido el uso de diferentes modelos para mejorar considerablemente la predicción, entre ellos un modelo clásico de este tipo es el investigado por Max y Burkhart (1976) para *Pinus taeda*. El sistema une tres parábolas bajo restricción de continuidad. Otros autores como Parresol (1987) y Fang *et al.* (2000), han usado esta variante con éxito y sus estructuras (Cuadro 4) se analizaron en este trabajo con los datos disponibles para esta investigación.

Cuadro 3. Sistemas compatibles ahusamiento-volumen.

| a. Función de ahusamiento | b. Función de volumen comercial |
|--|--|
| (1) Fang y Bailey, 1999, caso I – a | |
| $d = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_0} D^{\alpha_1} H^{\alpha_2 - k/\beta_0} h_t^{(k-\beta_0)/\beta_0}}$ | $V_c = e^{\alpha_0} D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} - \beta_0 d^2 h_t$ |
| (2) Fang y Bailey, 1999, caso II – a | |
| $d = \left[\frac{k(\beta_2-1)}{\beta_2\beta_0} \ln h_t + \left(\frac{\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2}}{\beta_0} \right)^{1-1/\beta_2} - \frac{k(\beta_2-1)}{\beta_2\beta_0} \ln H \right]^{\frac{1}{(2\beta_2-2)}} h_t^{-0.5}$ | $V_c = e^{\alpha_0} D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} - \beta_0 d^{\beta_1} h_t^{\frac{\beta_1}{2}}$ |
| (3) Fang y Bailey, 1999, caso II – b | |
| $d = \left[\frac{k(\beta_1-2)}{(\beta_1-2\beta_2)\beta_0} h_t^{1-2\beta_2/\beta_1} - H^{1-2\beta_2/\beta_1} + \left(\frac{\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2}}{\beta_0} \right)^{1-2/\beta_1} \right]^{\frac{1}{(\beta_1-2)}} h_t^{-\beta_2/\beta_1}$ | $V_c = e^{\alpha_0} D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} - \beta_0 d^{\beta_1} h_t^{\beta_2}$ |
| (4) Kozak et al., 1969 | |
| $d = D \sqrt{\beta_0(q-1) + \beta_1(q^2-1)}$ | $V_c = \frac{1}{3} k D^2 \left(\frac{\beta_1}{H^2} \right) h^3 + \frac{1}{2} k D^2 \left(\frac{\beta_0}{H h^2} \right) + k D^2 (-\beta_0 - \beta_1) h$ |

Donde, D = diámetro normal (m); d = diámetro superior (cm) a la altura h (m) desde el nivel del tocón; H = altura total de los arboles (m); V_c = volumen comercial variable en (m³); $k = \pi/40000$; α_i, β_i = coeficientes a determinar mediante el ajuste; $h_t = H-h$; $q = h/H$.

Cuadro 3. Sistemas compatibles ahusamiento-volumen (continuación).

| a. Función de ahusamiento | b. Función de volumen comercial |
|---|--|
| (5) Lenhart y Cutter, 1971 | $V_c = e^{\alpha_0} D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} - \beta_0 \frac{d^{\beta_1}}{D^{\beta_1-2}} (H - 1.3)$ |
| $d = \left[D \left(\frac{H-h}{H-1.3} \right) \right]^{\frac{1}{\beta_1-2}}$ | |
| (6) Demaerchalk, 1972 | $V_c = \frac{kD^2\beta_0}{\beta_1+1} \left[H - \frac{(H-h)^{\beta_1+1}}{h^{\beta_1}} \right]$ |
| $d = \sqrt{\beta_0 D^2 X^{\beta_1}}$ | |
| (7) Clutter, 1980 | $V_c = e^{\alpha_0} D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} (1 - \beta_0 d^{\beta_1} D^{\beta_2})$ |
| $d = \left[\frac{k(H-h)}{\beta_0 \alpha_0 D^{\alpha_1 - \beta_2} H^{\alpha_2}} \left(1 - \frac{2}{\beta_1} \right) \right]^{\frac{1}{\beta_1-2}}$ | |
| (8) Cruz et al., 2008 | $V_c = kD^\delta H^{-1} \left\{ \beta_0 \left[\left(Hh - \frac{h_m^2}{2} \right) - \left(Hh_b - \frac{h_b^2}{2} \right) \right] \frac{\beta_1}{3H} [(H-h)^3 - (H-h_b)^3] - \frac{\beta_2}{4H^2} [(H-h)^4 - (H-h_b)^4] \right\}$ |
| $d = \sqrt{D^\delta (\beta_0 X + \beta_1 X^2 + \beta_2 X^3)}$ | |

Donde, D = diámetro normal (m); d = diámetro superior (cm) a la altura h (m) desde el nivel del tocón; H = altura total de los arboles (m); h_b = altura del tocón (m); V_c = volumen comercial variable en (m³); $k = \pi/40000$; α_i , β_i , δ , β_1 , β_2 = coeficientes a determinar mediante el ajuste; $X = h/H$.

Cuadro 4. Sistemas compatibles segmentados ahusamiento-volumen.

| a. Función de ahusamiento | b. Función de volumen comercial |
|--|---|
| <p>(9) Max y Burkhart, 1976</p> $d = D\sqrt{\beta_1(q-1) + \beta_2(q^2-1) + \beta_3(p_1-q)^2I_1 + \beta_4(p_2-q)^2I_2}$ <p style="text-align: center;">donde $\begin{cases} I_1 = 1 \text{ si } q \leq p_1; \text{ de lo contrario } 0 \\ I_2 = 1 \text{ si } q \leq p_2; \text{ de lo contrario } 0 \end{cases}$</p> | $V_c = kD^2H \left\{ \frac{\beta_2}{3}(q^3 - z_1^3) + \frac{\beta_1}{2}(q^2 - z_1^2) - (\beta_1 + \beta_2)(q - z_1) \right. \\ \left. - \frac{\beta_3}{3}[(p_1 - q)^3J_1 - (p_1 - z_1)^3K_1] \right. \\ \left. - \frac{\beta_4}{3}[(p_2 - q)^3J_2 - (p_2 - z_1)^3K_2] \right\}$ <p style="text-align: center;">donde $\begin{cases} J_1 = 1 \text{ si } q \leq p_1; J_2 = 0 \text{ si } q > p_2 \\ K_1 = 1 \text{ si } z_1 \leq p_1; K_2 = 0 \text{ si } z_1 > p_1 \end{cases}$</p> |
| <p>(10) Parresol, 1987</p> $d = D\sqrt{X^2(\beta_1 + \beta_2X) + (X - p_1)^2 [\beta_3 + \beta_4(X + 2p_1)I_1]}$ <p style="text-align: center;">donde $I_1 = 1 \text{ si } z \geq p_1; \text{ de lo contrario } 0$</p> | $V = kD^2H \left\{ \left[\frac{\beta_2 + \beta_4I_1}{4(X^4 - z_b^4)} \right] + \left[\frac{\beta_1 + \beta_3I_1}{3(X^3 - z_b^3)} \right] + \left[\frac{2\beta_1(p_1I_1) + (2p_1\beta_4)}{2(X^2 - z_b^2)} \right] \right. \\ \left. + \left[(p_1^2I_1\beta_3) + (2p_1 - \beta_4)(X - z_b) \right] \right\}$ |
| <p>(11) Fang et al., 2000</p> $d = c_1 \sqrt{H^{\frac{k-\beta_1}{\beta_1}} (1-q)^{\frac{k-\beta}{\beta}} \alpha_1^{I_1+I_2} \alpha_2^{I_2}}$ <p style="text-align: center;">donde $\begin{cases} I_1 = 1 \text{ si } p_1 \leq q \leq p_2; \text{ de lo contrario } 0 \\ I_2 = 1 \text{ si } p_2 \leq q \leq 1; \text{ de lo contrario } 0 \end{cases}$</p> $\beta = \beta_1^{1-(I_1+I_2)} \beta_2^{I_1} \beta_3^{I_2} \quad \alpha_1 = (1-p_1)^{\frac{(\beta_2-\beta_1)k}{\beta_1\beta_2}}$ $\alpha_2 = (1-p_2)^{\frac{(\beta_3-\beta_2)k}{\beta_2\beta_3}}$ | $r_0 = (1 - h_b/H)^{\frac{k}{\beta_1}} \quad r_1 = (1 - p_1)^{\frac{k}{\beta_1}} \quad r_2 = (1 - p_2)^{\frac{k}{\beta_2}}$ $c_1 = \sqrt{\frac{e^{\alpha_0} D \alpha_1 H^{\alpha_2 - \frac{k}{\beta_1}}}{\beta_1(r_0 - r_1) + \beta_2(r_1 - \alpha_1 r_2) + \beta_3 \alpha_1 r_2}}$ $V_c = c_1^2 H^{\frac{k}{\beta_1}} \left[\beta_1 r_0 + (I_1 + I_2) + (\beta_2 - \beta_1) r_1 + I_2 (\beta_3 - \beta_2) \alpha_1 r_2 \right. \\ \left. - \beta (1 - q)^{\frac{k}{\beta}} \alpha_1^{I_1+I_2} \alpha_2^{I_2} \right]$ |

Donde, D = diámetro normal (m); d = diámetro superior (cm) a la altura h (m) desde el nivel del tocón; H = altura total de los arboles (m); h_b = altura del tocón (m); V_c = volumen comercial variable en (m³); $k = \pi/40000$; $\alpha_i, \beta_i, \delta, p_1, p_2$ = coeficientes a determinar mediante el ajuste; $X = (H-h)/H$; $z_1 = h_b/H$; $z_b = (H-h_b)/H$.

3.8. Estrategia de ajuste.

La estructura general de los sistemas compatibles evaluados se abrevia como $d_{ij} = f(D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p})$ y $V_{ij} = g(k, D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p})$, donde: $f(\cdot)$ define la estructura del modelo de ahusamiento y $g(\cdot)$ al modelo de volumen comercial, \mathbf{p} es el vector de parámetros estimables del sistema y d_{ij} es el diámetro del i -ésimo árbol observado a la h_{ij} altura sobre el fuste, de igual manera para el volumen acumulado V_{ij} .

De los sistemas empleados, el ahusamiento, en algunos casos, se ajusta a diámetros y en otros a diámetros relativos (d/D); por lo tanto, se decidió ajustar todos los modelos como funciones directas del diámetro sobre el fuste a fin de que los estadísticos de ajuste total para esta variable fueran directamente comparables entre modelos.

Para evitar problemas en la estimación de los parámetros, especialmente cuando $h = H$, es decir, cuando $d = 0$, se aplicó un valor pequeño en este punto, junto con una variable indicadora en la punta para evitar que se evaluara en cero las derivadas parciales de los parámetros que contiene el logaritmo de cero y que produce datos perdidos y problemas de convergencia; este enfoque fue usado por Fang *et al.* (2000), que le permitió el uso de todos los datos.

Si bien en algunos de los sistemas compatibles analizados no se tiene reportado un modelo de volumen comercial variable. Existe sin embargo un modelo de

volumen total cuya estructura matemática es la del modelo de forma constante $\alpha D^2 H$ (Kozak *et al.*, 1969; Demaerchalk, 1972; Max y Burkhart 1976; Parresol, 1987) excepto el modelo de Cruz *et al.*, (2008) el cual es de la forma $\alpha D^{\delta} H$. Tomando en cuenta este hecho se analizaron las ecuaciones y se encontró que los sistemas de ahusamiento propuestos por Kozak *et al.* (1969), Demaerchalk (1972) y Parresol (1987) producen expresiones de volumen comercial variable, que puede ser utilizadas en conjunto con el ahusamiento en un ajuste de tipo simultaneo; Brooks *et al.* (2008) reporta la ecuación de volumen comercial compatible para el modelo clásico de Max y Burkhart (1976).

Para el caso de los sistemas con modelo de volumen total implícito dentro del sistema (Lenhart y Clutter, 1971; Clutter, 1980; Fang y Bailey, 1999; Fang *et al.*, 2000), se escaló el parámetro α_0 en el modelo de volumen total de Schumacher y Hall usando la función exponencial; esto ayudó a mejorar la estimación y, como consecuencia, encontrar de forma rápida la convergencia del sistema, además mejorar la significancia de los estimadores.

La estimación de los sistemas compatibles se realizó con la técnica de máxima verosimilitud con información completa (FIML), la cual es apropiada para el ajuste simultáneo (SAS Institute, 2004). En el desarrollo de regresión, el procedimiento asume que el error es independiente y que se distribuye de manera normal con varianza y media igual a cero (Gujarati, 2004); sin embargo, durante la estimación surgen problemas estadísticos que violan los supuestos básicos de regresión; sobre todo la heterocedasticidad, la autocorrelación y la colinealidad, los cuales

son los inconvenientes más importantes de los modelos de volumen (Kozak, 1997; Pompa *et al.*, 2009), ya que los parámetros se vuelven ineficientes (no garantiza que sus errores estándar sean mínimos aunque los parámetros estimados siguen siendo insesgados).

Los criterios para calificar la bondad de ajuste se basaron en análisis numérico y gráficos de residuales; en el caso numérico, consistió en tres estadísticos utilizados con frecuencia en biometría (Prodan *et al.*, 1997; Castedo y Alvarez, 2000; Dieguez *et al.*, 2003; Corral *et al.*, 2007): coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}), raíz del cuadrado medio del error (REMC) y coeficiente de variación (CV).

$$R^2_{adj} = 1 - \left[\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_i)^2} \right] \left(\frac{n-1}{n-p} \right)$$

$$REMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}}$$

$$CV = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i - \bar{Y}_i}{n-1} \right)^2}{\bar{Y}}}$$

Dónde: \hat{Y}_i , \bar{Y}_i y Y_i = valor predicho, media de la variable dependiente y valor observado, n = número de observaciones, p = número de parámetros del modelo.

También se utilizaron las gráficas de residuales contra los valores predichos de la variable dependiente con la finalidad de detectar valores atípicos o tendencia

inusual de los datos; es útil para determinar si los ajustes se adecuan a los datos o se presenta alguna falta de ajuste al sistema empleado.

Es necesario considerar que un sistema de ecuaciones puede ajustarse de manera más eficiente si se permite la inclusión de efectos aleatorios. Así, es posible mejorar las características de los parámetros al compensar por el efecto de variables tomadas en una misma unidad experimental y simultáneamente ajustar los datos de ahusamiento- volumen comercial. Esto es posible usando una estructura con efectos aleatorios. Usando como base la formulación de Hall y Clutter (2004), el sistema compatible ahusamiento-volumen, se puede describir de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} d_i \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p}) & 0 \\ 0 & g(k, D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p}) \end{pmatrix} + e_i$$

Donde:

d_i es el vector de observaciones de ahusamiento en el i-ésimo árbol,

V_i es el vector de observaciones de volumen comercial en el i-ésimo árbol y,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_{2i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_2 + b_{2i}$$

Quedando definidos los efectos aleatorios del modelo por

$$e_i \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}) \text{ y } b_{2i} \sim N(0, \phi^2)$$

De esta forma se tiene un solo parámetro con efectos mixtos de la forma $\beta_2 + b_{2i}$ y la estructura de e_i hasta este punto se asume homocedástica ($\sigma^2 \mathbf{I}$), pero puede flexibilizarse a nivel de componente (ahusamiento o volumen) para modelar tanto heterocedasticidad como autocorrelación por componente.

Inicialmente todos los sistemas se ajustaron de manera simultánea y bajo los criterios de calificación de ajuste se probó el mejor sistema con efectos mixtos bajo el método de máxima verosimilitud restringida (RMV). Finalmente, se realizó una comparación estadística de ambas técnicas de ajuste y se discutió si existe alguna diferencia significativa al asignar el efecto aleatorio, desde luego las mejoras en cuanto a la predicción de los volúmenes acumulados para la especie de estudio.

3.9. Datos auxiliares para comparar los sistemas de cubicación

A fin de contrastar los resultados obtenidos, se usó una base de datos para cubicación con corteza proveniente de 91 árboles de *Pinus patula* (1039 pares de volumen comercial-ahusamiento) obtenidos en rodales naturales recién abiertos al aprovechamiento en la Sierra de Juárez en Oaxaca (Hernández, 2007). Con estos datos se busca contrastar los efectos del manejo intensivo en la forma del fuste y en el volumen total de árboles con diámetros y alturas comparables pero bajo diferentes regímenes de cultivo.

4. RESULTADOS

4.1. Cálculo de tamaño de muestra en regresión.

Determinar el tamaño de muestra apropiado es un elemento que cobra importancia para cualquier tipo de investigación que se desea realizar, sobre todo si ésta se somete a la optimización de los recursos disponibles (mano de obra, recurso económico, disponibilidad de tiempo, etc.); la precisión, entonces, juega un papel importante dentro del contexto, ya que el investigador decidirá el grado de error permisible a tolerar dentro del trabajo. Para los objetivos del presente estudio se obtuvieron un total de 78 árboles de *P. patula*; de acuerdo con Lares (1994) estimar el tamaño de muestra en regresión bajo una cierta precisión establecida, representa una forma práctica de estimar el valor de n .

- Determinar el error tipo II o β (hipótesis sea falsa y se considere verdadera).

$$H_0: \beta = 0 \text{ vs } H_a: \beta = (1-\epsilon)\underline{b}$$

De acuerdo con el análisis de regresión:

$$k = 2,$$

$$N = 78,$$

$$F_c = 3680.5,$$

$$\bar{\delta}(0) = \frac{k(N - k - 2)}{N - k} F_c - k$$

$$\therefore \bar{\delta}(0) = \frac{2(78 - 2 - 2)}{78 - 2} 3680.5 - 2 = 7165.28$$

- Cálculo del estimador de $\bar{\delta}((1 - \varepsilon)\beta) = \varepsilon^2 \times \bar{\delta}(0)$

Cuando $\varepsilon = 0.05$

$$\therefore (0.05)^2 \times (7165.28) = 17.20$$

- Estimación de la potencia de la prueba

$$\phi = \sqrt{\frac{2\bar{\delta}((1 - \varepsilon)\beta)}{k + 1}} = 3.4557$$

Comparando este valor con el valor de la tabla de distribución de probabilidad de F (en este caso se usa la función DISTR.F.INV de Excel), se tiene que la probabilidad de rechazo del error tipo II es igual a 0.03886 (probabilidad de rechazar la hipótesis de β sea falsa). Asumiendo un umbral del 5% la muestra obtenida cumple con esta condición.

4.2. Ajuste de los sistemas compatibles ahusamiento-volumen

Ejecutar la estimación simultánea en la predicción de los sistemas a partir de máxima verosimilitud con información completa (FIML) optimiza el cálculo de los parámetros de ahusamiento y volumen comercial, minimizando los errores de manera conjunta y generando alta significancia de los coeficientes, aunque castiga el valor del coeficiente de determinación (Cuadro 5).

Esto coincide con Borders (1989) y Fang *et al.* (2000), quienes señalan que el ajuste con FIML homogeniza y minimiza el error estándar de los parámetros en el sistema y, además, permite compatibilidad completa del sistema de ahusamiento y volumen.

Si bien, en algunos modelos como el de volumen comercial de Fang *et al.* (2000) existe colinealidad en sus parámetros provocando que algunos de ellos no sean estimables con facilidad, eso se puede evitar al realizar el ajuste simultáneo del sistema segmentado. De igual forma, con el sistema de Max y Burkhart (1976), la solución implementada a que se llegó en este sistema fue la de asignar al coeficiente β_2 un valor de 1.5 para lograr convergencia del sistema compatible; este valor se obtuvo de la bibliografía, mismo que oscila en un rango de 1.5 a 2, tomando como referencia a Max y Burkhart (1976) en su trabajo para bosques naturales de pino en la costa de Virginia, y más reciente un estudio desarrollado en Turquía donde lo aborda como un sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial segmentado para tres especies (Brooks *et al.*, 2008).

Cuadro 5. Valores y significancia estadística de los coeficientes obtenidos con ajuste compatible ahusamiento-volumen de *Pinus patula* en Zacualtipán, Hidalgo.

| Sistema de volumen | | α_0 | α_1 | α_2 | β_0 | β_1 | β_2 | β_3 | β_4 | ρ_1 | ρ_2 | δ |
|----------------------------|-----------------------|------------|------------|------------|------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|
| | | | | | -0.8403 | 0.0147 | | | | | | |
| Kozak <i>et al.</i> , 1969 | ε^\dagger | | | | 0.0269 | 0.0212 | | | | | | |
| | ∞^\ddagger | | | | <.0001 | <.0001 | | | | | | |
| | | -9.2204 | 2.1041 | 0.4857 | 1.7×10^{-5} | 3.4958 | | | | | | |
| Lenhart y Clutter 1971 | ε | 0.1169 | 0.0262 | 0.0587 | 1.214×10^{-7} | 0.0114 | | | | | | |
| | ∞ | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | | | | | | |
| | | | | | 0.9604 | 1.47004 | | | | | | |
| Demaerchalk 1972 | ε | | | | 0.00259 | 0.00545 | | | | | | |
| | ∞ | | | | <.0001 | <.0001 | | | | | | |
| | | -9.6759 | 1.7972 | 1.0157 | 0.3397 | 3.0953 | 2.8827 | | | | | |
| Clutter 1980 | ε | 0.0854 | 0.0202 | 0.037 | 0.02 | 0.008 | 0.015 | | | | | |
| | ∞ | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | | | | | |
| Fang y Bailey 1999 | | -9.582 | 1.637 | 1.1853 | 6.1×10^{-5} | 1.7618 | 1.088 | | | | | |
| Caso II - b | ε | 0.089 | 0.0212 | 0.0463 | 1.64×10^{-6} | 0.017 | 0.021 | | | | | |
| | ∞ | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | | | | | |
| Fang y Bailey 1999 | | -9.9739 | 1.6869 | 1.2567 | 3.6×10^{-5} | | | | | | | |
| Caso I – a | ε | 0.0847 | 0.0196 | 0.0437 | 1.83×10^{-7} | | | | | | | |
| | ∞ | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | | | | | | | |

$^\dagger \varepsilon$: error estándar de los parámetros; $^\ddagger \infty$: nivel de significancia de los parámetros.

Cuadro 5. Valores y significancia estadística de los coeficientes hallados con ajuste compatible ahusamiento-volumen de *Pinus patula* en Zacualtipán, Hidalgo. (Continuación).

| Sistema de volumen | | α_0 | α_1 | α_2 | β_0 | β_1 | β_2 | β_3 | β_4 | ρ_1 | ρ_2 | δ |
|---------------------------|---------------|------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------|-----------------------|----------|----------|
| Fang y Bailey 1999 | | -9.644 | 1.686 | 1.1524 | 5.2×10^{-5} | 1.9205 | | | | | | |
| Caso II – a | ε | 0.085 | 0.018 | 0.0428 | 1.23×10^{-6} | 0.00415 | | | | | | |
| | ∞ | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | | | | | | |
| | | | | | 2.286 | -2.257 | 1.934 | | | | | 1.805 |
| Cruz <i>et al.</i> , 2008 | ε | | | | 0.0818 | 0.195 | 0.1607 | | | | | 0.0077 |
| | ∞ | | | | <.0001 | <.0001 | <.0001 | | | | | <.0001 |
| | | | | | | -3.5285 | 1.5 | 77.745 | -1.6496 | 0.1076 | 0.8827 | |
| Max y Burkhart 1976 | ε | | | | 0.0248 | | | 4.598 | 0.0390 | 0.0032 | 0.0138 | |
| | ∞ | | | | <.0001 | | | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | |
| | | 0.485 | | | | 3.9778 | -6.806 | 32.581 | -8.2217 | | | |
| Parresol 1987 | ε | | | | 0.0979 | 0.1281 | 0.2576 | 0.0643 | | | | |
| | ∞ | | | | <.0001 | <.0001 | <.0001 | <.0001 | | | | |
| | | -10.47 | 1.704 | 1.375 | | 1.34×10^{-6} | 3.7×10^{-5} | 3.4×10^{-5} | | 0.0134 | 0.8228 | |
| Fang <i>et al.</i> , 2000 | ε | 0.0921 | 0.019 | 0.0467 | | 5.80×10^{-8} | 2.1×10^{-7} | 1.3×10^{-6} | | 5.14×10^{-4} | 0.0477 | |
| | ∞ | <.0001 | <.0001 | <.0001 | | <.0001 | <.0001 | <.0001 | | <.0001 | <.0001 | |

[†] ε : error estándar de los parámetros; [¶] ∞ : nivel de significancia de los parámetro.

En el Cuadro 6 se plasman los criterios estadísticos de ajuste para la selección del sistema que mejor explique la variabilidad de los datos de ahusamiento y volumen; primero se seleccionaron los modelos que mejor ajustaban con base en su mayor coeficiente de determinación R^2_{adj} , raíz del cuadrado medio del error (REMC) más bajo y, finalmente, un bajo coeficiente de variación (CV), con respecto a la media de la variable dependiente.

Cuadro 6. Estadísticos de ajuste de los sistemas ensayados ahusamiento-volumen de *Pinus patula* en Zacualtipán, Hidalgo.

| Sistema de volumen compatible | Ecuación de volumen comercial | | | Ahusamiento | | |
|----------------------------------|-------------------------------|--------------------------|-----------------|-------------|-------------|-------|
| | REMC [†] | R^2_{adj} [¶] | CV [§] | REMC | R^2_{adj} | CV |
| Kozak <i>et al.</i> , 1969 | 0.0999 | 0.978 | 0.019 | 3.979 | 0.8895 | 0.874 |
| Lenhart, 1971 | 0.2735 | 0.8347 | 0.145 | 3.502 | 0.9144 | 0.677 |
| Demaerchalk, 1972 | 0.1095 | 0.9734 | 0.023 | 3.866 | 0.8957 | 0.825 |
| Clutter, 1980 | 0.2751 | 0.8329 | 0.146 | 4.151 | 0.8797 | 0.951 |
| Fang y Bailey, 1999, caso I - a | 0.2608 | 0.8497 | 0.131 | 3.478 | 0.9155 | 0.668 |
| Fang y Bailey, 1999, caso II - a | 0.2291 | 0.884 | 0.101 | 3.434 | 0.9177 | 0.651 |
| Fang y Bailey, 1999, caso II - b | 0.2112 | 0.9014 | 0.086 | 3.591 | 0.910 | 0.712 |
| Cruz <i>et al.</i> , 2008 | 0.0932 | 0.9808 | 0.017 | 3.374 | 0.9206 | 0.628 |
| Max y Burkhart, 1976 | 0.1039 | 0.9762 | 0.0208 | 2.262 | 0.9643 | 0.232 |
| Parresol, 1987 | 0.1594 | 0.9426 | 0.187 | 3.725 | 0.8960 | 0.001 |
| Fang <i>et al.</i> , 2000 | 0.0930 | 0.9809 | 0.016 | 2.050 | 0.9706 | 0.191 |

Se destaca el buen ajuste de los sistemas probados, obteniendo valores similares para los indicadores estadísticos; raíz del cuadrado medio del error (REMC),

coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}) y el coeficiente de variación (CV). En primer orden, el sistema que cumple con los criterios de selección resultó ser el sistema segmentado de Fang *et al.* (2000), seguido del sistema propuesto por Max y Burkhart (1976), también segmentado; la característica de ambos modelos implica que tienen dos puntos de inflexión sobre la altura relativa del fuste. De los sistemas no segmentados, el Cielito I modificado por Cruz *et al.* (2008) resultó ser el más promisorio (Cuadro 6).

Los puntos de inflexión para el primer sistema (Fang *et al.*, 2000) ocurren a 1.34% de la altura del árbol, cerca de la base, y a 82.3% de la altura relativa sobre el fuste. Para el segundo sistema de (Max y Burkhart, 1976), los segmentos ocurren a 10.7 y 88.3% de altura relativa. Sin embargo, es necesario comentar que, tanto para el modelo de Fang *et al.* (2000) como para el modelo de Max y Burkhart (1976), contrastados con trabajos anteriores los puntos de inflexión no se relacionan, por mencionar a Diéguez *et al.* (2006) para *Pinus sylvestris L.* en el noreste de España, determinan segmentos que ocurren al 10.3 y 60.7% para el sistema de Fang *et al.* (2000) en la altura relativa del fuste y para el sistema de Max y Burkhart (1976) al 14 y 70% de altura relativa.

Habiendo calculado con nuestros datos de campo el segundo punto de inflexión por arriba del 80% de proporción de h/H , da pie a sugerir la posibilidad que un modelo segmentado con un solo punto de inflexión sea más adecuado para modelar este tipo de árboles. Si se toma en cuenta que los datos usados en el

estudio corresponden a árboles provenientes de un bosque natural manejado de forma intensiva y de rápido crecimiento.

Aunque los estadísticos y sus indicadores son elementos esenciales para calificar la bondad global del ajuste, no obstante, es necesario corroborar las predicciones de los datos de campo, por lo que se graficó los residuales contra los valores predichos de cada ecuación involucrada. Estos elementos ayudaron a decidir con mayor precisión cuál de los sistemas representa mejor la realidad que se busca modelar y, finalmente, servir como criterio para recomendar alguno de los sistemas.

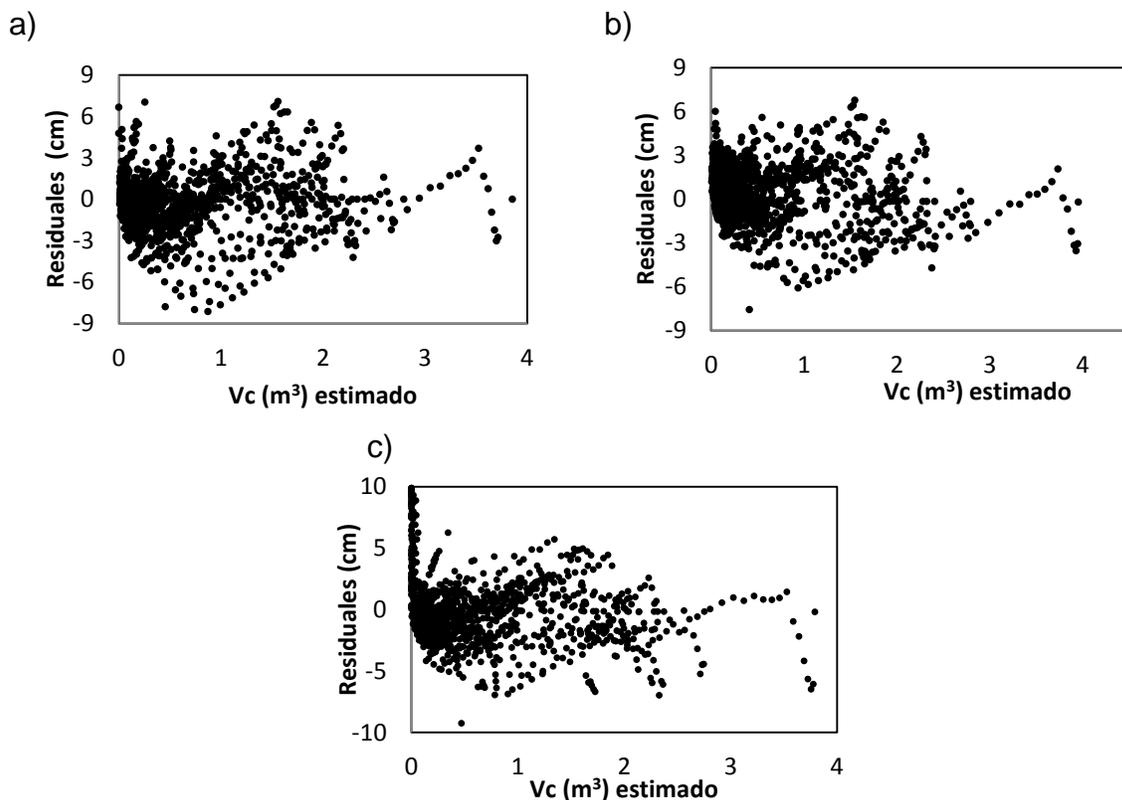


Figura 4. Gráfica de residuales de ahusamiento vs. los valores predichos del volumen comercial (V_c) para los sistemas: a) Fang *et al.* (2000); b) Max y Burkhart (1967) y c) Cruz *et al.* (2008).

Si observamos los residuales de los modelos de volumen comercial (Figura 4) podemos apreciar que el modelo de Cruz *et al.*, 2008 (c) tiende a sobre estimar los diámetros cercanos a la base de los fustes, mientras que los sistemas segmentados de (a) Fang *et al.*, 2000 y (b) Max y Burkhart (1967) presentan mejor estructura deseable.

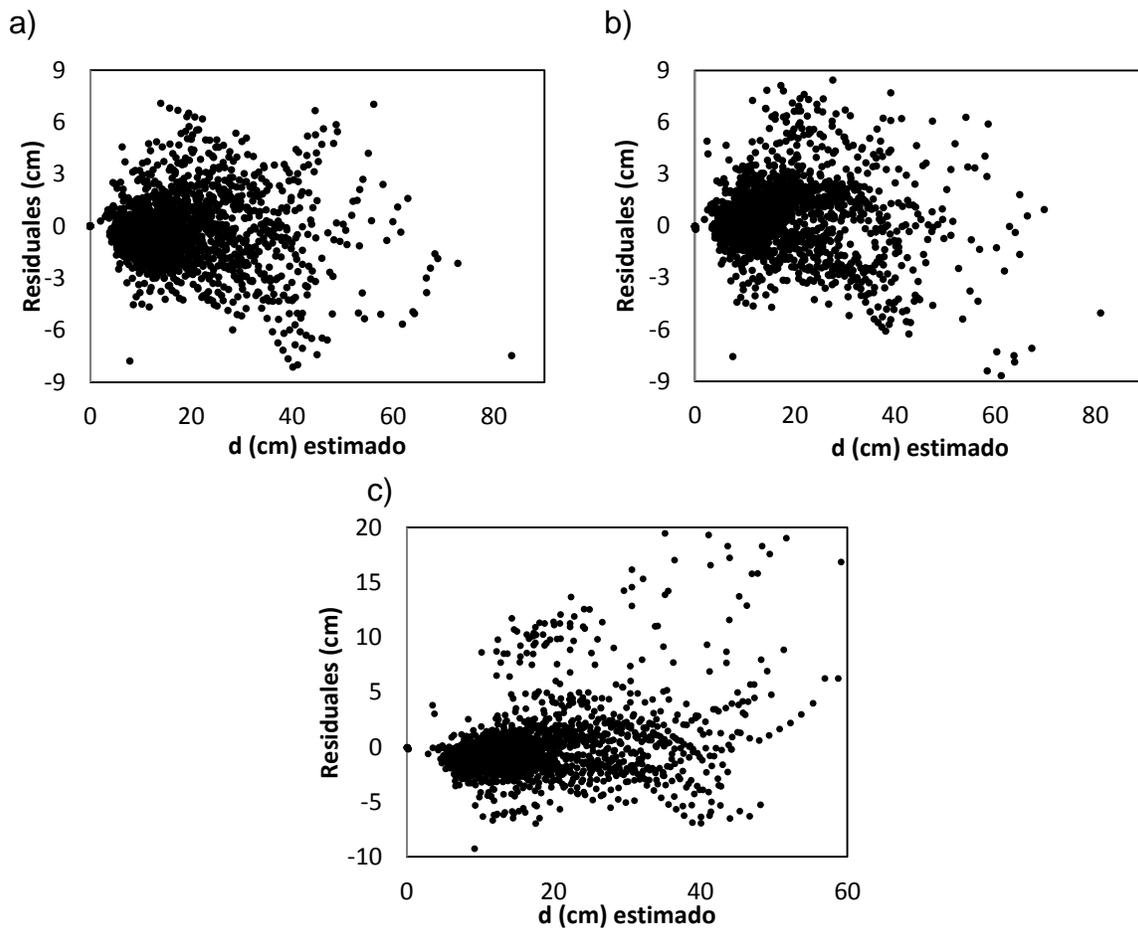


Figura 5. Gráfica de residuales de ahusamiento *vs.* los valores predichos de diámetro de fuste (d) para los sistemas: a) Fang *et al.* (2000); b) Max y Burkhart (1967) y c) Cruz *et al.* (2008).

En la predicción del diámetro (d), se aprecia que los modelos ajustados a y b (Figura 5) presentan mejor dispersión en los residuales. El donde el modelo de

Fang *et al.* (2000) es el más sobresaliente del grupo, mientras que el diagrama del modelo de Cruz *et al.*, 2008 expresa una falta de ajuste en diámetros grandes. Finalmente, el grupo de modelos con mejores ajustes estadísticos, muestra una tendencia en los residuales a pensar en una falta de ajuste (Figura 6) frente a los valores predichos, pero esto es debido al nivel de autocorrelación y heterocedasticidad del sistema compatible, además de la naturaleza de los datos.

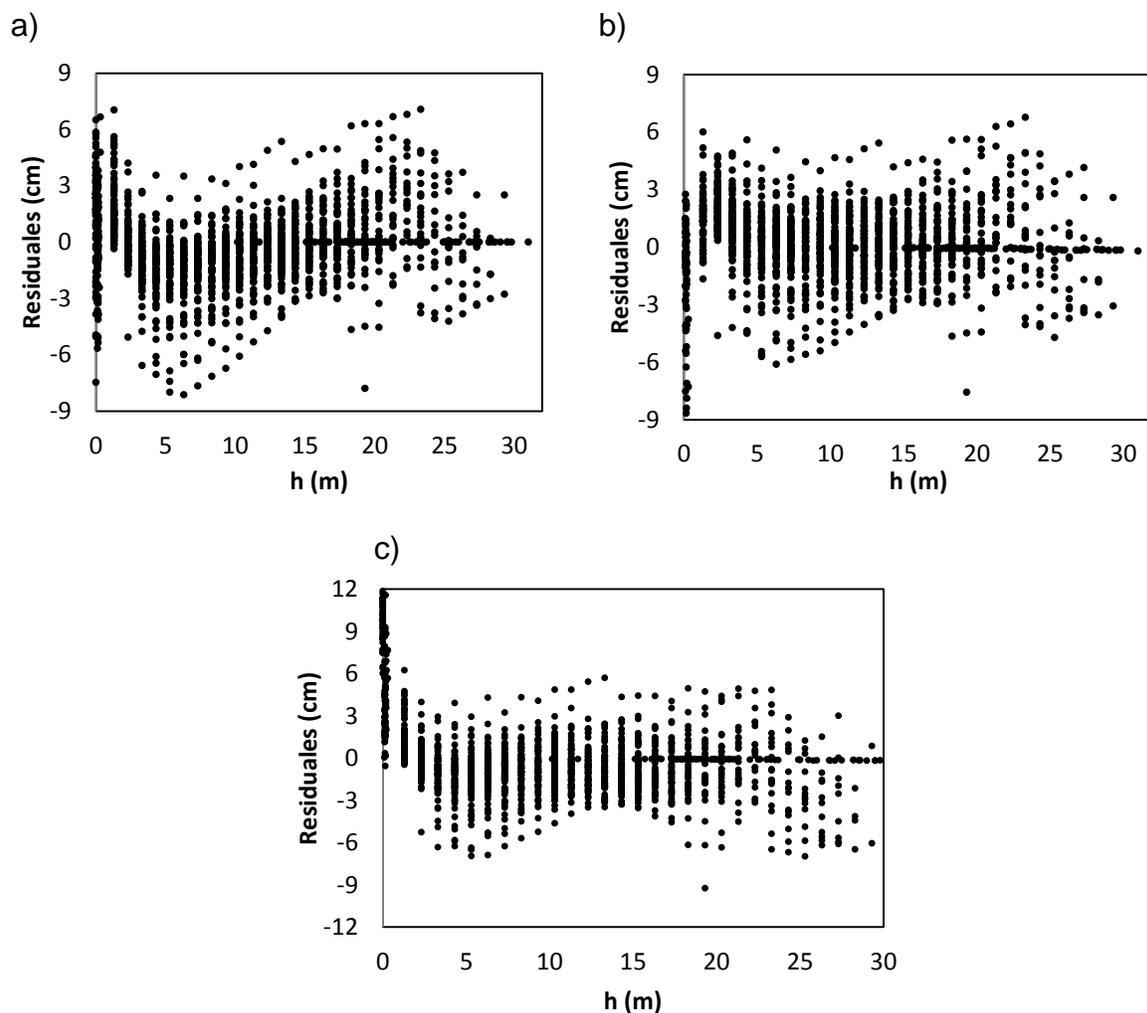


Figura 6. Gráfica de residuales de ahusamiento vs. los valores observados de altura sobre el fuste para los sistemas: a) Fang *et al.* (2000); b) Max y Burkhart (1967) y c) Cruz *et al.* (2008).

Con base en los resultados discutidos, el sistema segmentado de Fang *et al.* (2000) tiene una importante ventaja comparativa con respecto al resto de los sistemas. En primer término, es consistente en la estimación de volumen comercial y ahusamiento a lo largo del fuste de cada árbol, además de presentar alta significancia en los valores estimados como otra aportación importante en su compatibilidad.

Si bien la estructura matemática es capaz de absorber una cantidad substancial de la variabilidad total, se debe recordar que los datos utilizados tiene una estructura longitudinal para un mismo árbol. Esta particular estructura provoca que se incumpla una de las hipótesis más importantes en el análisis de regresión: la independencia de los datos.

Hasta esta parte del estudio se ha realizado el ajuste de los sistemas de ahusamiento-volumen ignorando esta falta de independencia. El ignorar la corrección debida a la estructura longitudinal provoca que el error estimado para los parámetros esté sobrestimado, por lo que los valores de rechazo para la hipótesis nula serán mayores (no eficientes), pudiendo afectar la comparación de los modelos, aunque los parámetros estimados siguen siendo insesgados (West, 1995). También se aprecia en la Figura 6 la presencia de heterocedasticidad que añade al inflar las varianzas de los parámetros. La estructura particular del error en este tipo de datos ha sido con frecuencia ignorada en la modelización forestal (Tassisa y Burhart, 1998; Garber y Maguire, 2003). En general, se han empleado dos métodos para trabajar con datos longitudinales no corregidos en tiempos fijos

y que presentan distintos números de medición por individuo: el primero es el empleo de modelos con coeficientes aleatorios y el segundo consiste en el empleo de modelos paramétricos para la matriz de varianza-covarianza de los datos (Zimmerman y Nuñez, 2001). En este trabajo se ha optado por el empleo de modelos con coeficientes aleatorios.

4.3. Ajuste bajo MEM

Los parámetros estimados bajo MEM (Cuadro 7) para el sistema de Fang *et al.* (2000), muestran que al controlar la variabilidad específica debida al árbol en el parámetro β_2 se puede reducir de manera considerable el error estándar de los parámetros del modelo, además de unificar los valores por componente.

Cuadro 7. Bondad de ajuste y parámetros estimados para el sistema Fang *et al.* (2000) con efectos mixtos a través de RMV. CIA es el Criterio de Información de Akaike y CIB es el Criterio de Información Bayesiano (Pinheiro y Bates, 2000).

| CIA | CIB | Log MV restringida |
|----------|----------|--------------------|
| 1719.587 | 1168.227 | -949.7936 |

| Parámetro | Estimado | Error estándar | Prob. de rechazo |
|------------|-----------------------|------------------------|------------------|
| α_0 | -10.37 | 5.94×10^{-2} | >0.0001 |
| α_1 | 1.691 | 6.59×10^{-3} | >0.0001 |
| α_2 | 1.398 | 1.671×10^{-2} | >0.0001 |
| β_1 | 1.29×10^{-6} | 2.40×10^{-8} | >0.0001 |
| β_2 | 3.57×10^{-5} | 5.88×10^{-7} | >0.0001 |
| β_3 | 7.63×10^{-5} | 2.370×10^{-5} | 0.0013 |
| p_1 | 0.0139 | 3.661×10^{-4} | >0.0001 |
| p_2 | 0.9704 | 9.175×10^{-3} | >0.0001 |

Efecto aleatorio

| Parámetro | Intervalo de confianza al 95% | | |
|-----------|-------------------------------|---------------------------|--------------------------|
| | Estimado | Superior | Inferior |
| ϕ | 3.41217×10^{-6} | 2.816906×10^{-6} | 4.13322×10^{-6} |

En términos de ajuste, el sistema probado con MEM muestra valores coherentes que son similares en el rango de comparación con los parámetros del modelo original ajustado con FIML (excepto el punto de inflexión p_2), lo que se resalta es el error estándar de los parámetros, mismos que son más pequeños al considerar la variabilidad específica del árbol. Esto concuerda con Dieguez *et al.* (2006), en cuyo trabajo corrigieron este problema usando en los errores una estructura autoregresiva de segundo orden y los valores absolutos de los parámetros no difieren de manera notable al ajuste sin corrección por heterocedasticidad y autocorrelación. En este caso, al hacer específico el valor del parámetro β_2 es interesante observar que el segundo punto de inflexión llega en términos prácticos hasta la punta (97% de altura relativa). Esto implica que un modelo con un solo punto de inflexión puede probarse con igual éxito en este caso, siempre y cuando se controle la variabilidad debida al árbol individual.

Al graficar los valores predichos del sistema ahusamiento-volumen contra los residuales (Figura 7) se puede apreciar que los patrones heterocedásticos son menos pronunciados, por lo que se confirma que el ajuste con efectos mixtos ayuda a desplazar este problema (Fang y Bailey, 2001). Finalmente, al corregir la violación a los supuestos de regresión (autocorrelación y heterocedasticidad) con

MEM si bien no mejora la capacidad predictiva del modelo en términos de los efectos fijos, permite corregir la subestimación de la matriz de covarianzas de los parámetros, por consiguiente, consigue mejorar la interpretación de las propiedades estadísticas de los parámetros; por lo tanto, el uso de los estimadores con presencia de heterocedasticidad y autocorrelación en cuestiones prácticas no difieren en la predicción del ahusamiento y el volumen comercial observado. Sin embargo este caso, el ajuste vía MEM lleva a concluir que los árboles son todavía mucho más esbeltos comparados con lo que sugiere el sistema FIML.

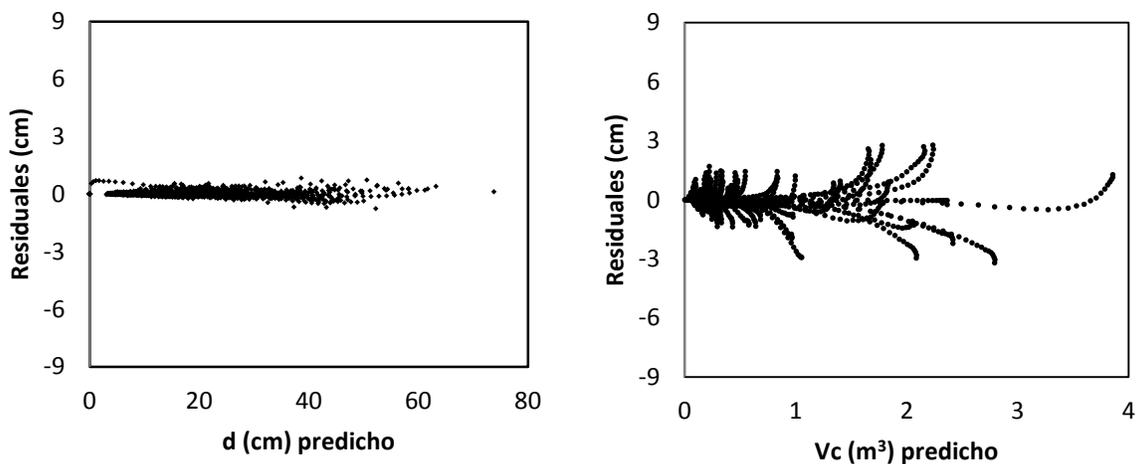


Figura 7. Gráfica de residuales de ahusamiento contra los valores predichos de diámetro (d) y volumen comercial del sistema Fang *et al.* (2000) ajustado con MEM.

4.4. Volumen comercial variable con corteza y sin corteza

El sistema segmentado compatible de ahusamiento-volumen seleccionado (Fang *et al.*, 2000) pertenece a las llamadas de doble entrada, está compuesto por una ecuación de volumen comercial que incluye dos puntos de inflexión y permite estimar el volumen hasta un determinado diámetro o altura límite (h) de utilización correspondiente a cada uno de los productos del arbolado en pie. Estos valores del volumen, expresados en metros cúbicos (m^3) se predice con la siguiente expresión:

- Ecuación de volumen comercial

$$V_c = c_1^2 H^{\frac{k}{\beta_1}} \left[\beta_1 r_0 + (I_1 + I_2) + (\beta_2 - \beta_1) r_1 + I_2 (\beta_3 - \beta_2) \alpha_1 r_2 - \beta (1 - q)^{\frac{k}{\beta}} \alpha_1^{I_1 + I_2} \alpha_2^{I_2} \right]$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{e^{\alpha_0} D \alpha_1 H^{\alpha_2 - \frac{k}{\beta_1}}}{\beta_1 (r_0 - r_1) + \beta_2 (r_1 - \alpha_1 r_2) + \beta_3 \alpha_1 r_2}}$$

$$r_0 = (1 - h_b/H)^{\frac{k}{\beta_1}} \quad r_1 = (1 - p_1)^{\frac{k}{\beta_1}} \quad r_2 = (1 - p_2)^{\frac{k}{\beta_2}}$$

$$\beta = \beta_1^{1 - (I_1 + I_2)} \beta_2^{I_1} \beta_3^{I_2} \quad \alpha_1 = (1 - p_1)^{\frac{(\beta_2 - \beta_1)k}{\beta_1 \beta_2}} \quad \alpha_2 = (1 - p_2)^{\frac{(\beta_3 - \beta_2)k}{\beta_2 \beta_3}}$$

- Ecuación de ahusamiento

$$d = c_1 \sqrt{H^{\frac{k - \beta_1}{\beta_1}} (1 - q)^{\frac{k - \beta}{\beta}} \alpha_1^{I_1 + I_2} \alpha_2^{I_2}}$$

$$\text{donde } \begin{cases} I_1 = 1 \text{ si } p_1 \leq q \leq p_2; \text{ de lo contrario } 0 \\ I_2 = 1 \text{ si } p_2 \leq q \leq 1; \text{ de lo contrario } 0 \end{cases}$$

Donde:

V_c = volumen comercial variable en (m^3)

D = diámetro normal (m)

d = diámetro superior (cm) a la altura h (m) desde el nivel del tocón

H = altura total de los arboles (m)

h_b = altura del tocón (m)

$q = h/H$

$k = \pi/40000$

$\alpha_i, \beta_i, \delta, p_1, p_2$ = coeficientes a determinar mediante el ajuste

Del sistema, es posible despejar la variable h de la función de ahusamiento a un diámetro (d) deseado:

$$h = H \times \left[1 - \left(\frac{d^2}{c_1^2 H^{\left(\frac{k-\beta_1}{\beta_1}\right)} p_1^{(I_1+I_2)} p_2^{I_2}} \right)^{\left(\frac{\beta}{k-\beta}\right)} \right]$$

Donde:

h es la altura a un diámetro (d) deseado.

H es la altura total

d es el diámetro mínimo deseado

$\alpha_i, \beta_i, \delta, p_1, p_2$ = coeficientes a determinar mediante el ajuste

Con esta forma, se optimiza las predicciones en volúmenes hasta una altura en base con un diámetro mínimo deseado con resultados insesgados y con una variabilidad muy reducida.

La corteza varía notablemente en espesor conforme cambia la edad del árbol y la altura en el fuste. Al expresar el volumen de la corteza en términos porcentuales; la parte inferior presenta un alto contenido, a medida que se eleva hacia el fuste este porcentaje disminuye. En general el volumen de corteza representa un promedio del 10 - 20% del volumen total del árbol (Prodan, 1997).

Con ayuda de los datos de volumen con corteza y sin corteza, se estimó el porcentaje de corteza para *Pinus patula* mediante un modelo de regresión de proporción directa de la forma $V_{CSC} = \vartheta \times V_{CC}$; el resultado obtenido del ajuste se presenta en el Cuadro 8.

Cuadro 8. Estadísticos de ajuste del modelo de regresión para volumen sin corteza.

| Modelo | Parámetro | Estimado | Error estándar | Prob. de rechazo |
|-------------------------------------|------------------|-----------------|-----------------------|-------------------------|
| $V_{CSC} = \vartheta \times V_{CC}$ | ϑ | 0.92005 | 3.26×10^{-4} | >0.0001 |

Donde: V_{CSC} = Volumen comercial sin corteza; V_{CC} = Volumen con corteza; ϑ = Parámetro a estimar.

El ajuste del modelo indica que la proporción de volumen maderable para *Pinus patula* es del 92%, y sólo el 8% es corteza. Este porcentaje total de corteza es muy práctico en su uso comercial. Sin embargo, su aplicación es para los rangos de datos que se usaron de los árboles que oscilan entre 9 - 32 m de altura y 9 - 63 cm de diámetro normal; esto para no perder la precisión.

Cuadro 9. Contenido de corteza para *Pinus patula*.

| Especia | Porcentaje de corteza |
|---------------------|------------------------------|
| <i>Pinus patula</i> | 8 % |

4.5. Tabla de volumen con distribución de productos

Con los resultados obtenidos del sistema segmentado de Fang *et al.* (2000) con FIML, se procedió a generar un ejemplo de una tabla de distribuciones de productos para volumen comercial promedio por clase de diámetro y altura (Cuadro 10). Para esta tabla se establecieron los siguientes límites comerciales para: a) leña, b) celulósicos y c) aserrío.

Los productos a obtener del árbol individual son definidos, en función al diámetro de la siguiente manera: leña (≥ 5 cm, < 10 cm), pulpa (≥ 10 cm hasta < 25 cm), aserrío (≥ 25 cm). Desde luego estas dimensiones son fijadas por la industria y en este caso son para ilustrar el uso del sistema. El comportamiento y la evolución de los productos que se pueden obtener de la especie durante su crecimiento se va

diversificando, lo que implica que un rodal va adquiriendo mayor valor económico conforme aumente su edad.

Cuadro 10. Volumen comercial con distribución de productos (m³) para rodales de *Pinus patula*.

| CD (cm) | Leña (m ³) | Pulpa (m ³) | Leña (m ³) | Pulpa (m ³) | Leña (m ³) | Pulpa (m ³) | Aserrío (m ³) | Leña (m ³) | Pulpa (m ³) | Aserrío (m ³) | Leña (m ³) | Pulpa (m ³) | Aserrío (m ³) |
|------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|------------------------------|---------------------------|----------------------------|------------------------------|---------------------------|----------------------------|------------------------------|
| | Alturas | | | | | | | | | | | | |
| | 10 | | 15 | | 20 | | | 25 | | | 30 | | |
| 10 | 0.031 | | 0.047 | | 0.057 | 0.027 | | | | | | | |
| 15 | 0.019 | 0.048 | 0.025 | 0.009 | 0.031 | 0.143 | | | | | | | |
| 20 | | | 0.016 | 0.092 | 0.020 | 0.267 | | 0.023 | 0.367 | | | | |
| 25 | | | | 0.177 | 0.014 | 0.406 | | 0.017 | 0.555 | | | | |
| 30 | | | | | 0.011 | 0.359 | 0.205 | 0.011 | 0.431 | 0.350 | | | |
| 35 | | | | | | | | 0.008 | 0.331 | 0.675 | 0.008 | 0.376 | 0.918 |
| 40 | | | | | | | | 0.005 | 0.270 | 0.997 | 0.006 | 0.307 | 1.323 |
| 45 | | | | | | | | 0.003 | 0.226 | 1.326 | 0.002 | 0.257 | 1.740 |
| 50 | | | | | | | | 0.002 | 0.193 | 1.668 | 0.001 | 0.219 | 2.173 |
| 55 | | | | | | | | | | | | 0.189 | 2.626 |
| 60 | | | | | | | | | | | | 0.166 | 3.101 |
| 65 | | | | | | | | | | | | 0.147 | 3.599 |

El esquema de producción que se presenta ofrece tres tipos de productos a partir del momento que los arboles alcanzan un diámetro de 30 cm. Sin embargo los productos de leña y pulpa para papel son los que registra menor volumen, comienza a decaer notablemente pero se mantienen presentes en todas las clases

de altura mientras que el producto predominante es el aserrío; en términos económicos, representa el mayor valor de la madera que se puede producir.

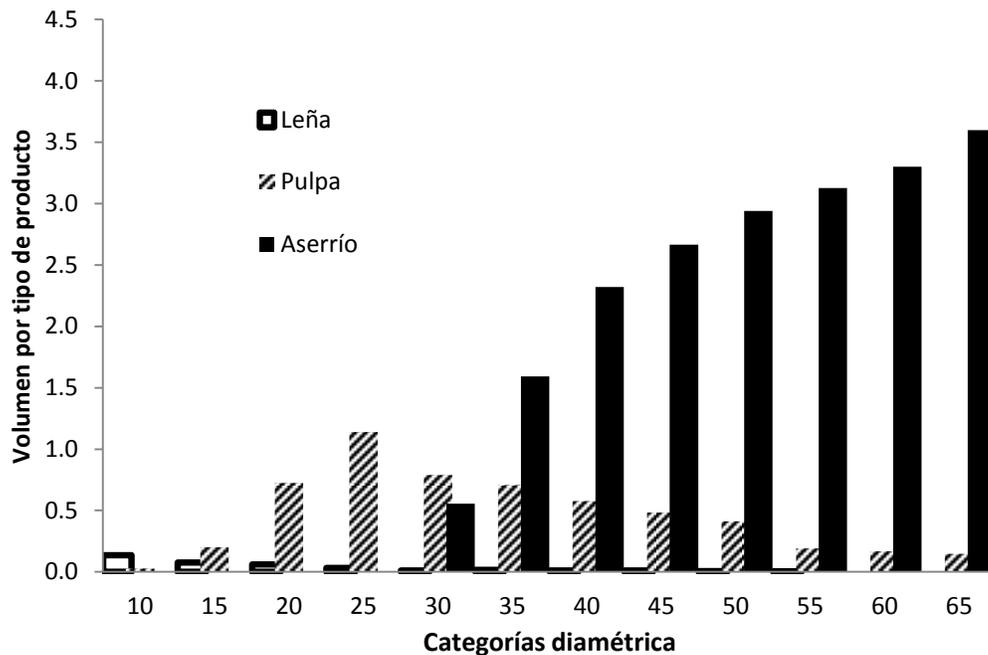


Figura 8. Volumen comercial con corteza por clase diamétrica para *Pinus patula* en Zacualtipán Hidalgo.

Como se puede observar en la Figura 8, en la primera clase de diámetro (10 cm) solamente se refleja leña como producto comercial. A partir de la clase 15 cm predomina el volumen para pulpa. En la clase 30 cm ya es posible obtener volumen de aserrío delgado y por primera vez, los tres tipos de productos.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De los 11 sistemas compatibles de ahusamiento-volumen explorados, el de Fang *et al.* (2000) fue el que mejor se ajustó a los datos bajo la técnica de ajuste FIML, además de que expresa solidez estadística para predecir los volúmenes y diámetros de *Pinus patula*. En consecuencia, permite estimar de forma directa el diámetro a cualquier altura y la altura a cualquier diámetro y de la misma manera referir el volumen a una altura dada o a un diámetro conocido.

Adicionalmente, el ajuste bajo un MEM ayuda a hacer más correcto estadísticamente el supuesto de eficiencia de los parámetros estimados al desplazar la heterocedasticidad en el volumen comercial sin complicar la estructura original del sistema ahusamiento-volumen.

A fin de contrastar los resultados, se ajustó el modelo de Fang *et al.* (2000) a una base de datos provenientes de 91 árboles de *Pinus patula* con 1039 pares de volumen comercial-ahusamiento obtenidos en rodales naturales recién abiertos a aprovechamiento en la Sierra de Juárez en Oaxaca (Hernández, 2007). Bajo el mismo procedimiento los puntos de inflexión que se localizan al 5.7% y 22.4% de altura relativa sobre el fuste, por lo que gran parte del volumen se concentra en una sección de estructura cónica, mientras que solo el 16% del fuste tiende a una estructura similar al paraboloides. Esta diferencia para arboles de la misma especie en otra región de México se puede atribuir al manejo de la densidad de los rodales siendo que los arboles usados en este estudio provienen de rodales bajo

silvicultura coetánea y regenerados con altas densidades; como resultado del manejo, el fuste tiende a tener un factor de forma constante a lo largo del fuste comercial y por tanto es casi un cilindro entre los puntos de inflexión estimados.

Con los sistemas compatibles de ahusamiento-volumen comercial variable ilustrados con anterioridad se da la opción de que los manejadores de los bosques coetáneos de la región cuenten con una herramienta más eficiente para el cálculo de la distribución de productos maderables para determinar el valor y uso adecuado de la materia prima de los bosques bajo aprovechamiento.

No se debe descartar desde luego la validación en el futuro de estos modelos una vez que se cuenten con más información de cubicación en la región proveniente de rodales con manejo intensivo.

6. LITERATURA CITADA

- Aguirre, S. C. A. 2007. Almacenamiento de Carbono en bosques manejados de *Pinus patula*: Estimación mediante percepción remota. Tesis de Maestría en Ciencias. Colegio de Postgraduados. Postgrado Forestal. México. 98 p.
- Ángeles P., G. 1995. Efecto de la vegetación competidora en el desarrollo inicial de *Pinus patula*. Tesis de Maestría en Ciencias. Colegio de Postgraduados. Postgrado Forestal. México. 114 p.
- Bailey R., L. 1995. Upper-stem volumes from stem-analysis data: An overlapping bolts method. *Can. J. For. Res.* 25: 170-173.
- Borders B., E. 1989. Systems of equations in forest stand modeling. *For. Sci.* 35: 548-556.
- Brooks R. J., L. Jiang and Ozçelik R. 2008. Compatible stem volume and taper equations for Brutian pine, Cedar of Lebanon, and Cilicica fir in Turkey. *Forest Ecology and Management* 256: 147-151.
- Bruce H. P., A.Tomer and Alexander V. E. 2003. *Structural Equation Modeling: Applications in Ecological and Evolutionary Biology*. Cambridge University Press. England. 393 p.
- Cao Q., V., H. Burkhart, and T. Max. 1980. Evaluation of two methods for cubic-volume prediction for loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* 26: 71-80.
- Chapman, H. H. 1924. *Forest Mensuration*. Wiley. 2a Ed. New York. USA. 557 p.
- Clutter, J. L. 1980. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. *For. Sci.* 26: 117-120.
- Coffré L. M. 1983. Modelos fustales. Tesis de Ingeniería. For. Valdivia, Universidad Austral de Chile, Facultad de Ciencias Forestales. 46 p.
- Cruz C., F. 2007. Modelos de volumen y crecimiento en altura dominante para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. Tesis de Doctorado. Colegio de Postgraduados. Postgrado Forestal. México. 78 p.
- Cruz C., F., H. M. De los Santos P. y J. R. Valdez L. 2008. Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. *Agrociencia* 42: 473-485.

- Cruz L., I. A. 2008. Modelado espacial de los recursos forestales en el ejido Atopixco, Estado de Hidalgo. Tesis de Maestría en Ciencias. Colegio de Postgraduados. Postgrado Forestal. México. 131 p.
- Cruz L., I. A., J. R. Valdez L., G. Ángeles P. y H. M. de los Santos P. 2010. Modelación espacial de área basal y volumen de madera en bosques manejados de *Pinus patula* y *P. teocote* en el ejido Atopixco, Hidalgo. *Madera y Bosques* 16: 75-97.
- Diéguez A., U., F. Castedo D., J. G. Álvarez G., y Rojo A. 2006. Compatible taper function for Scots pine plantations in northwestern Spain. *Can. J. For. Res.* 36: 1190-1205.
- Diéguez A., U., M. Barrio A., D. Dorado F., G. Ruiz A. D., T. Álvarez M. F., G. Álvarez J. G., y A. Rojo A. 2003. *Dendrometría*. Ediciones Mundi-Prensa. España. 327 p.
- Demaerschalk, J. P. 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. *For. Sci.* 18: 241–245.
- Enciclopedia de los municipios de México, EMM. 2000. Estado de Hidalgo: Zacualtipán de los Ángeles.
- Fang, Z., and Bailey, R. L. 1999. Compatible volume and taper models with coefficients for tropical species on Hainan Island in Southern China. *For. Sci.* 45: 85–100.
- Fang, Z., B. E. Borders, and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *For. Sci.* 46: 1-12.
- Fang, Z., R.L. Bailey, B. D. Shiver. 2001. A Multivariate simultaneous prediction system for stand growth and yield with fixed and random effects. *For. Sci.* 47: 550-562.
- Galán, L. R.; H. M. De los Santos P. y J. I. Valdez H. 2007. Crecimiento y rendimiento maderable de *Cedrela odorata* L. y *Tabebuia donnell-smithii* Rose en San José Chacalapa, Pochutla, Oaxaca. *Madera y Bosques* 14: 65-82.
- Gallant, A. R., and W. A. Fuller. 1973. Fitting segmented polynomial regression models whose join points have to be estimated. *Journal of the American Statistical Association* 68:144–147.

- Garber S., M. and D. A. Maguire. 2003. Modelling stem taper of three central Oregon species using mixed effects models and autoregressive error structures. *For. Ecol. Manage.* 179: 507-522.
- García, O. 1995. *Apuntes de Mensura Forestal I. Estática.* Universidad Austral de Chile. Facultad de Ciencias Forestales. Chile. 65 p.
- Gregoire, G.T., and O. Schabenberger. 1996. Nonlinear mixed-effects modeling of cumulative bole volume with spatially correlated within-tree data. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 1: 107-119.
- Gujarati, N. D., 2004. Violación de los supuestos del modelo clásico. pp. 327-538. Traducción al español de Garmendía G., D., Arango M. G. y M. Misas A. *In: McGraw Hill Interamericana de México (ed.). Econometría.* 4th ed. México.
- Hall, D. B., and Clutter. 2004. Multivariate multilevel nonlinear mixed effects models for timber yield predictions. *Biometrics* 60: 16-24.
- Hernández P., D. 2007. Tablas de volumen para *Pinus patula* en el ejido el Carrizal, Municipio de San Pedro Yolox, Ixtlán de Juárez, Oaxaca. Tesis Profesional. Instituto Tecnológico del Valle de Oaxaca. Oaxaca. 62 p.
- Higuera, C. 1994. Funciones de volumen y ahusamiento para Roble (*Nothofagus obliqua*) y Hualo (*Nothofagus alessandri*). Tesis de Ingeniería. For. Valdivia. Universidad Austral de Chile, Facultad de Ciencias Forestales. 74 p.
- Husch, B., C. Miller I., and Beers T. W. 1982. *Forest Mensuration.* 3a ed. Krieger Publishing Company. Malabar. Florida. U.S.A. 402 p.
- Kozak, A. 1997. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. *Can. J. For. Res.* 27: 619-629.
- Kozak, A., D. Munro, and J. Smith. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. *For. Chron.* 45: 278–283.
- Lares Z., M. A. 1994. Estimación del tamaño de muestra en regresión y modificación de los modelos de Schumacher y el logarítmico de la variable combinada. Tesis profesional. División de Ciencias Forestales. Universidad Autónoma Chapingo. Texcoco, Edo. de Méx. 36 p.
- Lee, W. K., J. Seo H., M. Son Y., K. Lee H., and Gadov Kv. 2003. Modeling stem profiles for *Pinus densiflora* in Korea. *For. Ecol. Manage.* 172: 69–77.
- Lenhart, J. P. and J. Clutter L. 1971. Cubic-foot yield tables for old-field loblolly pine plantations in the Georgia Piedmont. *Ga. For. Res. Council Rep.* 22: 12.

- Max, T. A. and H. Burkhart E. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *For. Sci.* 22: 283-289.
- Mendoza, B M. A. 1993. Conceptos básicos de manejo forestal. Edit. Limusa. México. P. 102.
- Parresol, B. R., J. E. Hotvedt, and Q. V. Cao. 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Can. J. For. Res.* 17: 250–259.
- Pinheiro, C. J, and D.M. Bates. 2000. Mixed-effects models in S and S-PLUS. Springer-Verlag, New York, Inc. 527 p.
- Pompa G., M. 1997. Sistema de cubicación para el género *Pinus* en la UCODEFO N° 7 Norogachi-Guachochi. Tesis de Maestría en Ciencias. Colegio de Postgraduados. Programa Forestal. México. 105 p.
- Pompa G., M., J. J. Corral R., M. A. Díaz V. y M. Martínez S. 2009. Función de ahusamiento y volumen compatible para *Pinus arizonica* Engelm. En el suroeste de Chihuahua. *Rev. Ciencia Forestal en México.* 34 (105): 119-136.
- Prodan, M., R. Peters, F. Cox, and Real P. 1997. *Mensura Forestal*. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA), Costa Rica. 561 p.
- Quiñónez B., G. 2009. Estimación de relaciones alométricas para el manejo forestal del ejido San Diego de Tezains, Durango, México. Tesis de Maestría en Ciencia. Instituto Tecnológico El Salto. Durango. México. Pp. 2-5.
- Reyes V., J. R. 2006. Sistema de cubicación para *Eucalyptus grandis* y *E. erophylla* en los límites de Veracruz y Oaxaca. Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Chapingo. Mexico. 79 p.
- Romahn de la V. C., Ramírez M. H. y G. J. Treviño. 1994. *Dendrometria*. Universidad Autónoma Chapingo. SEP. México. Pp. 125-180.
- Said I. G., G. P. Zarate de Lara. 1990. *Métodos Estadísticos*. Trillas. Segunda Edición. México D.F. 643 p.
- Santiago G., W. 2009. Sistema de crecimiento y rendimiento para *Pinus patula* de Zacualtipán, Hidalgo, México. Tesis de Maestría en Ciencias. Colegio de Postgraduados. Postgrado Forestal. México. 89 p.

- Tassisa G and H.E. Burkhart.1998. An application of mixed effects analysis to modeling thinning effects on stem profile of loblolly pine. For. Ecol. Manage. 103: 87-101.
- Torres R., J. M. y O. S. Magaña T. 2001. Evaluación de Plantaciones Forestales. Ed. Limusa, México. 472 p.
- Valdez L., R. y T. B. Lynch. 2000. Ecuaciones para estimar volumen comercial y total en rodales aclareados de *Pinus patula* en Puebla, México. Agrociencia 34: 747-758.
- West P., W. 1995. Application of regression analysis to inventory data with measurements on successive occasions. For. Ecol. Manage. 71: 227-234.
- Zimmerman, D.L. and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modeling of growth curve data: An overview. *Test* 10: 1-73.