



# COLEGIO DE POSTGRADUADOS

---

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN  
EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA  
ESTADÍSTICA

**Selección de portafolios de inversión mediante  
el empleo de la matriz de covarianza  
condicional y la incondicional**

**Julio César Martínez Sánchez**

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA  
OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS**

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MÉXICO  
2016

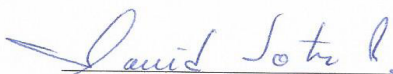
---


---

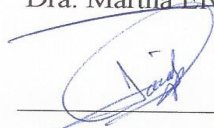
La presente tesis titulada: **Selección de portafolios de inversión mediante el empleo de la matriz de covarianza condicional y la incondicional**, realizada por el alumno: **Julio César Martínez Sánchez** bajo la dirección del Consejo Particular indicado ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS  
SOCIOECONOMÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA  
ESTADÍSTICA**

CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERO   
Dr. David Antonio Sotres Ramos

ASESORA   
Dra. Martha Elva Ramírez Guzmán

ASESOR   
Dr. Javier Suárez Espinosa

ASESOR   
Dr. Filemón Ramírez Pérez

Montecillo, Texcoco, Estado de México, Mayo de 2016 .

# Selección de portafolios de inversión mediante el empleo de la matriz de covarianza condicional y la incondicional

Julio César Martínez Sánchez.

Colegio de Postgraduados, 2016

El presente trabajo tiene como objeto la selección de portafolios de inversión mediante el modelo estándar, mejor conocido como el modelo de Media-Varianza (M-V), contra dos portafolios con matriz de covarianzas condicionales: el primero corresponde al caso del modelo multivariado Exponencial Ponderado de Medias Móviles (EWMA) y el segundo corresponde al modelo de Correlación Condicional Dinámica (DCC), este último emplea el modelo GARCH univariado para cada serie de rendimientos. Los tres casos para 15 acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Para obtener el portafolio óptimo, se emplea el método conocido como programación cuadrática, el cual permite, a diferencia del método de multiplicadores de Lagrange, obtener ponderaciones positivas. Los resultados indican que el empleo de la matriz de covarianza condicional reduce el riesgo del portafolio hasta en un 47.78 %, para el caso del modelo Exponencial Ponderado de Medias Móviles y en un 25.45 %, para el caso del modelo de Correlación Condicional Dinámica, ambos comparados con el empleo de una matriz de covarianza incondicional.

**Palabras clave:** *M-V, EWMA, DCC, GARCH, BMV, programación cuadrática.*

# Portfolio selection by using conditional and unconditional covariance matrix

Julio César Martínez Sánchez.

Colegio de Postgraduados, 2016

This paper aims at selecting investment portfolios using the standard model, better known as the mean-variance (M-V), against two portfolios with conditional covariance matrix: the first corresponds to the case of multivariate Exponential Weighted Moving Average model (EWMA) and the second is the Dynamic Conditional Correlation model (DCC), the latter uses the univariate GARCH model for each series of returns. The three cases for 15 assets from the Mexican Stock Exchange (BMV). To get the optimal portfolio, we use the method known as quadratic programming, which allows, unlike the method of Lagrange multipliers, to obtain positive weights. The results indicate that the use of the conditional covariance matrix reduce the portfolio risk by up to 47.78%, in the case of the Exponential Weighted Moving Averages model and 25.45%, in the case of Dynamic Conditional Correlation model, both compared with the use of an unconditional covariance matrix.

**Keywords:** *M-V, EWMA, DCC, GARCH, BMV, quadratic programming.*

## AGRADECIMIENTOS

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)** por brindarme la oportunidad de financiar la maestría.

Al **Dr. David Antonio Sotres Ramos** por dirigir el presente trabajo así como sus sugerencias y aportaciones.

A la **Dra. Martha Elva Ramírez Guzmán**, al **Dr. Javier Suarez Espinosa**, al **Dr. Filemón Ramírez Pérez** así como al **Dr. Marcos Portillo Vázquez**, por ser parte del consejo así como por sus observaciones y sugerencias.

Al **programa de Estadística**, en especial a todos los profesores que a lo largo de dos años tuve la oportunidad de aprender mucho de ellos, y a la vez, un poco de esta ciencia, la Estadística. Los cuales han influido en mi decisión de continuar preparándome.

A todos los **compañeros de Estadística** con quien tuve el agrado de tratar, en particular de los compañeros de generación, gracias a todos.

A todo el **personal del COLPOS**, con quien también tuve el agrado de tratar; secretarías, personal administrativo, así como al personal de biblioteca. Gracias por el apoyo y buen trato.

## DEDICATORIA

270, 339, -24, 241, 339, -10, 268, 301, -69, 215, 309, 1, 245, 260, 65, 223, 248, 69, 230, 329, 11, 188, 312, 5, 187, 234, 84, 226, 325, 19, 193, 300, -8, -15, 108, 67, 259, 303, -77, 240, 262, 73, 179, 294, 12, 189, 317, -1, 142, 148, 0, 236, 301, -32, 219, 321, 0, -15, 141, 34, 245, 344, -19, 225, 321, 4, -26, 131, 55, 237, 356, -8, 235, 210, 0, 255, 334, -49, -1, 147, 14, 233, 319, -2, 199, 324, -18, 1814, 239, -65, 183, 303, 9, -1, 176, -15, 231, 260, 79, 195, 318, -3, 196, 299, 0, 213, 319, 13, 271, 310, -76, 295, 319, -69, 227, 336, -8, 310, 329, -69, 188, 302, -5, -15, 108, 67, 292, 313, -65, 271, 302, -68, 180, 295, 20, 216, 321, -12, 22, 120, 78, 248, 335, -8, 265, 309, -79, 224, 254, 77, -1, 173, -12, 240, 262, 73, 199, 316, -10, 182, 304, -1, 234, 262, 79

...

He ofendido a Dios y a la humanidad  
porque mi trabajo no tuvo la calidad  
que debía haber tenido.  
Leonardo da Vinci (1452-1519)

...

# índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos	3
1.1.1. Objetivos generales	3
1.1.2. Objetivos específicos	3
1.1.3. Hipótesis	3
<b>2. Modelo GARCH univariado</b>	<b>4</b>
2.1. Características de las series de rendimientos financieros	4
2.2. Modelo GARCH univariado	8
2.2.1. Estructura de los modelos GARCH	9
2.2.2. Identificación	12
2.2.3. Estimación	15
2.2.4. Diagnóstico	17
2.2.5. Predicción	17
<b>3. Modelo de Vectores Autoregresivos (VAR)</b>	<b>19</b>



# ÍNDICE

---

3.1. Identificación . . . . .	20
3.1.1. Prueba de razón de verosimilitud secuencial y prueba M . . . . .	20
3.2. Estimación . . . . .	21
3.3. Diagnóstico . . . . .	22
<b>4. Portafolio de inversión . . . . .</b>	<b>24</b>
4.1. Modelo de Media-Varianza (M-V) . . . . .	24
4.1.1. Planteamiento del modelo . . . . .	27
4.2. Métodos para estimación de la matriz de covarianza . . . . .	28
4.2.1. Método I:Incondicional . . . . .	28
4.2.2. Método II:Condional. Modelo Exponencial Ponderado de Me- dias Móviles(EWMA) . . . . .	29
4.2.3. Método III:Condional. Modelo de Correlación Condicional Di- námica (DCC) . . . . .	30
4.3. Efectos de la diversificación . . . . .	31
4.4. Portafolio óptimo . . . . .	33
4.4.1. Multiplicadores de Lagrange . . . . .	34
4.4.2. Programación Cuadrática . . . . .	38
4.5. Frontera eficiente . . . . .	39
4.6. Evaluación . . . . .	42
4.6.1. Coeficiente Beta . . . . .	42
4.6.2. Índice de Sharpe . . . . .	43

# ÍNDICE

---

4.6.3. Índice de Treynor . . . . .	43
<b>5. Resultados</b>	<b>45</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>56</b>
<b>Referencias</b>	<b>56</b>
<b>A.</b>	<b>59</b>
A.1. Funciones en $\mathbb{R}$ . . . . .	59
A.1.1. Rendimientos . . . . .	59
A.1.2. Portafolio óptimo . . . . .	60
A.1.3. Portafolio eficiente . . . . .	62
A.1.4. Frontera eficiente . . . . .	63
A.1.5. Evaluar un portafolio . . . . .	66
A.1.6. Gráficos . . . . .	68
<b>B.</b>	<b>69</b>
B.1. Participación en el índice . . . . .	69

# índice de tablas

2.1. EACF de los cuadrados de los residuales . . . . .	15
5.1. Resumen exploratorio . . . . .	46
5.2. Selección del orden de un modelo VAR . . . . .	48
5.3. Pesos óptimos . . . . .	50
5.4. Evaluación 2013 a primer semestre 2015 . . . . .	54
B.1. Praticipación en el IPC.(Fuente: Economática) . . . . .	69
B.2. Praticipación en el IPC(continuación).(Fuente: Economática) . . . . .	70

# Índice de figuras

2.1. Serie de precios índice CAC 40 . . . . .	5
2.2. Rendimientos índice CAC 40 . . . . .	6
2.3. ACF de los rendimientos índice CAC 40 . . . . .	6
2.4. ACF del cuadrado de los rendimientos CAC 40 . . . . .	7
2.5. Serie de rendimientos diarios Ibex. (a) Rendimientos. (b) ACF de los rendimientos. (c) Histograma. (d) ACF del cuadrado de los rendimientos . . . . .	9
2.6. Serie mensual de rendimientos índice S&P 500 . . . . .	13
2.7. Función de autocorrelación simple (ACF) de los rendimientos índice S&P 500 . . . . .	13
2.8. Función de autocorrelación parcial (PACF) de los rendimientos índice S&P 500 . . . . .	14
2.9. Función de autocorrelación de los residuales (ACF) . . . . .	14
4.1. Gráfico riesgo-rendimiento . . . . .	25
4.2. Gráfico de combinación lineal de los activos A y B . . . . .	26
4.3. Punto de mínimo riesgo . . . . .	26

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

4.4. Gráfico de la frontera eficiente (azul) e ineficiente (negro) . . . . .	27
4.5. Representación de la Frontera eficiente . . . . .	40
4.6. Frontera eficiente . . . . .	42
5.1. Frontera eficiente mediante el criterio media varianza . . . . .	47
5.2. Frontera eficiente mediante el modelo EWMA . . . . .	49
5.3. Frontera eficiente mediante el modelo de DCC . . . . .	51
5.4. Rendimiento acumulado(Modelo Media-Varianza) . . . . .	52
5.5. Rendimiento acumulado (modelo EWMA) . . . . .	52
5.6. Rendimiento acumulado (modelo DCC) . . . . .	53
5.7. Comparación del rendimiento acumulado . . . . .	55
A.1. Frontera eficiente . . . . .	68

# Capítulo 1

## Introducción

En el ámbito financiero, todo inversionista busca invertir esperando obtener un máximo rendimiento posible al menor riesgo. Invertir en un solo activo puede traer consigo la obtención de un alto rendimiento y a la vez un alto riesgo. Por lo que la decisión de inversión debe considerar la posibilidad de invertir no en un solo activo sino en varios. Por lo tanto, la maximización del rendimiento, o minimización del riesgo, es un problema que conlleva a la selección de portafolios, es decir, al empleo del modelo de Media-Varianza (M-V).

Desde la aparición del modelo de Media-Varianza, desarrollado por [Markowitz \(1952\)](#), ha habido un profundo desarrollo en torno a la selección de portafolios. Sin embargo, ha sido cuestionado por el hecho de emplear desviaciones estándar incondicionales, pues con los trabajos de [Engle \(1982\)](#) sobre los modelos Autorregresivos de Heterocedasticidad Condicional (ARCH) y [Bollerslev \(1986\)](#), sobre los modelos Autorregresivos de Heterocedasticidad Condicional Generalizados (GARCH), nos dan cuenta que la variabilidad de los rendimientos no es constante a lo largo del tiempo sino más bien dependiente de este. De ahí la pertinencia de emplear las varianzas condicionales.

El empleo de los modelos de volatilidad multivariados, en particular de los modelos MGARCH, permitieron estimar la matriz de varianzas y covarianzas condicional, aunque con restricciones sobre el número de series empleadas, pues hasta con 3 series estima bien los parámetros. Con las aportaciones de [Engle \(2002\)](#) y [Tse and Tsui \(2002\)](#) sobre el modelo de Correlación Condicional Dinámica (DCC) fue posible emplear un gran número de series para tal fin.

## 1. Introducción

---

Derivado de lo anterior, este trabajo busca seleccionar el portafolio óptimo de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) mediante el criterio de Media-Varianza así como el empleo de una matriz de varianzas y covarianzas condicionales obtenida mediante dos procedimientos: el primero mediante el modelo Exponencial Ponderado de Medias Móviles (EWMA) y el segundo mediante el modelo de Correlación Condicional Dinámica (DCC), así como la evaluación de su desempeño.

## 1.1. Objetivos

### 1.1.1. Objetivos generales

Determinar el portafolio óptimo, de máximo rendimiento y mínimo riesgo, para acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) mediante tres procedimientos; 1) mediante el criterio de Media-Varianza (M-V), 2) el modelo Exponencial Ponderado de Medias Móviles (EWMA) y 3) mediante el modelo de Correlación Condicional Dinámica (DCC), para el periodo del 3 de enero de 2006 al 31 de diciembre de 2012.

### 1.1.2. Objetivos específicos

1. Determinar el portafolio óptimo para acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) mediante el criterio de Media-Varianza (M-V).
2. Determinar el portafolio óptimo para acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores mediante el modelo de Correlación Condicional Dinámica (DCC).
3. Determinar el portafolio óptimo para acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores mediante el modelo Exponencial de Promedios Móviles (EWMA).
4. Evaluar el comportamiento de los puntos anteriores para el periodo 02 de enero de 2013 al 30 de junio de 2015.

### 1.1.3. Hipótesis

El portafolio basado en la matriz de covarianza condicional empleando el modelo EWMA y DCC genera un mayor rendimiento con un menor riesgo.



# Capítulo 2

## Modelo GARCH univariado

En este capítulo se estudian modelos en los que la varianza no es constante, es decir, que la varianza de hoy depende de la varianza en un tiempo anterior. Una clase de este tipo de modelos, son los modelos GARCH, los cuales se utilizan en el modelo de Correlación Dinámica Condicional (DCC) para estimar la matriz de covarianzas condicional y emplearla en el modelo estándar de portafolios que se describe en el siguiente capítulo. A continuación se enuncian algunas características importantes que muestran las series de este tipo, las financieras.

### 2.1. Características de las series de rendimientos financieros

[Francq and Zakoian \(2011\)](#) mencionan que modelar series financieras es un problema complejo. La complejidad no es solamente debido a la variedad de series (acciones, tipos de cambio, tasas de interés, etc.), a la frecuencia de medición de las observaciones (segundos, minutos, horas, etc.), o de la disponibilidad de una amplia cantidad de datos. Dicha complejidad es principalmente debido a la falta de regularidad estadística que son comunes en un gran número de series de tiempo, por lo que no resulta fácil su reproducción utilizando modelos estocásticos.

Sea  $p_t$  el precio de un activo en un tiempo  $t$  y  $r_t = \log(p_t/p_{t-1})$  el rendimiento com-

## 2.1. Características de las series de rendimientos financieros

---

puesto continuo o rendimiento logarítmico (también llamado simplemente rendimiento), la serie  $r_t$  es cercana al rendimiento simple  $y_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$ , de ahí que  $y_t = \log(1 + r_t)$ . En contraste con el precio, los rendimientos no dependen de unidades monetarias lo cual facilita la comparación entre activos.

Algunas características importantes que se observan en las series de rendimientos son:

1. **No estacionariedad de la serie de precios.** La serie de precios es generalmente cercana a un camino aleatorio sin intercepto, por ejemplo, la serie de rendimientos del índice de Francia CAC 40 (Cotation Assistée en Continu), del 02 de marzo de 1990 al 15 de octubre de 2008, mostrada en la Figura 2.1. Por otro lado, la serie de rendimientos es generalmente compatible con la suposición de estacionariedad de segundo orden, ver Figura 2.2 sobre los rendimientos del índice CAC 40.

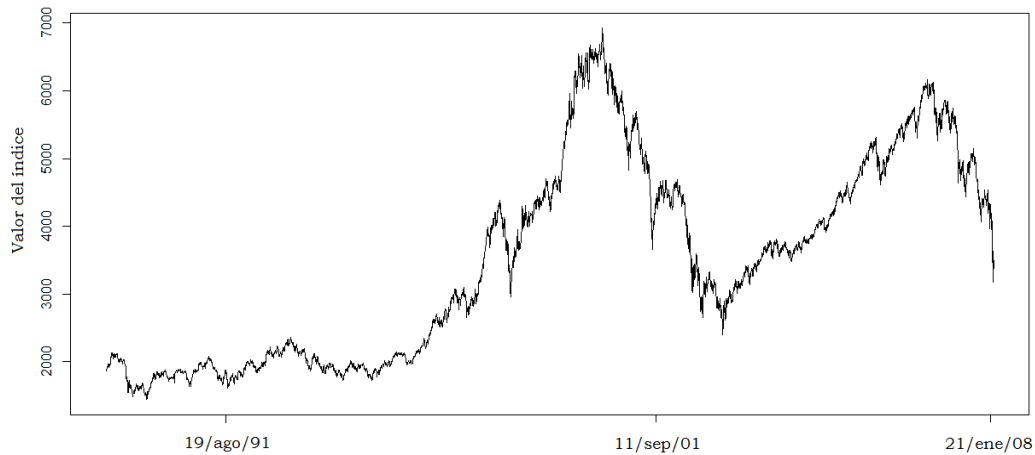
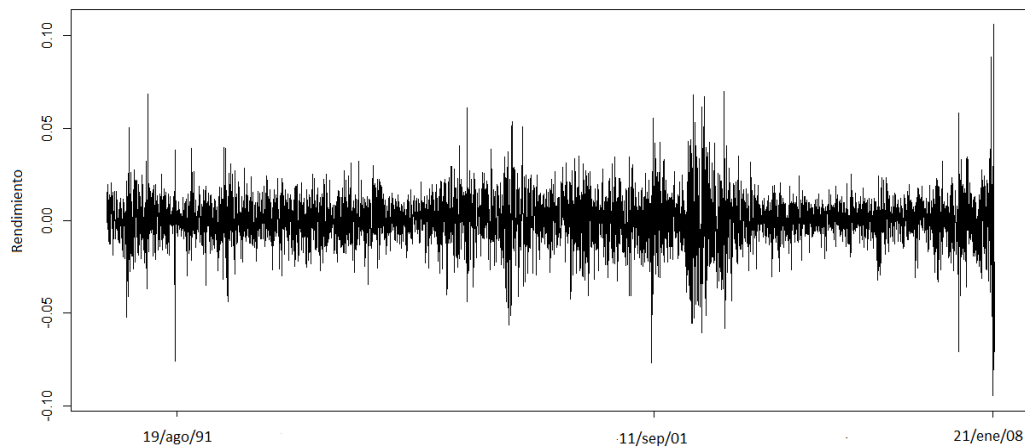


Figura 2.1: Serie de precios índice CAC 40

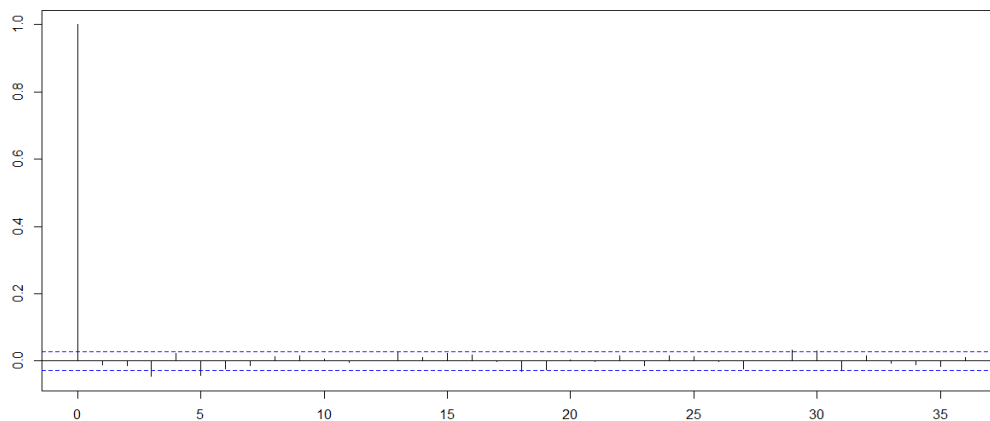
## 2.1. Características de las series de rendimientos financieros

---



**Figura 2.2:** Rendimientos índice CAC 40

2. **Ausencia de autocorrelación para la serie de rendimientos.** La serie de rendimientos generalmente muestra una baja autocorrelación, cercano a ruido blanco. La Figura 2.3 muestra la función de autocorrelación simple de los rendimientos del índice CAC 40.



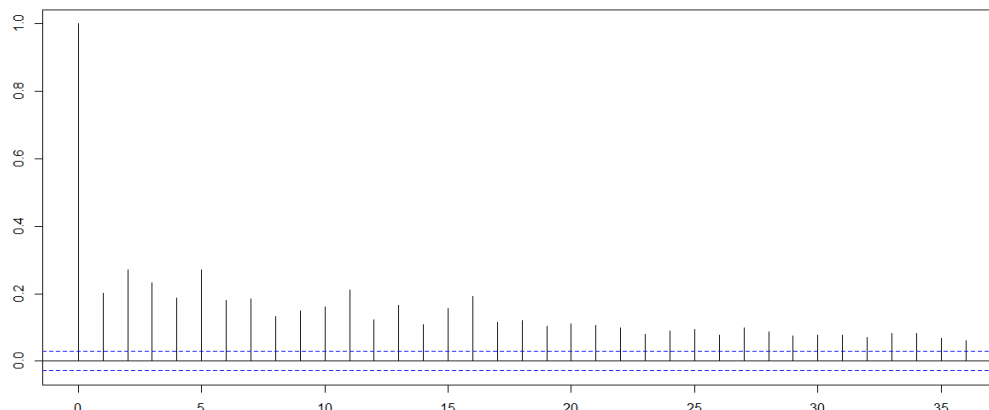
**Figura 2.3:** ACF de los rendimientos índice CAC 40

3. **Autocorrelación significativa del cuadrado de los rendimientos.** Los cuadrados de los rendimientos generalmente están fuertemente autocorrelacionados, ver Figura 2.4 de la función de autocorrelación del cuadrado de los rendimientos del índice CAC 40. Esta propiedad no es incompatible con la suposición

## 2.1. Características de las series de rendimientos financieros

---

de ruido blanco para los rendimientos.



**Figura 2.4:** ACF del cuadrado de los rendimientos CAC 40

- Distribución de colas pesadas.** Es común observar que la distribución empírica de los rendimientos no se ajusta a una distribución normal. Una prueba de normalidad llevará a rechazarla. Más precisamente, las distribuciones que tienen colas pesadas son conocidas como leptocúrticas. Una medida de la leptocurtosis es el coeficiente de curtosis definido como:

$$k = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Asintóticamente igual a 3 para observaciones normales independientes e idénticamente distribuidas. Por independencia debe entenderse que las observaciones no esten correlacionadas e idénticamente distribuidas que sigan una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Este coeficiente es mayor a 3 para una serie de rendimientos.

- Conglomerado de volatilidades.** Es común observar que la serie de rendimientos tiende a parecer en conglomerados. Es decir que subperiodos de turbulencia (alta volatilidad) son seguidos por subperiodos de calma (baja volatilidad). Estos periodos no son recurrentes en forma periódica (con lo cual se pueda contradecir la suposición de estacionariedad).
- Estacionalidad.** Los días de la semana próximos a días feriados, entre otros, pueden tener un efecto significativo en la variabilidad de los rendimientos. Seguido de un periodo de mercado cerrado, la volatilidad tiende a incrementar,

## 2.2. Modelo GARCH univariado

---

reflejando la información acumulada durante el periodo de receso. Así mismo, el efecto de la estacionalidad está también presente en la serie intra-diaria.

## 2.2. Modelo GARCH univariado

Una propiedad de estos modelos es que la varianza de los residuos no es constante y en consecuencia se observan rachas de mayor variabilidad seguidas por otras de menor variabilidad. Se han propuesto diversos métodos para estudiar tales efectos. En particular los modelo GARCH suponen que aunque la varianza marginal es constante, condición para que el proceso sea estacionario, la varianza condicional no es constante, sino que depende de valores pasados. A los modelos con esta propiedad se les denomina modelos de heterocedasticidad condicional, (Peña, 2005).

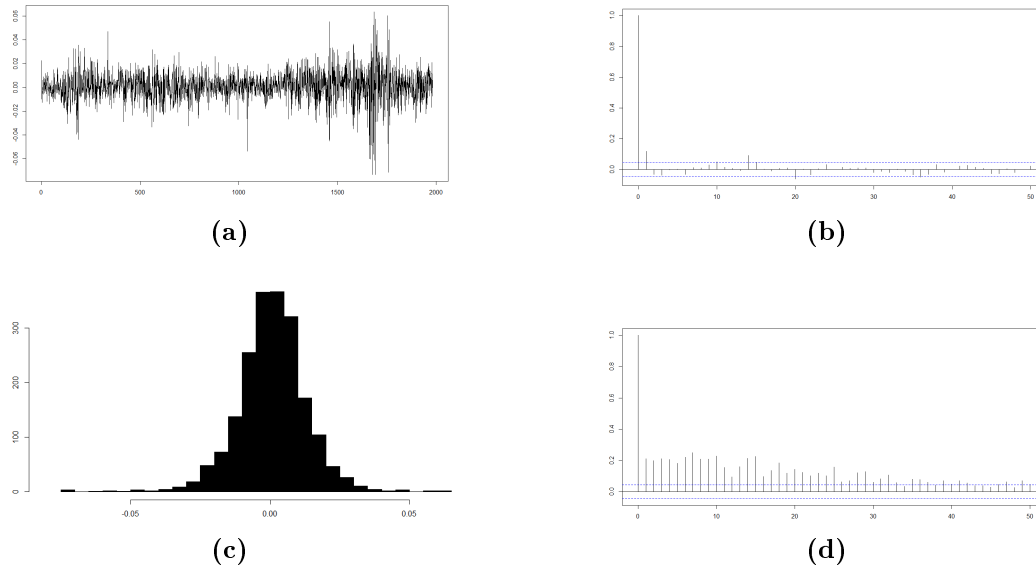
Peña (2005) sostiene que en los procesos lineales ARMA tanto la varianza marginal como la varianza condicional son constantes. Sin embargo, existen procesos estacionarios que no son lineales en la varianza porque aunque su varianza marginal es constante, la varianza condicionada a sus valores pasados no lo es. Esta no linealidad en la varianza puede darse además de otras formas de no linealidad en la media. Como la varianza condicionada representa la incertidumbre de las predicciones, estos procesos van a reflejar riesgo variable, entendiendo el riesgo como la incertidumbre de las predicciones en el tiempo.

Estos modelos, en esencia, permiten la dependencia, al hacer que la varianza condicionada no sea constante sino que dependa del tiempo, ello al relajar la hipótesis de normalidad y permitir que se tengan procesos formados por variables dependientes.

Estos procesos fueron propuestos para explicar ciertas propiedades que no pueden explicarse por los modelos ARIMA y que aparecen con frecuencia en series temporales estacionarias de datos financieros y ambientales de alta frecuencia, como datos diarios, horarios, etc. Normalmente, estas series tienen poca estructura y siguen paseos aleatorios, o procesos AR de orden bajo y coeficiente pequeño. Como ejemplo, la serie de rendimientos diarios del índice Ibex 35 de la Bolsa de Madrid, Figura 2.5 (a), de enero de 1992 a diciembre de 1999, se puede apreciar que presenta poca estructura y periodos de distinta varianza. La Figura 2.5 (b) presenta la función de autocorrelación de los rendimientos, los cuales muestran una débil autodependencia. La Figura 2.5

## 2.2. Modelo GARCH univariado

(c) muestra el histograma de los rendimientos, en la cual se aprecia una distribución simétrica aunque con colas más pesadas que la normal, con un coeficiente de curtosis de 6.88. La Figura 2.5 (d) muestra la función de autocorrelación de los cuadrados de los rendimientos, en la cual se aprecia una fuerte estructura de dependencia.



**Figura 2.5:** Serie de rendimientos diarios Ibov. (a) Rendimientos. (b) ACF de los rendimientos. (c) Histograma. (d) ACF del cuadrado de los rendimientos

Los modelos de heterocedasticidad condicional que logran explicar los efectos antes descritos suponen que en efecto la varianza no es constante en el tiempo.

El modelo **ARCH** (iniciales de AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity), introducido por [Engle \(1982\)](#), supone que la varianza condicional depende del pasado con estructura autorregresiva. Estos modelos fueron generalizados por [Bollerslev \(1986\)](#), para dar lugar a los modelos **GARCH** (iniciales de Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity), que incorpora a esta dependencia términos de medias móviles.

### 2.2.1. Estructura de los modelos GARCH

En las siguientes líneas se describe algunas propiedades de los modelos GARCH, en particular del modelo GARCH (1,1) el cual es empleado en el modelo de Correlación

## 2.2. Modelo GARCH univariado

---

CondicionaD Dinámica (DCC), descrito en el siguiente capítulo.

### GARCH(1,1)

Tsay (2005) menciona que la serie  $e_t = r_t - \mu$ , sigue un proceso GARCH(1,1) si

$$r_t = \mu + e_t \quad (2.1)$$

$$e_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (2.2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (2.3)$$

Donde  $r_t$  es el rendimiento al tiempo  $t$ ,  $\mu$  es la media de  $r_t$ ,  $e_t$  una serie de ruido blanco (que bien puede ser la serie de residuos de un modelo ARMA),  $\epsilon_t$  es la variable aleatoria  $iid(0, 1)$ ,  $\sigma_t$  es la volatilidad condicional la cual magnificará o minimizará la amplitud de las oscilaciones  $\epsilon_t$ , y donde  $\sigma_t$  y  $\epsilon_t$  son independientes, los coeficientes  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  corresponden al orden del modelo.

Dado que para cualquier orden del proceso  $e_t$ , las covarianzas resultan ser cero, es decir que el proceso no está correlacionado, se sigue que no es posible predecir  $e_t$  conociendo su historia, es decir  $e_{t-1}, e_{t-2}, \dots$

### El cuadrado del proceso $e_t$

Para evitar lo anterior, si se considera

$$a_t = e_t^2 - \sigma_t^2 \quad (2.4)$$

entonces 2.4 puede ser expresada como

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + a_t \quad (2.5)$$

Se puede notar que el cuadrado del proceso  $e_t$  tiene una estructura similar a un modelo ARMA, por lo que, se puede utilizar la metodología de los modelos ARMA para identificar la estructura del modelo GARCH.

Obteniendo la esperanza de 2.5 se puede verificar que la varianza incondicional o

## 2.2. Modelo GARCH univariado

---

marginal, viene dada por

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \quad (2.6)$$

y la condición de estacionariedad es  $0 \leq \alpha_1 + \beta_1 < 1$ .

### Curtosis

Para el caso más simple, si se considera que  $\epsilon_t$  se distribuye  $N(0, 1)$ , entonces se puede verificar que la curtosis viene dada por

$$\frac{E[e_t^4]}{Var(e_t^2)^2} = \frac{3[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3 \quad (2.7)$$

por lo que la distribución de un proceso GARCH(1,1) tiene colas más pesadas que la distribución normal, (Tsay, 2005).

### Función de autocorrelación

La función de autocorrelación de orden 1 para la serie de los cuadrados de  $e_t$  viene dada por

$$\rho(1) = \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}{1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2} \quad (2.8)$$

y la función de autocorrelación de orden  $k$

$$\rho(k) = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \rho(1), k > 1 \quad (2.9)$$

que indica que el decrecimiento de estos coeficientes depende de  $\lambda = (\alpha_1 + \beta_1)$ , (Peña, 2005).

Se puede notar que 2.9 tiene una estructura ARMA(1,1).



## 2.2. Modelo GARCH univariado

---

### 2.2.2. Identificación

[Jonathan and Kung-Sik \(2008\)](#) indican que para la identificación del orden del modelo GARCH, el modelo para la varianza condicional puede expresarse en términos de los cuadrados de los rendimientos. Si se sustituye la expresión  $\sigma_t^2 = e_t^2 - a_t$  en el modelo GARCH(p,q):

$$\begin{aligned} e_t^2 &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)e_{t-1}^2 + \dots + (\beta_{\max(p,q)} + \alpha_{\max(p,q)})e_{t-\max(p,q)}^2 \\ &\quad + a_t - \beta_1 a_{t-1} - \dots - \beta_q a_{t-q} \end{aligned} \quad (2.10)$$

en forma simplificada

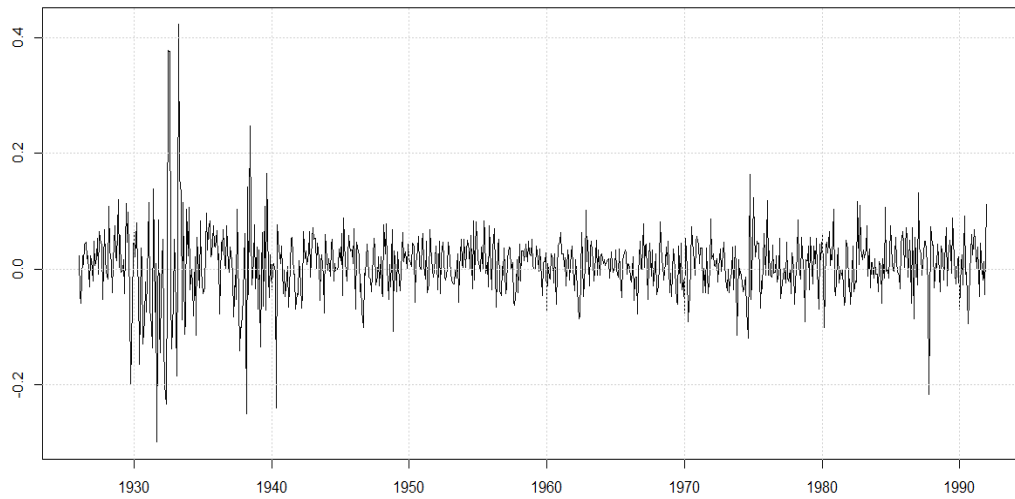
$$e_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j a_{t-j} + a_t \quad (2.11)$$

donde  $\beta_k = 0$  para todo entero  $k > p$  y  $\alpha_k$  para todo  $k > q$ . Esto muestra que el modelo GARCH(p,q) para los cuadrados de los rendimientos es un modelo ARMA(max(p,q),q). Entonces se puede aplicar las técnicas de identificación para los modelos ARMA a la serie de los cuadrados de los rendimientos para identificar q y max(p,q). Note que si  $q < p$ , en tal caso se podría estimar primero un modelo GARCH(p,p) y entonces estimar q examinando la significancia del resultado de los coeficientes estimados del modelo ARCH.

Por lo anterior, la identificación de un modelo GARCH, equivale a la identificación de un ARMA (max(p,q),q). El siguiente ejemplo tiene como propósito exponer el procedimiento de identificación. Considérese los rendimientos mensuales del índice S&P500 (Standard & Poor's 500), desde 1926 hasta 1992 con 792 observaciones, mostrado en [Tsay \(2005\)](#). La serie de rendimientos se muestra en la Figura 2.6.

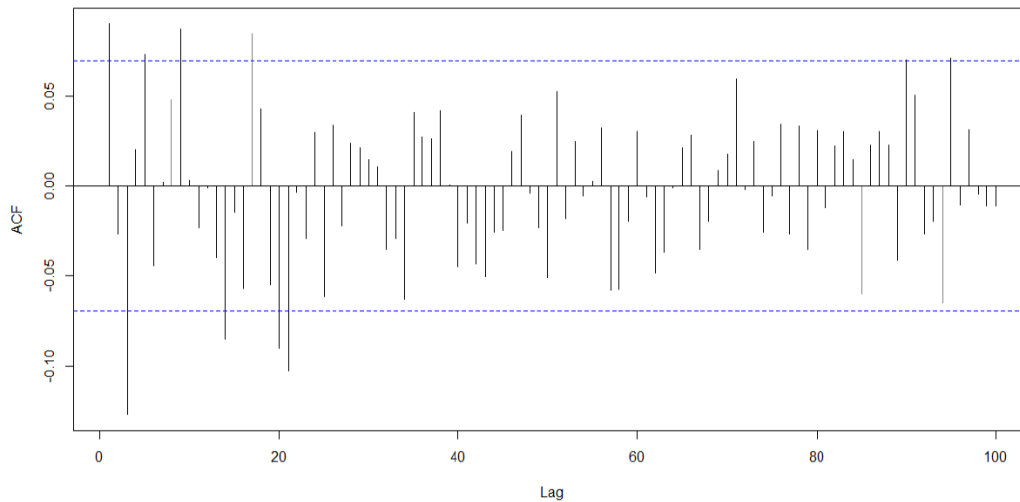
## 2.2. Modelo GARCH univariado

---



**Figura 2.6:** Serie mensual de rendimientos índice S&P 500

En la Figura 2.7 y 2.8 se puede apreciar la función de autocorrelación simple (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF), respectivamente. En la ACF se puede notar que hay presencia de correlación, por lo cual se debe ajustar un modelo ARMA para eliminar la dependencia de la serie de rendimientos y trabajar sobre los residuales para estimar el modelo GARCH.

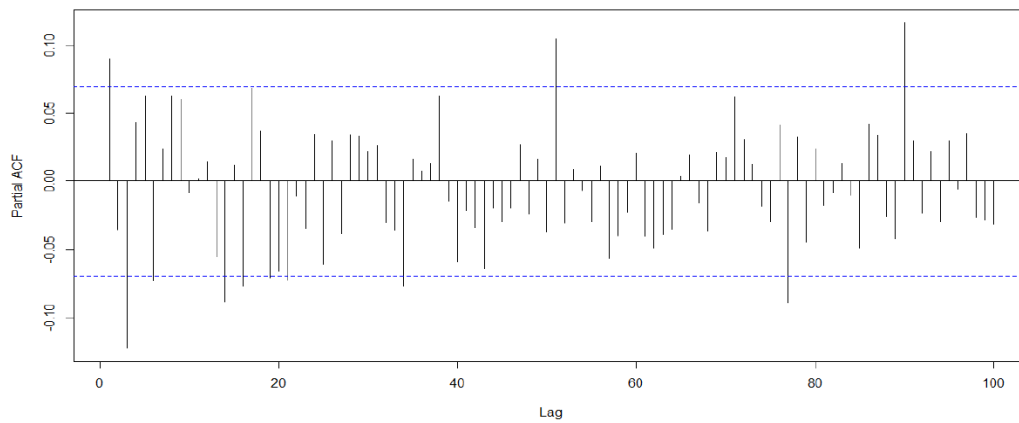


**Figura 2.7:** Función de autocorrelación simple (ACF) de los rendimientos índice S&P 500

Considerando la PACF, un modelo aceptable es un AR(3), el cual se expresa de la

## 2.2. Modelo GARCH univariado

---

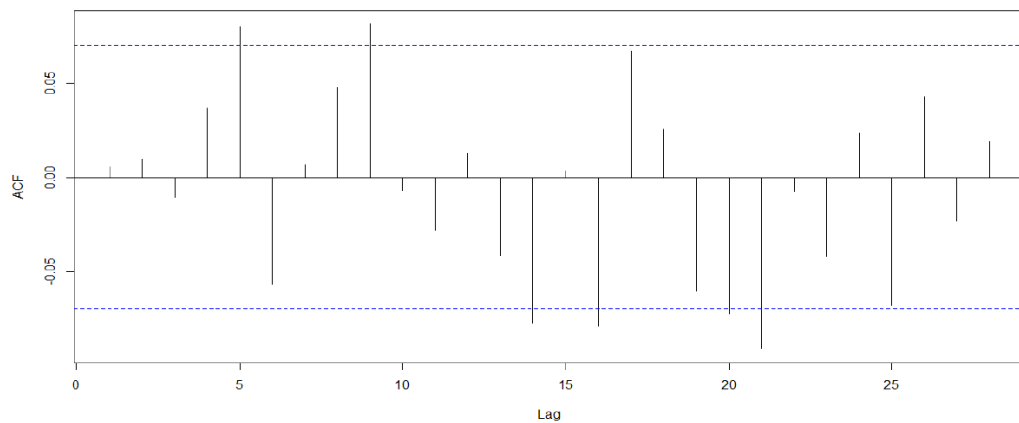


**Figura 2.8:** Función de autocorrelación parcial (PACF) de los rendimientos índice S&P 500

siguiente manera

$$r_t = \mu + \phi_1 r_{t-1} - \phi_2 r_{t-2} - \phi_3 r_{t-3} \quad (2.12)$$

En la Figura 2.9 se puede apreciar la ACF de los residuales, la cual muestra una correlación no significativa que bien puede verificarse mediante la prueba Ljung-Box.



**Figura 2.9:** Función de autocorrelación de los residuales (ACF)

Empleando la ACF y la PACF de los cuadrados de los residuales del AR(3) puede

## 2.2. Modelo GARCH univariado

hallarse el orden del modelo GARCH, ya que el modelo GARCH equivale a un AR-MA(max(p,q),q). Otro método para hallar el orden del modelo GARCH es emplear la función de autocorrelación extendida (EACF) mostrada en la tabla 2.1

q \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1	x	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	o	o	o
2	x	x	o	o	x	o	o	o	x	o	x	o	o	o
3	x	x	x	o	o	o	o	o	x	x	x	o	o	x
4	x	x	x	o	o	o	o	o	x	x	x	o	x	o
5	x	x	x	x	x	o	o	o	x	x	x	o	x	o
6	x	o	x	o	x	x	o	o	x	x	x	o	o	o
7	x	o	x	o	x	x	o	o	x	x	x	o	o	o

**Tabla 2.1:** EACF de los cuadrados de los residuales

Donde la línea horizontal indica el orden p mientras que la vertical el orden q, y en la parte central el símbolo X indica que los parámetros no son significativos, mientras que el símbolo 0 indica que si lo son. El orden del proceso sugerido por el método viene dado por el vértice conformado por dos lados de un triángulo, para el cual el modelo cumple con el supuesto de parsimonia, es decir, que tiene el menor número de parámetros. Para mayor referencia sobre el método puede consultarse [Tsay and Tiao \(1984\)](#). Para el ejemplo de la serie S&P 500, el método indica un proceso GARCH(1,1) y la ecuación del modelo queda expresada en 2.13.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (2.13)$$

### 2.2.3. Estimación

#### Método de máxima verosimilitud

[Jonathan and Kung-Sik \(2008\)](#) describen el procedimiento para obtener la función de verosimilitud de un modelo GARCH, la cual puede ser derivada considerando el caso más simple, en el que el proceso sigue una distribución normal. Dados los parámetros  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , la varianza condicional puede ser calculada recursivamente por la siguiente

## 2.2. Modelo GARCH univariado

---

fórmula

$$Var(e_t|e_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_{t-1} Var(e_{t-1}|e_{t-2}) \quad (2.14)$$

para  $t \leq 2$ , con el valor inicial  $Var(e_1|e_0)$  bajo de la suposición de estacionariedad se puede utilizar la varianza incondicional  $Var(e_t) = \alpha_0/(1 - \alpha_1 - \beta_1)$ . Sea la función de densidad condicional

$$f(e_t|e_{t-1}, \dots, e_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{t|t-1}^2}} e^{-\frac{e_t^2}{2\sigma_{t|t-1}^2}} \quad (2.15)$$

La función de densidad conjunta

$$f(e_t, \dots, e_1) = f(e_{n-1}, \dots, e_1) f(e_n|e_{n-1}, \dots, e_1) \quad (2.16)$$

Iterando 2.13 y tomando logaritmos se obtiene la función log-verosimilitud

$$L(\alpha, \alpha_1, \beta_1) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \log(\sigma_{i-1|i-2}^2) + \frac{e_i^2}{\sigma_{i-1|i-2}^2} \right\} \quad (2.17)$$

Dado que no hay solución en forma cerrada para los parámetros  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , pueden obtenerse maximizando la función log-verosimilitud numéricamente. Los estimadores de máxima verosimilitud pueden utilizarse como una aproximación de los verdaderos valores de los parámetros. La covarianza denotada como  $\Lambda$  puede obtenerse de la siguiente manera. Sea

$$\theta = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

el vector de parámetros. El  $i$ -ésimo componente de  $\theta$  es  $\theta_1 = \alpha_0$ ,  $\theta_2 = \alpha_1$  y  $\theta_3 = \beta_1$ . Los elementos de la diagonal de  $\Lambda$  es aproximadamente la varianza de los estimadores. Así que el primer elemento de la diagonal de  $\Lambda$  es aproximadamente la varianza de  $\hat{\alpha}_0$ , el elemento  $(1, 2)$  de  $\Lambda$  es aproximadamente la covarianza entre  $\hat{\alpha}_0$  y  $\hat{\alpha}_1$ , etc. La

## 2.2. Modelo GARCH univariado

---

matriz  $\Lambda$  puede aproximarse a la matriz inversa con elementos  $(i,j)$  igual a:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{t|t-1}^2} \frac{\partial \sigma_{t|t-1}^2}{\partial \theta_i} \frac{\partial \sigma_{t|t-1}^2}{\partial \theta_j} \quad (2.19)$$

La derivación parcial puede ser obtenida recursivamente diferenciando la ecuación 2.3. Por ejemplo, para el caso de  $\alpha_0$ , recursivamente se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_{t|t-1}^2}{\partial \alpha_0} = 1 + \beta \frac{\partial \sigma_{t|t-1}^2}{\partial \alpha_0} \quad (2.20)$$

Las derivaciones parciales restantes pueden ser obtenidas de forma similar.

### 2.2.4. Diagnóstico

Si se denota  $e_t$  a los residuos del modelo ARMA y  $\hat{\sigma}_t$  a las varianzas condicionadas estimadas, los residuos estandarizados,  $e_t/\hat{\sigma}_t$ , deben seguir un proceso de ruido blanco y se pueden aplicar los contrastes habituales para procesos ARMA. Además sus cuadrados no deben mostrar dependencia, lo que se puede comprobar con los contrastes sobre autocorrelaciones de los cuadrados de los residuos, ([Zivot and Wang, 2007](#)).

### 2.2.5. Predicción

Una importante tarea en modelar la volatilidad condicional es la generación de un pronóstico. [Zivot and Wang \(2007\)](#) muestran que los pronósticos de valores futuros pueden ser obtenidos siguiendo la tradicional metodología del modelo ARMA.

Por simplicidad, considérese el modelo GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (2.21)$$

que es estimado sobre el periodo  $t = 1, 2, \dots, T$  donde  $t-1=T$ . Puede notarse fácilmente

## 2.2. Modelo GARCH univariado

---

que:

$$\begin{aligned} E[\sigma_{T+1}^2|F_T] &= \alpha_0 + \alpha_1 E[e_T^2|F_T] + \beta_1 E[\sigma_T^2|F_T] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 e_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2 \end{aligned}$$

Donde  $F_T$  corresponde a los valores pasados  $e_1, \dots, e_{t-1}$ . Dado que  $e_T$  y  $\sigma_T^2$  son ya conocidos. Ahora para  $T+2$

$$\begin{aligned} E[\sigma_{T+2}^2|F_T] &= \alpha_0 + \alpha_1 E[e_{T+1}^2|F_T] + \beta_1 E[\sigma_{T+1}^2|F_T] \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) E[\sigma_{T+1}^2|F_T] \end{aligned}$$

dado que  $E[e_{T+1}^2|F_T] = E[\sigma_{T+1}^2|F_T]$ , de forma similar se puede obtener la ecuación del pronóstico de la volatilidad  $k$  valores hacia adelante

$$E[\sigma_{T+k}^2|F_T] = \alpha_0 \sum_{i=1}^{k-2} (\alpha_1 + \beta_1)^i + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} E[\sigma_{T+1}^2|F_T] \quad (2.22)$$

para  $k \geq 2$ . Nótese que cuando  $k \rightarrow \infty$  el pronóstico de la volatilidad se aproxima a la varianza incondicional  $\alpha_0/(1 - \alpha_1 - \beta_1)$  si el proceso GARCH es estacionario.

## Capítulo 3

# Modelo de Vectores Autoregresivos (VAR)

En las siguientes líneas se describe el modelo de vectores autorregresivos (VAR), el cual es empleado previo al modelo Exponencial Ponderado de Medias Móviles (EWMA) y al modelo de Correlación Condicional Dinámica (DCC), con el objeto de eliminar dependencia en las series de rendimientos, en caso de existir.

La serie multivariada  $z_t$  sigue un modelo VAR de orden  $p$ , VAR( $p$ ), si

$$z_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + a_t \quad (3.1)$$

donde  $\phi_0$  es un vector de dimensión  $k$ ,  $\phi_i$  es una matriz de  $k \times k$  para  $i > 0$ ,  $\phi_0 \neq 0$  y  $a_t$  es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y matriz de covarianza  $\Sigma$ , ([Tsay, 2013](#)).

Para estudiar las propiedades de los modelos VAR( $p$ ), considérese el caso más simple, el modelo VAR(1)

$$z_t = \phi_0 + \phi_1 z_{t-1} + a_t \quad (3.2)$$



### 3.1. Identificación

---

Explícitamente puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{1,11} & \phi_{1,12} \\ \phi_{1,21} & \phi_{1,22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} z_{1t} &= \phi_{10} + \phi_{1,11}z_{1,t-1} + \phi_{1,12}z_{2,t-1} + a_{1t} \\ z_{2t} &= \phi_{20} + \phi_{1,21}z_{1,t-1} + \phi_{1,22}z_{2,t-1} + a_{2t} \end{aligned}$$

No es difícil generalizar el modelo VAR(1) al caso VAR(p), solo hay que extender la expresión del modelo VAR(1) a un modelo de dimensión p

$$z_t = \phi_0 + \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_{t-p} z_{t-p} + a_t \quad (3.3)$$

## 3.1. Identificación

Para construir un modelo VAR(p), al igual que el modelo de Box y Jenkins, es preciso identificar en primera instancia el orden p del modelo.

### 3.1.1. Prueba de razón de verosimilitud secuencial y prueba M

La prueba de razón de verosimilitud fue recomendada por Tiao y Box, para estimar el orden de un modelo VAR(p). La idea fue comparar un modelo VAR( $\ell$ ) con un modelo VAR( $\ell - 1$ ). En términos estadísticos consiste en probar la hipótesis  $H_0: \phi_\ell = 0$ .

Sea  $\beta'_\ell = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_\ell]$  la matriz de coeficientes del modelo VAR( $\ell$ ) y  $\Sigma_{a,\ell}$  la matriz de covarianzas de los residuales. Bajo suposición de normalidad, la prueba de razón de verosimilitud es

$$\Lambda = \frac{\max L(\beta_{\ell-1, \Sigma_a})}{\max L(\beta_{\ell, \Sigma_a})} = \left( \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{a-\ell}} \right)^{(T-\ell)/2} \quad (3.4)$$

## 3.2. Estimación

---

La prueba de razón de verosimilitud es equivalente a rechazar  $H_0$  para valores grandes de

$$-2\ln(\Lambda) = -(T - \ell)\ln\left(\frac{|\hat{\Sigma}_{a,\ell}|}{|\hat{\Sigma}_{a,\ell-1}|}\right) \quad (3.5)$$

Otra prueba comunmente usada, conocida como la prueba M, es

$$M(\ell) = -(T - \ell - 1.5 - k\ell)\ln\left(\frac{|\hat{\Sigma}_{a,\ell}|}{|\hat{\Sigma}_{a,\ell-1}|}\right) \quad (3.6)$$

la cual asintóticamente sigue una distribución  $\chi^2$  con  $k^2$  grados de libertad.

Los métodos más comunes para la selección de un modelo son: el criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio de información bayesiano (BIC), los cuales se describen en las siguientes líneas.

$$AIC(\ell) = \ln|\Sigma_\ell| + \frac{2}{T} + c \quad (3.7)$$

$$BIC(\ell) = \ln|\Sigma_\ell| + \frac{\ell\ln(T)}{T} \quad (3.8)$$

donde  $\ell$  denota el número de parámetros estimados por máxima verosimilitud del modelo VAR y  $\Sigma_\ell$  es la correspondiente matriz que estima a  $\Sigma$ . En ambos criterios la regla a seguir es que entre menor sea su valor, mejor será el modelo, es decir, que el orden del modelo sugerido es aquel para el cual tanto el AIC o el BIC es menor.

## 3.2. Estimación

Sea  $\mathbf{a}_t$  modelo VAR(p) con distribución normal multivariada y sea  $z_{h,q}$  denota las observaciones de  $t=h$  a  $t=k$ . La función de verosimilitud condicional puede ser escrita

### 3.3. Diagnóstico

---

como

$$\begin{aligned}
 L_{(z_{(p+1):T}|z_{1:p},\beta,\Sigma)} &= \prod_{t=p+1}^T p(z_t|z_{1:(t-1)},\beta,\Sigma) \\
 &= \prod_{t=p+1}^T p(a_t|z_{1:(t-1)},\beta,\Sigma) \\
 &= \prod_{t=p+1}^T p(a_t|\beta,\Sigma) \\
 &= \prod_{t=p+1}^T \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}a_t'\Sigma^{-1}a_t\right] \\
 &\propto |\Sigma|^{-(T-p)/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{t=p+1}^T \text{tr}(a_t'\Sigma^{-1}a_t)\right]
 \end{aligned}$$

La función log-verosimilitud es

$$\ell(\beta,\Sigma) = c - \frac{T-p}{2}\log(|\Sigma|) - \frac{1}{2}\text{tr}\left(\Sigma^{-1}\sum_{t=p+1}^T T a_t a_t'\right)$$

Tomando derivadas parciales, se llega a que

$$-E\left(\frac{\partial^2\ell(\hat{\beta}\Sigma)}{\partial\text{vec}(\Sigma)\partial\text{vec}(\Sigma)'}\right) = \frac{T-p}{2}(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})$$

Este resultado provee asintóticamente una matriz de covarianza para la estimación máximo-verosímil de  $\Sigma$ , (Tsay, 2013).

### 3.3. Diagnóstico

Una vez estimado el modelo, para simplificarlo es recomendable remover aquellos parámetros que no son significativos. Las hipótesis para probar si los coeficientes son significativos o no son

$$H_0 : \omega = 0 \quad \text{y} \quad H_1 : \omega \neq 0$$

### 3.3. Diagnóstico

---

donde  $\omega$  corresponde al vector de parámetros de dimensión  $v$ . El estadístico se distribuye como una  $\chi_v^2$ , el cual puede ser interpretado como una prueba de razón de verosimilitud bajo la suposición de normalidad de  $\mathbf{a}_t$ .

Además de simplificar el modelo, es preciso verificar que los residuales no tengan significativa correlación serial, y que no se viole la suposición de distribución, para mayor detalle sobre los métodos puede consultarse [Reinsel \(2003\)](#).

# Capítulo 4

## Portafolio de inversión

El objetivo del presente capítulo es introducir el modelo estándar de portafolios, el modelo de Media-Varianza (M-V), el cual responde a dos cuestiones importantes que se plantea todo inversor: en qué acciones invertir y cuánto invertir, lo cual permitirá la óptima distribución del capital así como reducir el riesgo al invertir.

### 4.1. Modelo de Media-Varianza (M-V)

El modelo de Media-Varianza (M-V) introducido por [Markowitz \(1952\)](#) es un clásico paradigma en las finanzas modernas en la eficiente distribución de capital entre activos con riesgo. Dadas las estimaciones de los riesgos esperados, desviación estándar y correlación de los rendimientos de un conjunto de activos, el modelo de Media-Varianza provee al inversor la óptima distribución del capital, ([Michaud and Michaud, 2008](#)).

El modelo de Markowitz es conocido como el modelo de Media-Varianza porque solo toma dos parámetros, la media y la varianza de los rendimientos, es decir, los dos primeros momentos de su distribución para caracterizar el portafolio del inversor.

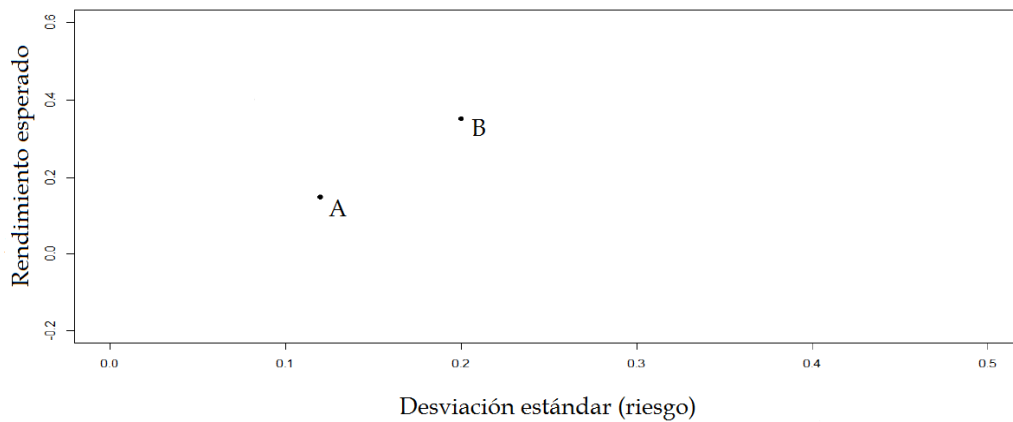
El rendimiento esperado del portafolio es estimado por la media de los rendimientos. El riesgo, que corresponde a la incertidumbre de obtener los rendimientos, es estimado por la varianza. Esta medición del riesgo no es la única que corresponde al punto de vista del inversor, porque el riesgo de obtener un resultado que está por encima del

## 4.1. Modelo de Media-Varianza (M-V)

---

promedio es considerado en la misma forma que el riesgo de obtener un resultado que está por debajo del promedio. El inversor tiene aversión al riesgo. El por lo general está preocupado por el riesgo de obtener un rendimiento por debajo del promedio, (Amenc and Le Sourd, 2005).

Para exponer la idea del modelo, supóngase que se tienen dos activos, A y B, con un rendimiento esperado de 0.15 y 0.35 y un riesgo o desviación estándar de 0.12 y 0.2, respectivamente y una correlación entre ambos de 0.31. La gráfica se muestra en la Figura 4.1.

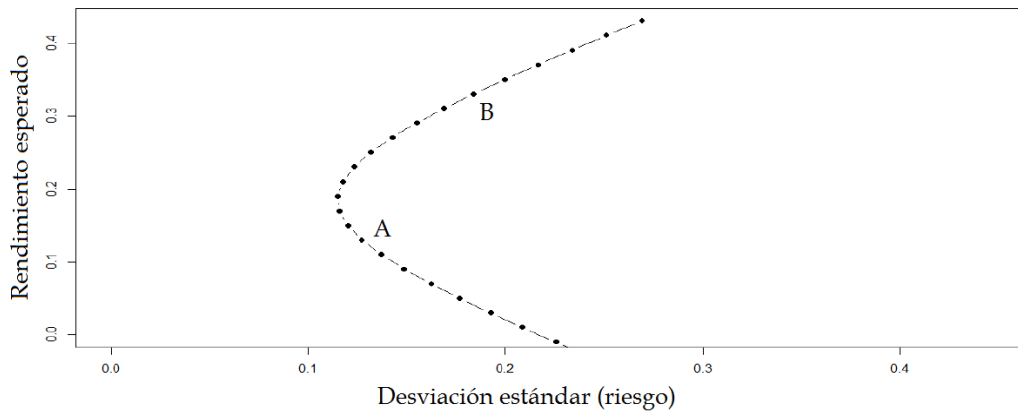


**Figura 4.1:** Gráfico riesgo-rendimiento

Ahora supóngase que se desea hacer una combinación lineal entre los dos activos, con el objeto de invertir cierta proporción o peso en cada uno de ellos. De la combinación lineal se tendría un rendimiento esperado del portafolio dado por  $\mu_p = w_A\mu_A + w_B\mu_B$  y un riesgo de  $\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_{AB}$ , donde  $w_A$  y  $w_B$  son las ponderaciones de los activos A y B, respectivamente. Para valores en los reales de  $w_A$  y  $w_B$  se obtendría una gráfica como la Figura 4.2.

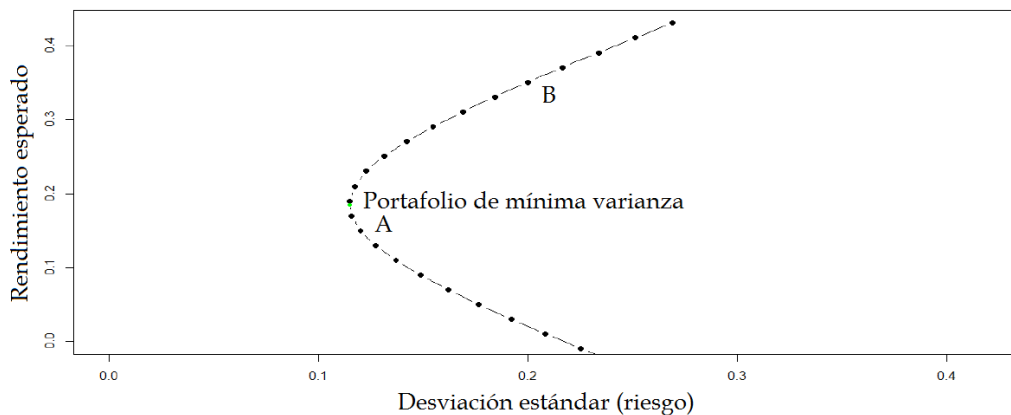
## 4.1. Modelo de Media-Varianza (M-V)

---



**Figura 4.2:** Gráfico de combinación lineal de los activos A y B

Dado que todo inversor espera el mínimo riesgo posible en su inversión, entonces, se pensaría en invertir en un punto que minimice la varianza. Ese punto mínimo, mostrado en la Figura 4.3, indica que se debe invertir una proporción de 0.82 en el activo A y 0.18 en el activo B.



**Figura 4.3:** Punto de mínimo riesgo

Otro conjunto factible posible es conocido como **frontera eficiente**, el cual da un rendimiento esperado máximo para cada nivel de riesgo, la Figura 4.4 ilustra dicho conjunto.

De ahí que uno de los principales problemas es encontrar los pesos que minimicen la varianza de la combinación de activos.

## 4.1. Modelo de Media-Varianza (M-V)

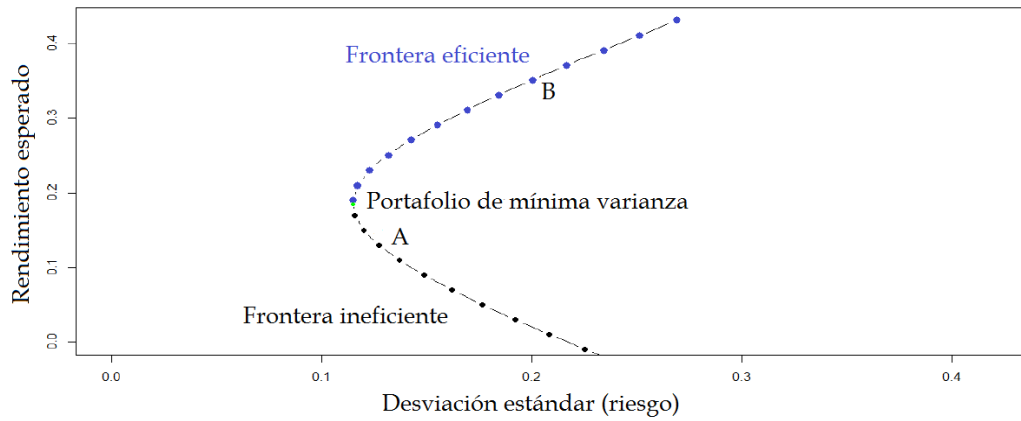


Figura 4.4: Gráfico de la frontera eficiente (azul) e ineficiente (negro)

### 4.1.1. Planteamiento del modelo

Sea  $r_{it}$  el rendimiento del  $i$ -ésimo activo al tiempo  $t$ , que en adelante se denotará simplemente como  $r_i$ . El rendimiento esperado de un activo viene dado por

$$\mu_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_i \quad (4.1)$$

y el rendimiento de un portafolio está dado por

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i \quad (4.2)$$

donde:

$r_p$  = representa el rendimiento del portafolio

$w_i$  = ponderación del  $i$ -ésimo activo

$r_i$  = rendimiento del  $i$ -ésimo activo al tiempo  $t$

El rendimiento esperado del portafolio

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (4.3)$$



## 4.2. Métodos para estimación de la matriz de covarianza

---

La varianza de un portafolio se expresa como

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (4.4)$$

En términos matriciales se tiene que

$$\mu_p = \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

y

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

donde:

$\mathbf{w}$  = representa el vector de ponderaciones del portafolio

$\boldsymbol{\mu}$  = es el vector de rendimientos esperados

$\mu_p$  = es el rendimiento esperado del portafolio

$\boldsymbol{\Sigma}$  = representa la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos.

## 4.2. Métodos para estimación de la matriz de covarianza

### 4.2.1. Método I:Incondicional

Sea  $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  un vector aleatorio de  $n \times 1$ . Entonces cada elemento de  $\mathbf{X}$  es una variable aleatoria con propia distribución de probabilidad. La media marginal  $\mu_i$  y varianza  $\sigma_i^2$  son definidas como  $\mu_i = E(\mathbf{X}_i)$  y  $\sigma_i^2 = E(\mathbf{X}_i - \mu_i)^2$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivamente.

## 4.2. Métodos para estimación de la matriz de covarianza

---

El comportamiento de un par de variables aleatorias,  $\mathbf{X}_i$  y  $\mathbf{X}_k$ , una medida de asociación lineal, puede efectuarse mediante la covarianza definida como  $\sigma_{ik} = E(\mathbf{X}_i - \mu_i)(\mathbf{X}_k - \mu_k)$ .

Las medias y covarianzas de  $n \times 1$  de un vector aleatorio  $\mathbf{X}$  pueden expresarse en términos matriciales. El valor esperado de cada elemento es contenido en el vector de medias  $\mu = E(\mathbf{X})$ , las  $n$  varianzas  $\sigma_i^2$  y las  $n(n - 1)/2$  distintas covarianzas están contenidas en una matriz simétrica dada por

$$\Sigma = E(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)' = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

### 4.2.2. Método II: Condicional. Modelo Exponencial Ponderado de Medias Móviles (EWMA)

Un modelo para la obtención de la matriz de covarianzas es conocido como Exponencial ponderado de medias móviles (EWMA por sus sigla en inglés), el cual provee matrices definidas positivas. Sea  $\hat{\mathbf{a}}_t$  los residuales al tiempo  $t$ . El modelo EWMA puede ser expresado de la siguiente manera.

$$\hat{\Sigma}_t = \lambda \hat{\Sigma}_{t-1} + (1 - \lambda) \hat{\mathbf{a}}_{t-1} \hat{\mathbf{a}}_{t-1}' \quad (4.8)$$

donde  $0 < \lambda < 1$  denota la razón del decaimiento. Si se comienza con una matriz definida positiva  $\hat{\Sigma}_0$ , entonces la matriz de covarianzas  $\hat{\Sigma}_t$  es definida positiva para todo  $t$ . Una elección de  $\hat{\Sigma}_0$  es la matriz de covarianzas de  $\hat{\mathbf{a}}_t$ . Una estimación adecuada de  $\hat{\lambda} \approx 0.96$  para serie de rendimientos. Este modelo es extremadamente parsimonioso y además la matriz de covarianzas es fácil de obtener, pero tiende a ser rechazado en el diagnóstico, la razón, es debido a que solo se emplea un parámetro,  $\lambda$ , el cual difícilmente se adecuará al comportamiento de todas las series. (Tsay, 2013).

### 4.2.3. Método III: Condicional. Modelo de Correlación Condicional Dinámica (DCC)

El modelo de correlación dinámica condicional (DCC) considera la variable  $\mathbf{e}_t$   $k$ -dimensional de la serie de rendimientos  $z_t$ . Sea  $\Sigma_t = [\sigma_{ij,t}]$  la matriz de volatilidades de  $\mathbf{e}_t$  dado  $F_{t-1}$  que denota la información disponible al tiempo  $t - 1$ . Entonces la matriz de correlaciones condicionales es

$$\rho_t = D_t^{-1} \Sigma_t D_t^{-1} \quad (4.9)$$

donde  $D_t^{-1} = \text{diag}(\sigma_{11,t}^{1/2}, \dots, \sigma_{kk,t}^{1/2})$  corresponde a la matriz diagonal de  $k$  volatilidades al tiempo  $t$ . Este método tiene la ventaja de que las matrices de correlaciones son más fáciles de obtener que las matrices de covarianzas. El primer paso para obtener la correlaciones consiste en obtener la serie de volatilidades  $\sigma_{ii,t}$  para  $i = 1, \dots, k$  y en segunda modelar la dependencia dinámica de la matriz de correlaciones  $\rho_t$  (Tsay, 2013).

De 4.9 puede verse que la matriz de covarianza condicional viene dada por  $\Sigma_t = D_t \rho_t D_t$ .

Sea  $\eta_t = (\eta_{1t}, \dots, \eta_{kt})'$  el vector de innovaciones marginales estandarizadas, donde  $\eta_{it} = \mathbf{a}_{it} / \sqrt{\sigma_{ii,t}}$ . Entonces,  $\rho_t$  representa la matriz de volatilidades de  $\eta_t$ . Dos, son los modelos que han sido propuestos para modelar la matriz  $\rho_t$ . El primer tipo corresponde al de Engle (2002), el cual se define como

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) \bar{\mathbf{Q}} + \theta_1 \mathbf{Q}_{t-1} + \theta_2 \eta_{t-1} \eta_{t-1}' \quad (4.10)$$

$$\rho_t = \mathbf{J}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{J}_t \quad (4.11)$$

donde  $\bar{\mathbf{Q}}_t$  es la matriz de covarianzas incondicional de  $\theta_t$ ,  $\theta_i$  es un número real no negativo que satisface  $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$  y  $\mathbf{J}_t = \text{diag}(q_{11,t}^{-1/2}, \dots, q_{kk,t}^{-1/2})$ , donde  $q_{ii,t}$  denota el  $(i,i)$  ésimo elemento de  $\mathbf{Q}_t$ .

El segundo tipo de modelo corresponde al de Tse and Tsui (2002) el cual puede ser escrito como

$$\rho_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) \bar{\rho} + \theta_1 \rho_{t-1} + \theta_2 \Phi_{t-1} \quad (4.12)$$

### 4.3. Efectos de la diversificación

---

donde  $\bar{\rho}$  es la matriz de correlación incondicional de  $\eta_t$ ,  $\theta_i$  son números reales no negativos que satisfacen  $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$  y  $\Phi_{t-1}$  es la matriz de correlaciones de  $\hat{\eta}_{t-1}, \dots, \hat{\eta}_{t-m}$  para un valor positivo  $m$ .

El modelo de correlación dinámica condicional utiliza sólo dos parámetros ( $\theta_1$  y  $\theta_2$ ), los cuales determinan la evolución de la correlación condicional independiente del número de  $k$  activos. Ello trae consigo ciertas ventajas y desventajas. Una de las mayores ventajas es que es fácil su estimación. Una de las principales desventajas es justificar que todas las correlaciones evolucionan de la misma manera independientemente del número de activos considerados en el modelo, además de que en la práctica generalmente el modelo es rechazado por el diagnóstico de los residuales, debido a al ajustar un modelo GARCH(1,1) a todas las series, se asume que todas se comportan de la misma forma, lo cual es difícil de sostener y ver en la práctica.

Tsay (2013) describe el procedimiento comúnmente usado para construir un modelo de correlación dinámica condicional, el cual se enuncia a continuación:

1. Usar un modelo VAR(p), de ser necesario, para obtener estimaciones de la media condicional  $\hat{\mu}$  para la serie de rendimientos  $z_t$  y sea  $\hat{\mathbf{e}}_t = z_t - \hat{\mu}$  los residuales de las series.
2. Aplicar un modelo univariado, por ejemplo, un modelo GARCH para cada componente de la serie  $\hat{e}_{it}$ .
3. Estandarizar las innovaciones vía  $\hat{\eta}_{it} = \hat{\mathbf{e}}_{it} / \sqrt{\hat{\sigma}_{ii,t}}$  y ajustar el modelo de correlación dinámica condicional a  $\hat{\eta}_t$ .

### 4.3. Efectos de la diversificación

Prigent (2007) explica esta idea. Considérese el caso de activos independientes, lo cual quiere decir que  $\Sigma$  es una matriz diagonal, entonces  $\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}$  puede expresarse como

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 \quad (4.13)$$

Ahora, si se considera la misma ponderación para cada activo, es decir  $w_i = 1/n$  se

### 4.3. Efectos de la diversificación

---

tiene que

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_i^2 \quad (4.14)$$

tomando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p^2$ , es claro que  $\sigma_p^2 \rightarrow 0$ . Se puede notar que diversificar permite reducir la varianza del portafolio. Si se considera la desviación estándar como medida del riesgo, notamos que entre mayor la diversificación menor será el riesgo.

Para ilustrar el impacto de la diversificación, considérese el siguiente caso: sea  $S_1$  y  $S_2$  dos activos financieros. Y sean  $r_1$  y  $r_2$  sus rendimientos, respectivamente. Su covarianza es denotada por:

$$\sigma_{12} = Cov(r_1, r_2) = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \quad (4.15)$$

donde  $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$  es el coeficiente de correlación entre los dos activos  $S_1$  y  $S_2$ . Considere un portafolio P con un porcentaje de peso  $w$  invertido en el activo  $S_1$  y  $(1-w)S_2$  invertido en  $S_2$ . Su rendimiento esperado  $\mu_p$  y varianza es tal que:

$$\mu_p = w\mu_1 + (1-w)\mu_2 \quad (4.16)$$

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \quad (4.17)$$

Note que:

1. si  $\rho_{12} = 1$  la desviación estándar y la varianza del portafolio, son combinaciones lineales de los dos activos. Adicionalmente, si  $0 \leq w \leq 1$ , ningún portafolio tiene menor desviación estándar que el valor mínimo,  $\min(\sigma_1, \sigma_2)$ .
2. si  $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$  la varianza mínima se encuentra resolviendo la siguiente ecuación:

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \quad (4.18)$$

y su varianza satisface:

#### 4.4. Portafolio óptimo

---

$$\sigma_p^2 = \frac{1 - \rho_{12}^2 \sigma_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} \quad (4.19)$$

Si el activo  $S_1$  es menos riesgoso que  $S_2$  ( $\sigma_1 < \sigma_2$ ). Entonces:

$$\sigma_p^2 - \sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2 (\sigma_1 - \rho_{12} \sigma_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} \quad (4.20)$$

- Si  $\rho_{12} \neq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ , puede notarse que la diferencia  $\sigma_p^2 - \sigma_1^2$  es siempre negativa, cualquiera que sea el valor del coeficiente de correlación. Por consiguiente, la desviación estándar mínima es menor que  $\sigma_1$ .
- Si  $\rho_{12} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ , entonces  $\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} > 0$  y  $w > 0$ : el porcentaje invertido en el activo menos riesgoso es no negativo.
- Si  $\rho_{12} > \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  entonces  $\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} < 0$  y  $w < 0$ : esto representa la posición corta en el activo de menor riesgo.
- Si  $\rho_{12} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  la desviación estándar mínima es igual a  $\sigma_1$ . En este caso, no hay efecto de diversificación.
- Si  $\rho_{12} = -1$ , podría encontrarse un portafolio sin riesgo:  $w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2}$ .

La diversificación permite la reducción del riesgo mientras el coeficiente de correlación entre los dos activos sea menor que 1, excepto cuando  $\rho_{12} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ .

#### 4.4. Portafolio óptimo

El problema de optimización a veces requiere encontrar valores extremos de una función sujeta a varias restricciones. Un método para resolver tal problema es usar multiplicadores de Lagrange. [Stefanica \(2008\)](#) explica el procedimiento para llegar a un óptimo mediante multiplicadores de Lagrange, el cual se enunciará a continuación.

## 4.4. Portafolio óptimo

---

### 4.4.1. Multiplicadores de Lagrange

El método de Lagrange es utilizado para optimizar una función bajo un cierto número de restricciones de igualdad, es decir

$$\begin{aligned} &\text{maximizar/minimizar} && f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\text{sujeto a} && g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ &&& g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ &&& \vdots \\ &&& g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Para resolver este problema de optimización con restricciones, considérese la función

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t g(x) \tag{4.22}$$

La cual es llamada la función de Lagrange, donde  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  es denominado el vector de multiplicadores de Lagrange, con  $x = (x_1, \dots, x_n)'$  y  $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$ .  $F(x, \lambda)$  puede ser escrita como:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \tag{4.23}$$

Donde las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i(x) \tag{4.25}$$

El gradiente de  $F(x, \lambda)$  con respecto a  $x$  y  $\lambda$  será denotado por  $\nabla_{x, \lambda} F(x, \lambda)$ , el cual es el siguiente vector fila:

$$\nabla_{x, \lambda} F(x, \lambda) = (\nabla_x F(x, \lambda), \nabla_\lambda F(x, \lambda)) \tag{4.26}$$

#### 4.4. Portafolio óptimo

---

Dado que el gradiente de  $F(x, \lambda)$  con respecto a  $x$  y a  $\lambda$  corresponde a las derivadas parciales con respecto a  $x$  y a  $\lambda$ , respectivamente, entonces de 4.24 y 4.25 se tiene que

$$\nabla_x F(x, \lambda) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, \lambda), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, \lambda) \right) = \nabla f(x) + (\nabla g(x))^t \lambda \quad (4.27)$$

$$\nabla_\lambda F(x, \lambda) = \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(x, \lambda), \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_n}(x, \lambda) \right) = g(x) \quad (4.28)$$

donde

$$\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, \lambda), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x, \lambda) \right] \quad (4.29)$$

y

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

De 4.26 a 4.30 se concluye que

$$\nabla_{x, \lambda} F(x, y) = (\nabla f(x) + (\nabla g(x))^t, \lambda g(x)) \quad (4.31)$$

En el método de multiplicadores de Lagrange los puntos extremos de las restricciones  $x_0$  es encontrado identificando los puntos críticos de Lagrange  $F(x, \lambda)$ .

#### Condición suficiente para un máximo o mínimo

La condición suficiente para determinar si un punto crítico  $(x_0, \lambda_0)$ , para la función de Lagrange, corresponde a un punto extremo  $x_0$  es complicado y rara vez corroborado en la práctica.



#### 4.4. Portafolio óptimo

Para determinar si el punto extremo es un máximo o un mínimo, considérese la función 4.23. Sea  $D^2F_0(x_0)$  la matriz Hessiana de  $F_0(x)$  evaluando en el punto  $x_0$

$$D^2F_0(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

y sea  $q(v)$  la forma cuadrática asociada a la matriz  $D^2F_0(x_0)$

$$q(v) = v^t D^2F_0(x_0) v \quad (4.33)$$

Entonces si la forma cuadrática correspondiente al punto  $(x_0, \lambda_0)$  es definida positiva, entonces,  $x_0$  es un mínimo para  $f(x)$  con respecto a la restricción  $g(x) = 0$ . Por el contrario, si la forma cuadrática no es definida positiva, entonces,  $x_0$  es un máximo para  $f(x)$  con respecto a la restricción  $g(x) = 0$ .

#### Portafolio de mínima varianza

Una pregunta natural es cómo seleccionar un portafolio eficiente, es decir, cómo determinar los pesos  $w_i$ ,  $i = 1 : n$  para obtener un portafolio de mínima varianza dado un rendimiento objetivo u obtener un portafolio de mayor rendimiento dada una varianza objetivo, en cualquier caso el problema puede resolverse mediante multiplicadores de Lagrange. Para el caso en donde se busca obtener el portafolio de mínima varianza el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{sujeto a} \quad &w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \end{aligned} \quad (4.34)$$

La función de Lagrange es

$$F(w, \lambda) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \quad (4.35)$$

#### 4.4. Portafolio óptimo

---

es decir

$$F(w, \lambda) = w_1^2 \sigma_1^2 + \dots + w_n^2 \sigma_n^2 + 2(w_1 w_2 \sigma_{12} + \dots + w_{n-1} w_n \sigma_{n-1,n}) + \lambda(w_1 + \dots + w_n - 1)$$

derivando parcialmente con respecto a  $w_1, w_2, \dots$ , y  $\lambda$ , se llega a la siguiente expresión en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_2^2 & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{1n} & 2\sigma_{2n} & \dots & 2\sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma & \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde  $\Sigma$  corresponde a la matriz de varianzas y covarianzas,  $\mathbf{e}^T$  la transpuesta de vector de unos de dimensión  $m \times 1$ ,  $\mathbf{0}$  el vector de ceros de dimensión  $m \times 1$  y  $\mathbf{w}$  el vector de pesos, lo cual equivale al sistema

$$2\Sigma \mathbf{w} + \mathbf{e}\lambda = 0 \tag{4.36}$$

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1 \tag{4.37}$$

de [4.36](#)

$$\begin{aligned} 2\Sigma \mathbf{w} &= -\mathbf{e}\lambda \\ \mathbf{w} &= -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\mathbf{e}\lambda \end{aligned}$$

## 4.4. Portafolio óptimo

---

sustituyendo el valor de  $\mathbf{w}$  en 4.37

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \left( -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{e} \lambda \right) &= 1 \\ \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e} \lambda &= -2 \\ \lambda &= -\frac{2}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $\lambda$  en 4.36

$$\begin{aligned} 2\Sigma \mathbf{w} + \mathbf{e} \left( -\frac{2}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}} \right) &= 0 \\ 2\Sigma \mathbf{w} &= 2 \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\mathbf{w} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}} \quad (4.38)$$

Por lo que  $\mathbf{w}$  representa los pesos del portafolio de varianza eficiente o mínima varianza, (Härdle and Simar, 2007).

### 4.4.2. Programación Cuadrática

Debe tenerse en consideración que el método utilizado para hallar los pesos óptimos puede dar resultados con valores negativos. Obtener pesos negativos significa que un operador puede pedir prestado un título cuando cree que va a bajar el mercado y venderlo, el objeto es comprarlo después a un precio más bajo y en consecuencia obtener una ganancia. Las opciones para evitar la cuestión anterior son:

1. Ponderar los resultados obtenidos, mediante multiplicadores de Lagrange, para evitar pesos negativos.
2. Utilizar un método con restricciones de desigualdad.

## 4.5. Frontera eficiente

---

Para el segundo punto, el problema se plantearía del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{sujeto a} \quad & w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \\ & w_1, w_2, \dots, w_n \geq 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

El cual corresponde a un problema optimización no lineal, que puede resolverse mediante programación cuadrática, es decir:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A} \geq \lambda \\ & \mathbf{w}^T \mathbf{e} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Donde  $\Sigma$  corresponde a la matriz semidefinida positiva,  $\mathbf{A}$  la matriz de constantes bajo las cuales se minimizará la función cuadrática,  $\mathbf{w}$  corresponde al vector de pesos que minimizan dicha función y  $\mathbf{e}$  el vector unitario tal que indica que  $\mathbf{w}^T \mathbf{e}$  indica que las ponderaciones deben sumar uno. El óptimo debe satisfacer las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), el cual es una generalización del método multiplicadores de Lagrange para restricciones de desigualdad, para mayor referencia sobre el método, puede consultarse el capítulo sobre programación cuadrática de [Sun and Yuan \(2006\)](#).

## 4.5. Frontera eficiente

De acuerdo al criterio de Markowitz un portafolio podría considerarse eficiente si:

1. Dado un nivel de rendimiento esperado el riesgo es mínimo.
2. Dado un nivel de riesgo el rendimiento esperado es máximo.

En otras palabras un portafolio eficiente es definido como uno que tiene mínima varianza entre todos los portafolios con el mismo rendimiento esperado. Formalmente



## 4.5. Frontera eficiente

---

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_2^2 & \dots & 2\sigma_{2n} & \mu_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{1n} & 2\sigma_{2n} & \dots & 2\sigma_n^2 & \mu_n & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Se asume que la matriz correspondiente al sistema lineal es no singular.

En forma matricial equivale a resolver

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma & \mu & e \\ \mu^T & 0 & 0 \\ e^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mu_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Sea

$$Az = b$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2\Sigma & \mu & e \\ \mu^T & 0 & 0 \\ e^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mu_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es

$$\mathbf{z} = A^{-1}b \quad (4.44)$$

Las ponderaciones que minimizan la varianza dado un rendimiento objetivo son los  $n$  primeros valores del vector  $\mathbf{z}$ . La frontera eficiente resulta de dar valores para  $\mu_0$  y graficar el riesgo y rendimiento correspondiente, tal como se muestra en la Figura 4.6.

## 4.6. Evaluación

---

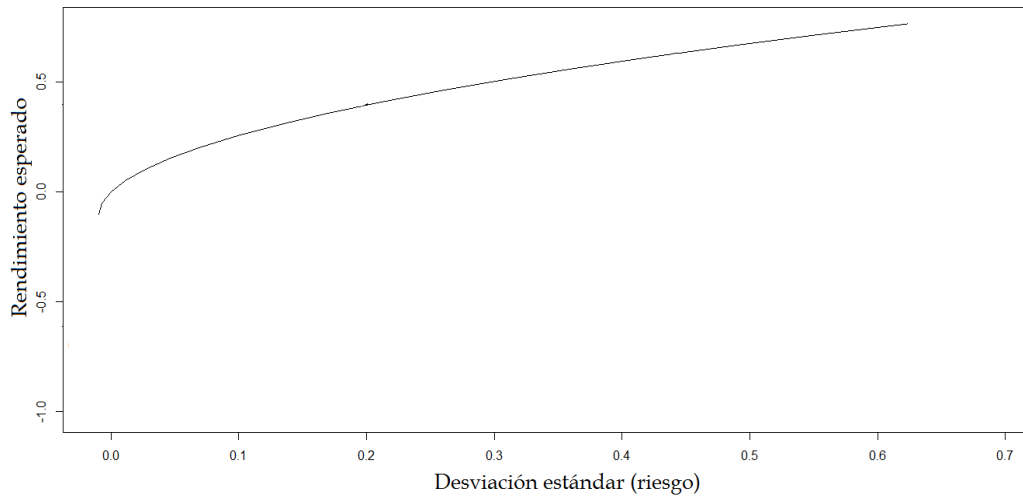


Figura 4.6: Frontera eficiente

## 4.6. Evaluación

Una vez que se ha construido el portafolio es necesario evaluar su comportamiento. El rendimiento por sí mismo no es un criterio suficiente para evaluar su comportamiento, por lo que es necesario asociar una medida del riesgo tomado. En la actualidad existen muchas medidas o índices que permiten evaluar el comportamiento de un portafolio, algunos de los cuales se describirán en las siguientes líneas.

### 4.6.1. Coeficiente Beta

Para calcular este coeficiente se requiere un índice de referencia,  $r_m$  denominado rendimiento de mercado (por ejemplo el IPC) y el rendimiento de una acción o de un portafolio y se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\beta = \frac{cov(r_p, r_m)}{var(r_m)} \quad (4.45)$$

El coeficiente  $\beta$  es uno de los indicadores más populares de riesgo en el mercado de valores, el cual indica el aumento del rendimiento del portafolio  $r_p$  por cada unidad de aumento del rendimiento de mercado  $r_m$ , es decir que mientras más alto sea el beta,

## 4.6. Evaluación

---

más alto será el riesgo de la inversión, pero al mismo tiempo existirá un potencial más alto de obtener mayores ganancias.

### 4.6.2. Índice de Sharpe

Tal vez el índice más simple para medir el comportamiento de un portafolio es el de Sharpe (1966). El índice de Sharpe para un portafolio  $p$  es definido como

$$SR_p = \frac{E(r_p) - E(r_f)}{\sigma_p} \quad (4.46)$$

donde  $r_p$  es el rendimiento del portafolio,  $r_f$  la tasa libre de riesgo, y  $\sigma_p$  la desviación estándar del portafolio. La tasa libre de riesgo se refiere a una alternativa de inversión que ofrece un rendimiento seguro en un plazo determinado, como por ejemplo los CETES (Certificados de la Tesorería).

El índice de Sharpe mide el grado en el que un portafolio es capaz de mantener un exceso de rendimiento por unidad de riesgo, en otras palabras, entre mayor es el valor del índice mejor es la rentabilidad del portafolio.

Si el portafolio está bien diversificado, la razón de Sharpe es cercana al rendimiento de mercado. (Prigent, 2007)

### 4.6.3. Índice de Treynor

El índice de Treynor (1965) es definido como

$$T = \frac{E(r_p) - E(r_f)}{\beta_p} \quad (4.47)$$

donde  $r_p$  denota el rendimiento del portafolio,  $r_f$  el rendimiento libre de riesgo y  $\beta_p$  denota la beta del portafolio.

Este indicador mide la relación entre el rendimiento del portafolio sobre el rendimiento libre de riesgo. Por lo que entre mayor sea el índice mejor será el rendimiento en comparación con el rendimiento de mercado. El índice o razón de Treynor es



## 4.6. Evaluación

---

particularmente apropiado para apreciar el comportamiento de un portafolio bien diversificado, ([Amenc and Le Sourd, 2005](#)).

# Capítulo 5

## Resultados

Para el análisis se consideró el precio de cierre de 15 empresas, de las 35 que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, a partir de los cuales se obtuvo los rendimientos, que cumplieron con el total de datos disponibles del periodo en cuestión, del 03 de enero de 2006 al 31 de diciembre de 2012, para la conformación de los portafolios: Media-Varianza, Exponencial Ponderado de Medias Móviles y del modelo de Correlación Condicional Dinámica. El periodo de evaluación, de cada uno de los partafolio, se consideró del 02 de enero de 2013 al 31 de junio de 2015.

Para el análisis se utilizó el paquete estadístico R. Las funciones utilizadas, concenientes al portafolio de inversión, se encuentran en el anexo. Para los modelos de volatilidad empleados se utilizaron paquetes, definidos en el R. Por lo que, en el caso de la utilización de un paquete de R, se hará mención, únicamente, a la función y a la librería que pertenece.

Los datos de la Tabla 5.1 muestra algunos datos estadísticos, en los cuales se puede apreciar que GCARSOA1 posee el mayor rendimiento promedio, de 0.001122, seguido de AC con 0.001058, mientras que CEMEXCPO posee el menor rendimiento promedio, de  $-0.0004025$ . En cuanto a la varianza, CEMEXCPO posee la mayor varianza, de 0.001079 mientras AC posee la menor, con 0.0001698. Así mismo, puede notarse que la curtosis es mayor a 3 para todas las acciones, lo cual indica que no es conveniente asumir una distribución normal a los rendimientos. De todo esto, se puede deducir que la mejor acción para invertir es AC, ya que proporciona uno de los más altos rendimiento con el menor riesgo, y en contra parte, en la que no se debería

## 5. Resultados

invertir es CEMEXCPO, ya que proporciona el menor rendimiento con un mayor riesgo. La solución analítica de donde y cuanto invertir lo proporcionará el modelo de optimización, el cual se describirá para los tres casos descritos al inicio.

activo	media	sd	varianza	max	min	curtosis
AC	0.001058	0.013034	0.000169	0.116841	-0.058161	6.761377
ALFAA	0.000918	0.023184	0.000537	0.228145	-0.155482	10.69795
ALSEA	0.000833	0.023511	0.000552	0.216913	-0.141706	8.504532
AMXL	0.000404	0.019774	0.000391	0.126137	-0.137409	5.989560
BIMBOA	0.000750	0.018992	0.000360	0.130416	-0.101975	3.709384
CEMEXCPO	-0.000402	0.032862	0.001079	0.238076	-0.210099	7.531506
FEMSAUBD	0.000978	0.019517	0.000380	0.125756	-0.140300	6.564792
GCARSOA1	0.001122	0.024143	0.000582	0.219455	-0.119896	6.007263
GFINBURO	0.000893	0.021565	0.000465	0.214833	-0.078471	6.931649
GFNORTEO	0.000772	0.028287	0.000800	0.270222	-0.242443	11.68022
ICA	0.000279	0.027506	0.000756	0.295662	-0.276924	20.40385
ICHB	0.000819	0.020905	0.000437	0.128591	-0.162201	4.360462
KIMBERA	0.000776	0.017682	0.000312	0.140699	-0.113269	4.770184
TELEVISACPO	0.000299	0.018510	0.000342	0.150161	-0.081359	5.232270
WALMEX	0.000637	0.019082	0.000364	0.131893	-0.127907	4.665273

**Tabla 5.1:** Resumen exploratorio

### Portafolio I: Modelo Media-Varianza (M-V)

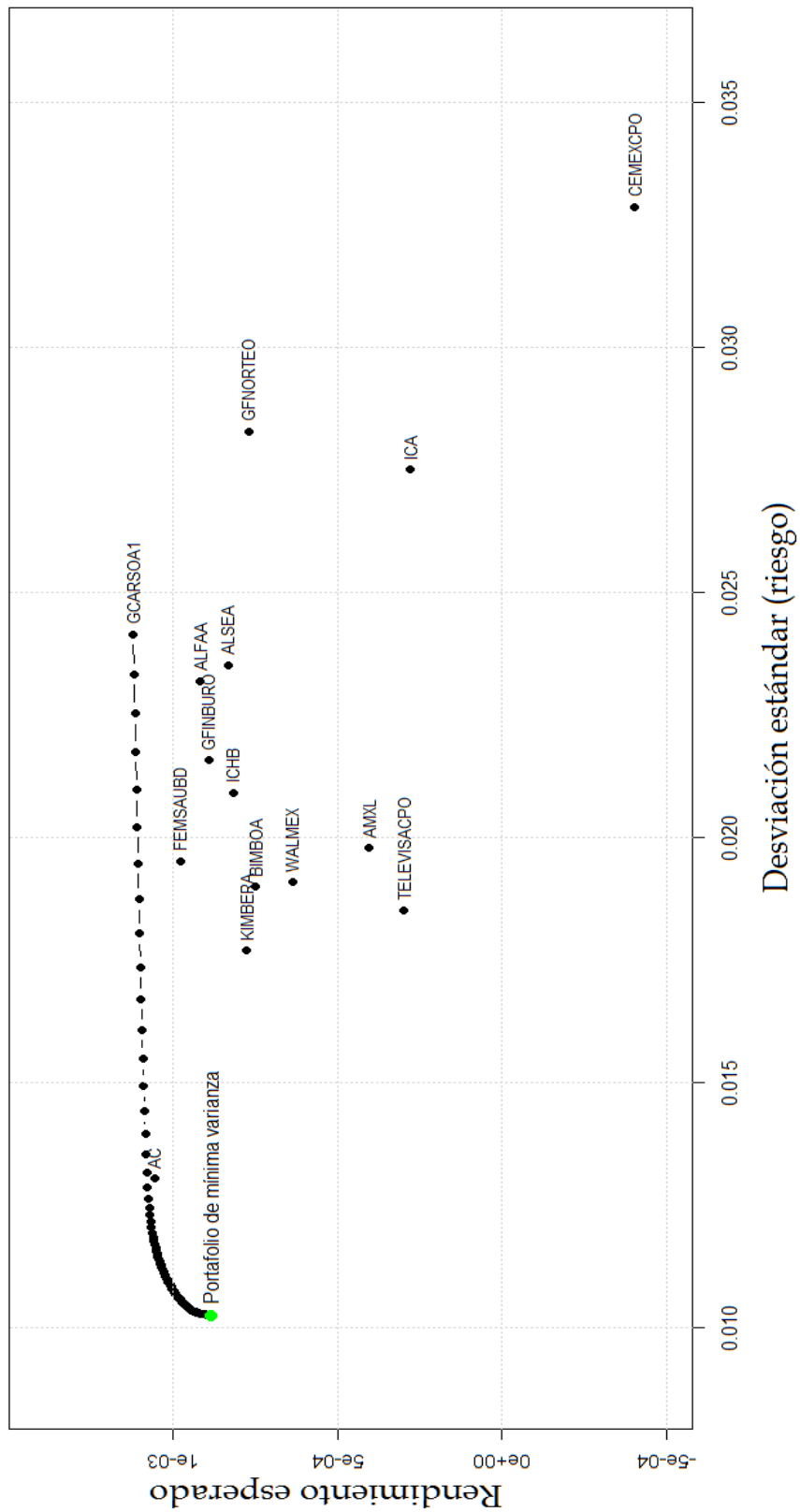
Para la construcción del portafolio por el criterio de Media-Varianza se utilizó la matriz de covarianzas y el vector de medias de los rendimientos, al 31 de diciembre de 2012. Se optó por emplear el optimizador cuadrático **solve.QP** de la librería "quadprog", debido a que se obtuvieron ponderaciones negativas con el método de multiplicadores de Lagrange. Los resultados del punto óptimo obtenidos fueron:

$$\text{rendimiento esperado del portafolio} = 0.0008839$$

$$\text{desviación estándar del portafolio} = 0.0102515$$

La Figura 5.1 ilustra la frontera eficiente, la distribución riesgo rendimiento y el punto óptimo del portafolio. Puede notarse que el punto mínimo ofrece un riesgo mucho menor que cualquier otra acción. Los pesos se muestran en la Tabla 5.3, en la cual puede apreciarse que el 47.21% se consideró para invertir en AC y 0% para CEMEXCPO tal como se había deducido en el análisis exploratorio.

## 5. Resultados



**Figura 5.1:** Frontera eficiente mediante el criterio media varianza

## 5. Resultados

---

### Modelo EWMA

Para la construcción del portafolio mediante el modelo multivariado EWMA, se verificó la necesidad de ajustar un modelo autorregresivo a las series, para ello se obtuvieron algunos criterios comúnmente usados, como el AIC, el BIC y el p-valor, de la prueba M. Los resultados, hasta el orden 10 se muestran en la Tabla 5.2. El AIC sugiere un modelo VAR(1), el BIC un modelo VAR(0) y el p-valor un modelo VAR(0).

p	AIC	BIC	p-value
0	-120.3351	-120.3351	0.0000
1	-120.4364	-119.7361	0.0000
2	-120.4093	-119.0086	0.0000
3	-120.4037	-118.3027	0.0000
4	-120.3534	-117.5520	0.0000
5	-120.2850	-116.7833	0.0001
6	-120.2400	-116.0380	0.0000
7	-120.1998	-115.2974	0.0000
8	-120.1611	-114.5584	0.0000
9	-120.0847	-113.7817	0.0026
10	-120.0284	-113.0251	0.0000

**Tabla 5.2:** Selección del orden de un modelo VAR

Al considerar un modelo VAR(1), y realizar la prueba sobre la significancia de los coeficientes se obtuvo un p-valor de 0.56, por lo que se no se rechazó  $H_0$  y en consecuencia los coeficientes no se consideraron significativos, entonces, se procedió a obtener las estimaciones de la matriz de varianzas y covarianzas condicional al 31 de diciembre de 2012. La estimación se realizó, tomando en cuenta una lambda de 0.96, mediante la función EWMAvol de la librería MTS. La Figura 5.2 muestra la frontera eficiente la distribución riesgo rendimiento de las acciones y el punto óptimo obtenido. Los resultados de los pesos empleando este modelo se muestran en la Tabla 5.3, en donde puede notarse que la mayor ponderación corresponde a AMXL, con 0.3108 mientras que al igual que el caso anterior a CEMEXCPO no se dio ponderación alguna. Entonces, este portafolio ofrecería un rendimiento 29.22% menor al de Media-Varianza, pero a la vez se obtiene una reducción del riesgo del 47.78%. Los resultados obtenidos fueron los siguientes

$$\begin{aligned}\text{rendimiento esperado del portafolio} &= 0.0006256 \\ \text{desviación estándar del portafolio} &= 0.005352557\end{aligned}$$

## 5. Resultados

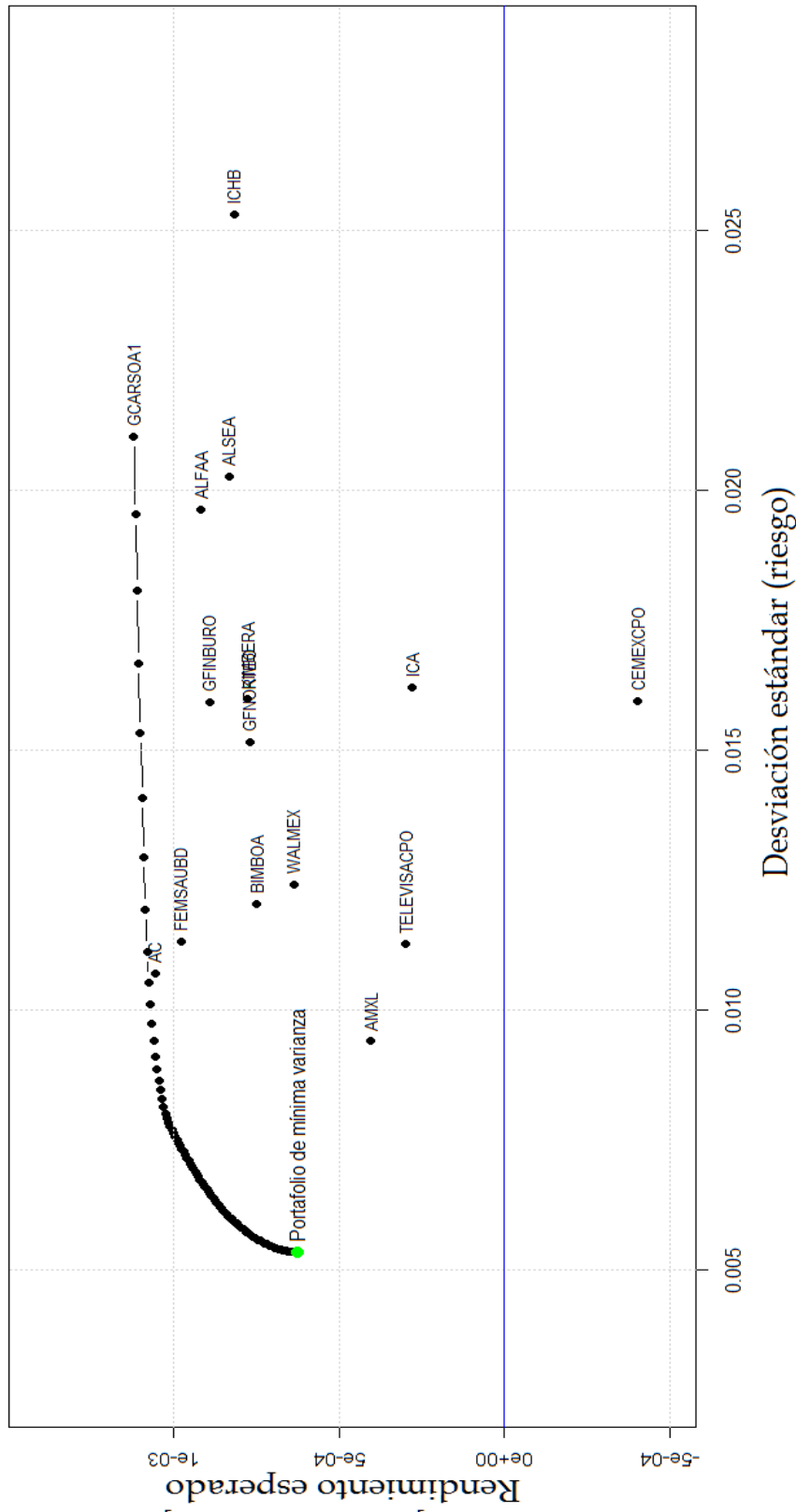


Figura 5.2: Frontera eficiente mediante el modelo EWMA

## 5. Resultados

### Portafolio III: Modelo DCC

Al no presentar correlación las series de rendimientos, dado que no fue significativo el VAR(1), se ajustó un modelo GARCH(1,1) a todas las series, mediante la función dccPre, de la librería MTS para obtener los residuales estandarizados a los cuales se aplicó el modelo DCC mediante la función dccFit, también de la librería MTS. Al obtener la matriz de covarianzas condicional y evaluar el portafolio, se obtuvieron los datos mostrados en la Tabla 5.3, donde puede apreciarse que el mayor peso asignado fue a AC, con 30.11 % y a CEMEXCPO no se asignó peso alguno, por lo que coincide en este último con los dos casos anteriores. En la Figura 5.3 se muestra la frontera eficiente, la distribución riesgo rendimiento así como el portafolio óptimo.

En comparación con el portafolio de Media-Varianza, si se elige este portafolio y se acepta un rendimiento 17.25 % inferior al de Media-Varianza, entonces, se obtendría un riesgo de 25.45 % inferior. El portafolio óptimo es

$$\begin{aligned}\text{rendimiento esperado del portafolio} &= 0.000731391 \\ \text{desviación estándar del portafolio} &= 0.007641603\end{aligned}$$

Acción	M-V	EWMA	DCC
AC	0.472145	0.104448	0.301187
ALFAA	0	0	0
ALSEA	0.031411	0.004426	0.007163
AMXL	0.010023	0.310809	0.256517
BIMBOA	0.051907	0.069222	0.093175
CEMEXCPO	0	0	0
FEMSAUBD	0.045256	0.082123	0.072682
GCARSOA1	0	0.045357	0
GFINBURO	0.07731	0.054168	0.05462
GFNORTEO	0	0.007805	0
ICA	0	0	0
ICHB	0.027812	0	0
KIMBERA	0.133798	0	0.064673
TELEVISACPO	0.061938	0.168758	0.097353
WALMEX	0.088399	0.152885	0.052631
rend. esp. port.	0.000883955	0.000625655	0.000731391
sd. port(riesgo)	0.01025154	0.005352557	0.007641603

**Tabla 5.3:** Pesos óptimos

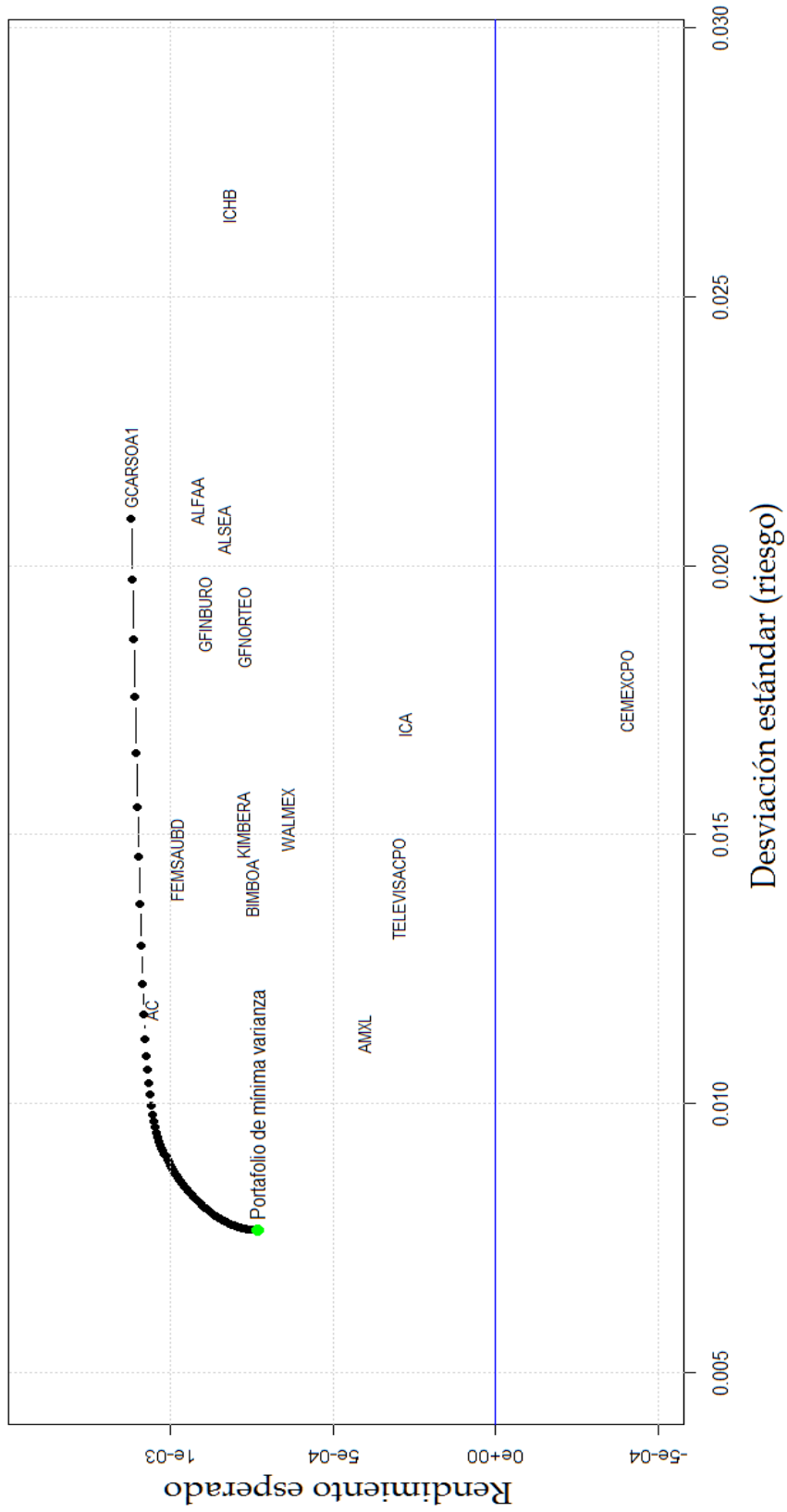


Figura 5.3: Frontera eficiente mediante el modelo de DCC



## 5. Resultados

---

### EVALUACIÓN

#### Modelo Media-Varianza(M-V)

El periodo de evaluación del portafolio se muestra en la Figura 5.4, en la cual se puede notar que para el 28 de febrero de 2014 el rendimiento mínimo acumulado registrado fue de  $-0.20$ . El rendimiento acumulado obtenido, al final del periodo de evaluación, al 30 de junio de 2015, fue de  $0.05$



**Figura 5.4:** Rendimiento acumulado(Modelo Media-Varianza)

#### Modelo EWMA

La Figura 5.5 muestra el rendimiento acumulado al 30 de junio de 2015, el cual fue de  $0.1660$ . El rendimiento mínimo acumulado se registró el 21 de junio de 2015 con un valor de  $-0.13$ , y a partir del 24 de febrero de 2014 puede apreciarse una tendencia creciente del rendimiento acumulado.



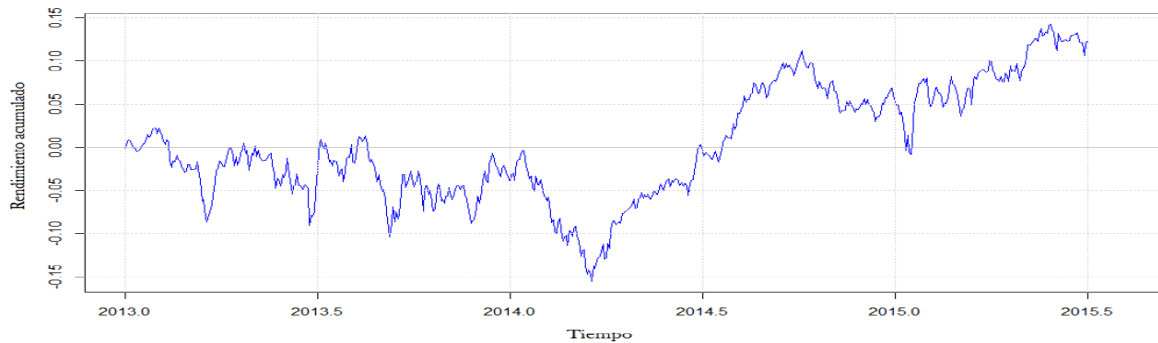
**Figura 5.5:** Rendimiento acumulado (modelo EWMA)

## 5. Resultados

---

### Modelo DCC

Para el caso del portafolio mediante el modelo DCC, el rendimiento acumulado al 30 de junio de 2015 fue de 0.12. El rendimiento mínimo se registró el 28 de febrero de 2014 con un rendimiento acumulado de  $-0.1559$ . Al igual que el caso anterior, puede notarse que a partir de entonces la tendencia de los rendimientos acumulados es creciente, Figura 5.6.



**Figura 5.6:** Rendimiento acumulado (modelo DCC)

En la Tabla 5.4, la cual muestra el periodo de evaluación para el 2013, la cual indica que el descenso del rendimiento del portafolio fue debido a la baja del precio de AC, la cual obtuvo un rendimiento negativo durante el 2013, de  $-0.0005957$ , seguida de WALMEX con  $-0.0007126$  y GFINBURO con  $-0.0001249$ . Las betas indican que ninguna acción varía más rápido que el Índice de mercado, ya que son menores a 1.

Para el 2014, en la gráfica 5.7 puede apreciarse que el modelo que utiliza EWMA y DDC muestran rendimientos positivos, mientras que el de Media-Varianza un rendimiento negativo. Lo anterior debido a la baja en el precio de AC, que llegó a  $0.000053$  y al rendimiento promedio negativo de KIMBERA, de  $-0.000408$ .

Para el primer semestre del 2015 puede apreciarse en la Figura 5.7 un ligero descenso en los tres portafolios. En la Tabla 5.4 puede apreciarse el descenso de AC, rendimiento promedio de  $-0.00021$ , la cual es la causa de los cambios de tendencia en los portafolios, ya que las proporciones óptimas fueron mayores, con relación a las demás.

## 5. Resultados

nombre	2013				2014				2015			
	M-V	EWMA	DCC	rend.prom	sd	beta	rend.prom	sd	beta	rend.prom	sd	beta
AC	0.4721	0.1044	0.3011	-0.00059573	0.0134132	0.366522	0.0005330	0.0119518	0.262039	-0.0002117	0.0106730	0.3509693
ALFAA	0	0	0	0.001020355	0.0209992	0.308658	-0.000421	0.0181201	0.249603	-0.0006374	0.0207821	0.2489216
ALSEA	0.0314	0.0044	0.0071	0.001672525	0.0199520	0.208402	-1.95E-06	0.0156350	0.243332	0.001323348	0.0144328	0.2326985
AMXL	0.0100	0.3108	0.2565	0.000146572	0.0170805	0.356692	0.0003591	0.0141280	0.323385	0.00017653	0.0126941	0.3876429
BIMBOA	0.0519	0.0692	0.0931	0.00074424	0.0196424	0.317244	4.924E-05	0.0154386	0.285370	-7.994E-06	0.0142798	0.3070205
CEMEXCPO	0	0	0	0.000736715	0.0171706	0.280933	7.757E-05	0.0134772	0.359411	-2.906E-05	0.0197388	0.2844558
FEMSAUBD	0.0452	0.0821	0.0726	4.19484E-05	0.0147727	0.408860	0.0001387	0.0121439	0.463911	0.00087382	0.0139147	0.4361598
GCARSOAI	0	0.0453	0	0.000400398	0.0192479	0.251574	0.0002198	0.0160323	0.257566	-0.0007830	0.0171550	0.2002038
GFINBURO	0.0773	0.0541	0.0546	-0.00012494	0.0217122	0.259256	0.0001657	0.0155995	0.265045	-0.0004509	0.0165819	0.3366915
GFNORTEO	0	0.0078	0	0.000251898	0.0193652	0.288999	-0.000449	0.0145185	0.301481	0.00053697	0.0147579	0.3706202
ICA	0	0	0	-0.00084749	0.0246292	0.192474	-0.001605	0.0197064	0.208987	-0.0033145	0.0250290	0.1054049
ICHB	0.0278	0	0	-0.00036937	0.0217794	0.216669	-0.000849	0.0170563	0.240186	-0.0014426	0.0172887	0.2025156
KIMBERA	0.1337	0	0.0646	0.000571451	0.0197300	0.258360	-0.000408	0.0162041	0.219012	0.00063314	0.0155318	0.2127366
TELEVISACPO	0.0619	0.1687	0.0973	0.00050297	0.0146949	0.358412	0.0009777	0.0139728	0.340008	0.00160124	0.0139272	0.2883396
WALMEX	0.0883	0.1528	0.0526	-0.00071265	0.0141269	0.436910	-0.000194	0.0132612	0.281308	0.00171828	0.0168231	0.2016599

Tabla 5.4: Evaluación 2013 a primer semestre 2015

## 5. Resultados

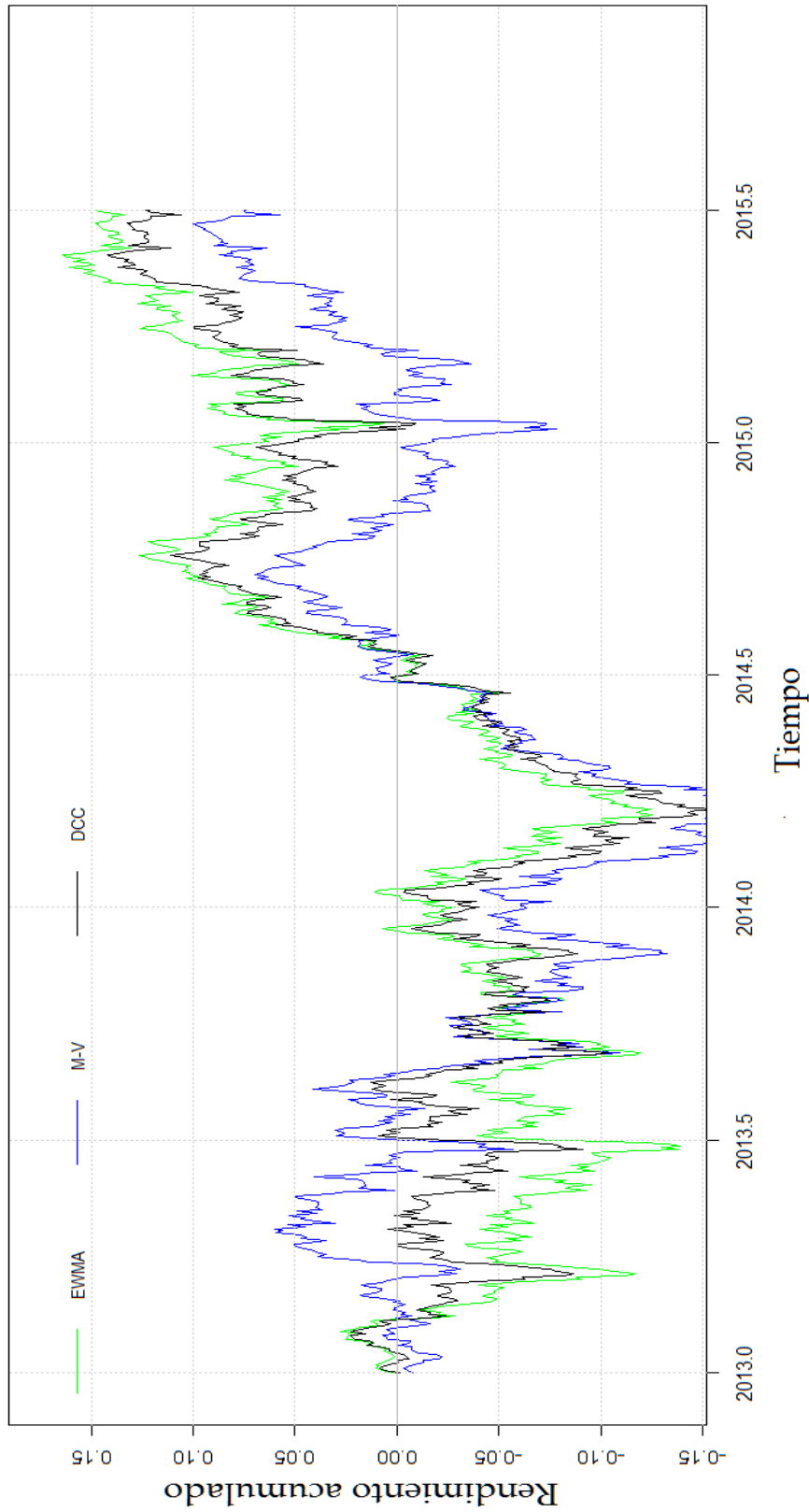


Figura 5.7: Comparación del rendimiento acumulado

# Capítulo 6

## Conclusiones

El portafolio que ofreció un rendimiento máximo fue el de M-V, de 0.0008839, seguido por el de DCC, con 0.00073139 y finalmente el EWMA, con 0.00062565, sin embargo, el que presentó el menor riesgo fue el EWMA, con 0.005352 seguido de el DCC 0.007641 y el de M-V, con 0.01025. Puede notarse que al emplear la matriz de varianzas condicional la reducción del riesgo es del 25.45 % para el caso de DCC y del 47.78 % para el caso del EWMA. Por lo que si se está dispuesto a sacrificar el rendimiento en un 17.25 %, se esperaría una reducción del riesgo de un 25.45 %, para el caso del DCC, y si se está dispuesto a sacrificar el rendimiento en un 29.22 %, entonces, el riesgo se reduciría en un 47.78 % para el caso de EWMA, ambos, con respecto al modelo de M-V.

La evaluación, para el periodo del 02 de enero de 2013 al 30 de junio de 2015, indica que el portafolio que tuvo mejor desempeño fue el EWMA, con un rendimiento acumulado de 0.16, seguido de el DCC, con 0.12 y el de M-V, con 0.05. Sin embargo, debe tenerse presente que un portafolio óptimo no siempre va a generar rendimientos positivos, debido al riesgo existente, por ello la segunda etapa del proceso es monitorear el comportamiento del mismo y considerar, aunque no entró en los objetivos propiamente del presente trabajo, hacer ajustes oportunos.

Finalmente, se puede concluir que el empleo de una matriz de covarianzas condicionales, para el caso del modelo EWMA y DCC, aunque no logran obtener mejores rendimientos que el modelo M-V, consiguen disminuir la desviación estándar, o riesgo, lo cual minimiza pérdidas potenciales.

# Referencias

- Amenc, N. and Le Sourd, V. (2005). *Portfolio theory and performance analysis*. John Wiley & Sons.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3):307–327.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3):339–350.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 987–1007.
- Francq, C. and Zakoian, J.-M. (2011). *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. John Wiley & Sons.
- Härdle, W. and Simar, L. (2007). *Applied multivariate statistical analysis*. Springer Science & Business Media.
- Jonathan, D. and Kung-Sik, C. (2008). *Time Series Analysis With Applications in R*. Springer.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection\*. *The journal of finance*, 7(1):77–91.
- Michaud, R. O. and Michaud, R. O. (2008). *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation Includes CD*. Oxford University Press.
- Peña, D. (2005). *Análisis de series temporales*. Alianza Editorial.
- Prigent, J.-L. (2007). *Portfolio optimization and performance analysis*. CRC Press.
- Reinsel, G. C. (2003). *Elements of multivariate time series analysis*. Springer Science.

## REFERENCIAS

---

- Stefanica, D. (2008). *A primer for the Mathematics of Financial Engineering*. Fe Press.
- Sun, W. and Yuan, Y.-X. (2006). *Optimization theory and methods: nonlinear programming*, volume 1. Springer Science & Business Media.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of financial time series*, volume 543. John Wiley & Sons.
- Tsay, R. S. (2013). *Multivariate Time Series Analysis: With R and Financial Applications*. John Wiley & Sons.
- Tsay, R. S. and Tiao, G. C. (1984). Consistent estimates of autoregressive parameters and extended sample autocorrelation function for stationary and nonstationary arma models. *Journal of the American Statistical Association*, 79(385):84–96.
- Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C. (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3):351–362.
- Zivot, E. and Wang, J. (2007). *Modeling Financial Time Series with S-PLUS®*, volume 191. Springer Science & Business Media.

# Apéndice A

## A.1. Funciones en R

### A.1.1. Rendimientos

#### Descripción

La función `rend()` sirve para obtener el rendimiento continuo compuesto de un activo.

#### Uso

```
rend(x)
```

#### Argumentos

- x Data.frame del precio de n activos, nombre columna tipo de acción y nombre de renglón fechas.

#### Ejemplo:

Sea x un data.frame de 5 acciones

```
> head(x)
      Fecha      AC      ALFAA      ALSEA      AMXL      BIMBOA
1 03/01/2006 14.19347 5.265150 5.805193 7.028995 8.838118
2 04/01/2006 14.03300 5.360581 5.837384 7.267410 8.686940
3 05/01/2006 13.90573 5.334554 5.794463 7.190777 8.707872
4 06/01/2006 13.92233 5.482037 5.869576 7.284440 8.933477
```



## A.1 Funciones en R

---

```
5 09/01/2006 14.01640 5.518474 5.880306 7.458994 8.933477
```

```
# Obtención de rendimientos
```

```
> rendimientos<-rend(x)
```

```
> head(rendimientos)
```

	Fecha	AC	ALFAA	ALSEA	AMXL	BIMBOA
1	04/01/2006	-0.011370442	0.017962599	0.005529968	0.03335628	-0.017253248
2	05/01/2006	-0.009110778	-0.004866979	-0.007380107	-0.01060081	0.002406740
3	06/01/2006	0.001193080	0.027271501	0.012879663	0.01294136	0.025578191
4	09/01/2006	0.006734032	0.006624630	0.001826485	0.02368000	0.000000000
5	10/01/2006	0.023025407	-0.002045795	-0.002923979	-0.01090398	0.002340399

### Función

```
rend<-function(x){  
  if(is.data.frame(x)){  
    nom<-c(names(x)[-1]);  
    time<-x[-1,1];  
    x<-as.matrix(x[,-1],ncol=ncol(x[-1]),byrow=FALSE)  
    B<- matrix(ncol=ncol(x),nrow=nrow(x)-1);  
    for(i in 1:ncol(x))  
    {  
      B[,i]<-diff(log(x[,i]),lag=1);#calculo de rendimientos  
    }  
    B<-data.frame(B)  
    colnames(B)<-nom  
    C<-data.frame.Fecha=time,B)  
    return(C)  
  } else{  
    print("El formato no es data.frame")  
  }  
}
```

### A.1.2. Portafolio óptimo

#### Descripción

## A.1 Funciones en R

---

La función `portafolio.minimo()` sirve para obtener el portafolio óptimo (rendimiento esperado del portafolio, desviación estándar del portafolio y los pesos asignados a cada acción). Se requiere previamente la instalación de la librería "quadprog".

### Uso

```
portafolio.minimo(r.e,mat.cov)
```

### Argumentos

`r.e`        vector de rendimientos esperados  
`mat.cov`    matriz de varianzas y covarianzas

### Ejemplo:

Para este ejemplo se utilizó los rendimientos esperados (`r.e`) del ejemplo anterior y la matriz de varianzas y covarianzas (`mat.cov`).

```
install.packages("quadprog")
library(quadprog)

r.e<-colMeans(rendimientos[,-1])
mat.cov<-cov(as.matrix(rendimientos[,-1]))
port.min1<-portafolio.minimo(r.e,mat.cov)
> port.min1 # portafolio mínimo
$r.e
[1] 0.0009053796

$sd
[1] 0.01106712

$pesos
      AC      ALFAA      ALSEA      AMXL      BIMBOA
0.610102 0.036866 0.067189 0.129709 0.156134
```

### Función

```
portafolio.minimo<-function(r.e,mat.cov){
  Dmat <- 2*mat.cov
```

## A.1 Funciones en R

---

```
dvec <- rep.int(0, length(r.e))
Amat <- cbind(rep(1,length(r.e)), diag(1,length(r.e)))
bvec <- c(1, rep(0,length(r.e)))
resultado <- solve.QP(Dmat=Dmat,dvec=dvec,Amat=Amat,bvec=bvec,meq=1)
w.min <- round(resultado$solution, 6)

names(w.min) <- names(r.e)
r.e.p.min <- crossprod(w.min,r.e)
sd.p.min <- sqrt(t(w.min) %*%mat.cov %*% w.min)
port.min <- list("r.e" = as.vector(r.e.p.min),
                "sd" = as.vector(sd.p.min),
                "pesos" = w.min)

port.min
}
```

### A.1.3. Portafolio eficiente

#### Descripción

La función `port.eficiente()` sirve para encontrar un portafolio óptimo dado un rendimiento objetivo.

#### Uso

```
port.eficiente(r.e,mat.cov,rend.objetivo)
```

#### Argumentos

<code>r.e</code>	vector de rendimientos esperados
<code>mat.cov</code>	matriz de varianzas y covarianzas
<code>rend.objetivo</code>	rendimiento objetivo (escalar)

#### Ejemplo:

Considerando los datos del primer caso. Sea el rendimiento esperado de AC igual a 0.001058, entonces, si se establece dicho rendimiento como objetivo, la función debe devolver un rendimiento del portafolio igual a este.

```
> rend.objetivo<-r.e[1]
```

## A.1 Funciones en R

---

```
> portafolio.eficiente<-port.eficiente(r.e,mat.cov,rend.objetivo)
> portafolio.eficiente
$r.e
[1] 0.001058594

$sd
[1] 0.01303414

$pesos
  AC  ALFAA  ALSEA  AMXL  BIMBOA
  1    0    0    0    0
```

### Función

```
port.eficiente<-function(r.e,mat.cov,rend.objetivo){
  Dmat <- 2*mat.cov
  dvec <- rep.int(0, length(r.e))
  Amat <- cbind(rep(1,length(r.e)), r.e, diag(1,length(r.e)))
  bvec <- c(1, rend.objetivo, rep(0,length(r.e)))
  resultado <- solve.QP(Dmat=Dmat,dvec=dvec,Amat=Amat,bvec=bvec,meq=2)
  w <- round(resultado$solution, 6)

  # rendimiento esperado y varianza
  names(w) <-names(rendimientos[,-1])
  r.e.p <- crossprod(r.e,w)
  sd.p <- sqrt(w %*% mat.cov %*% w)
  resultado <- list("r.e" = as.vector(r.e.p),
                  "sd" = as.vector(sd.p),
                  "pesos" = w)
  resultado
}
```

### A.1.4. Frontera eficiente

#### Descripción

## A.1 Funciones en R

---

La función `frontera.eficiente()` sirve para construir la frontera eficiente tomando en cuenta el máximo rendimiento esperado de las acciones y el número de portafolios. Calcula 20 portafolios por default, con su rendimiento esperado, desviación estándar y pesos correspondientes.

### Uso

```
frontera.eficiente(r.e, mat.cov)
```

### Argumentos

r.e        vector de rendimientos esperados  
mat.cov   matriz de varianzas y covarianzas

### Ejemplo

```
> fronteraeficiente<-frontera.eficiente(r.e, mat.cov)
$r.e
      port 1      port 2      port 3      port 4      port 5
0.0009053796 0.0009134436 0.0009215075 0.0009295715 0.0009376354
      port 6      port 7      port 8      port 9      port 10
0.0009456993 0.0009537633 0.0009618272 0.0009698911 0.0009779551
      port 11     port 12     port 13     port 14     port 15
0.0009860190 0.0009940830 0.0010021469 0.0010102108 0.0010182748
      port 16     port 17     port 18     port 19     port 20
0.0010263387 0.0010344026 0.0010424666 0.0010505305 0.0010585945

$sd
      port 1      port 2      port 3      port 4      port 5      port 6
0.01106712 0.01106985 0.01107806 0.01109170 0.01111077 0.01113525
      port 7      port 8      port 9      port 10     port 11     port 12
0.01116512 0.01120029 0.01124074 0.01128641 0.01133725 0.01140030
      port 13     port 14     port 15     port 16     port 17     port 18
0.01148700 0.01159699 0.01172962 0.01188414 0.01206030 0.01228333
      port 19     port 20
0.01258759 0.01303414

$pesos
```

## A.1 Funciones en R

---

	AC	ALFAA	ALSEA	AMXL	BIMBOA
port 1	0.610102	0.036866	0.067189	0.129709	0.156134
port 2	0.619241	0.041238	0.068261	0.116909	0.154351
port 3	0.628380	0.045610	0.069333	0.104109	0.152569
port 4	0.637519	0.049981	0.070405	0.091309	0.150786
port 5	0.646658	0.054353	0.071476	0.078509	0.149003
port 6	0.655797	0.058725	0.072548	0.065709	0.147220
port 7	0.664936	0.063097	0.073620	0.052910	0.145438
port 8	0.674075	0.067468	0.074692	0.040110	0.143655
port 9	0.683214	0.071840	0.075764	0.027310	0.141872
port 10	0.692353	0.076212	0.076836	0.014510	0.140089
port 11	0.701492	0.080584	0.077908	0.001710	0.138307
port 12	0.724360	0.085425	0.073168	0.000000	0.117048
port 13	0.749345	0.090338	0.067531	0.000000	0.092786
port 14	0.774329	0.095251	0.061895	0.000000	0.068525
port 15	0.799314	0.100164	0.056259	0.000000	0.044263
port 16	0.824299	0.105078	0.050622	0.000000	0.020002
port 17	0.851711	0.107766	0.040523	0.000000	0.000000
port 18	0.890523	0.100009	0.009468	0.000000	0.000000
port 19	0.942397	0.057603	0.000000	0.000000	0.000000
port 20	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

### Función

```
frontera.eficiente<-function(r.e, mat.cov, nport=20){  
  nom.act <- names(r.e)  
  r.e <- as.vector(r.e)  
  N <- length(r.e)  
  mat.cov <- as.matrix(mat.cov)  
  port.nom <- rep("port",nport)  
  ns <- seq(1,nport)  
  port.nom <- paste(port.nom,ns)  
  
  mat.cov.inv <- solve(mat.cov)  
  vec.unos <- rep(1, N)  
  port.gmin <- portafolio.minimo(r.e,mat.cov)  
  w.gmin <- port.gmin$pesos
```

## A.1 Funciones en R

---

```
we.mat <- matrix(0, nrow=nport, ncol=N)
we.mat[1,] <- w.gmin
we.mat[nport, which.max(r.e)] <- 1
er.e <- as.vector(seq(from=port.gmin$r.e, to=max(r.e), length=nport))
for(i in 2:(nport-1)) {
  we.mat[i,] <- port.eficiente(r.e, mat.cov, er.e[i])$pesos
}

names(er.e) <- port.nom
cov.e <- we.mat %*% mat.cov %*% t(we.mat)
sd.e <- sqrt(diag(cov.e))
sd.e <- as.vector(sd.e)
names(sd.e) <- port.nom
dimnames(we.mat) <- list(port.nom,nom.act)
respuesta <- list("r.e" = er.e,
                 "sd" = sd.e,
                 "pesos" = we.mat)
respuesta
}
```

### A.1.5. Evaluar un portafolio

#### Descripción

La función `portafolio.evaluacion()` permite calcular el rendimiento esperado, y desviación estándar del portafolio.

#### Uso

```
portafolio.evaluacion(r.e,mat.cov, pesos)
```

#### Argumentos

<code>r.e</code>	vector de rendimientos esperados
<code>mat.cov</code>	matriz de varianzas y covarianzas
<code>pesos</code>	pesos deseados

#### Ejemplo

## A.1 Funciones en R

---

Dados un rendimiento esperado(`r.e`), una matriz de varianzas y covarianzas(`mat.cov`) y pesos predeterminados, los resultados se muestran en las siguientes líneas.

```
> r.e
      AC      ALFAA      ALSEA      AMXL      BIMBOA
0.0010585945 0.0009186035 0.0008338931 0.0004049348 0.0007500717
> mat.cov
      AC      ALFAA      ALSEA      AMXL      BIMBOA
AC      1.698888e-04 0.0000532708 4.926927e-05 0.0000471463 4.766422e-05
ALFAA   5.327080e-05 0.0005375290 2.154100e-04 0.0002060773 1.854855e-04
ALSEA   4.926927e-05 0.0002154100 5.527923e-04 0.0001749744 1.578339e-04
AMXL    4.714630e-05 0.0002060773 1.749744e-04 0.0003910353 1.514260e-04
BIMBOA  4.766422e-05 0.0001854855 1.578339e-04 0.0001514260 3.606963e-04
> pesos
      AC      ALFAA      ALSEA      AMXL      BIMBOA
0.610102 0.036866 0.067189 0.129709 0.156134

> port.evaluacion<-portafolio.evaluacion(r.e,mat.cov, pesos)
> port.evaluacion
$r.e
[1] 0.0009053796

$sd
[1] 0.01106712

$pesos
      AC      ALFAA      ALSEA      AMXL      BIMBOA
0.610102 0.036866 0.067189 0.129709 0.156134
```

### Función

```
portafolio.evaluacion <-function(r.e,mat.cov, pesos){
  nom.act <- names(r.e)
  pesos <- as.vector(pesos)
  names(pesos) = names(er)
  r.e <- as.vector(r.e)
  r.e.p <- crossprod(r.e,pesos)
```



## A.1 Funciones en R

---

```
sd.p <- sqrt(pesos %*% mat.cov %*% pesos)
resultado <- list("r.e" = as.vector(r.e.p),
                "sd" = as.vector(sd.p),
                "pesos" = pesos)
resultado
}
```

### A.1.6. Gráficos

```
> er.e<-fronteraeficiente$r.e
> sd.e<-fronteraeficiente$sd
> sd.p.min<-port.min1$sd
> r.e.p.min<-port.min1$r.e
> sd<-sqrt(diag(mat.cov))
> plot(sd.e,er.e,xlim=c(0.009,max(sd)+0.003),ylim=c(-0.0005,max(er.e)
      +0.0003),col="black",pch=19,type="b");grid()
> abline(h=0,col="blue")
> points(sd,r.e,col="black",pch=19)
> text(sd,r.e,names(rendimientos[,-1]),pos=4,cex=0.5)
> points(sd.p.min,r.e.p.min,col="green",pch=20,cex=2)
> text(sd.p.min,r.e.p.min,"Portafolio de mínima varianza",pos=4,cex=0.6)
```

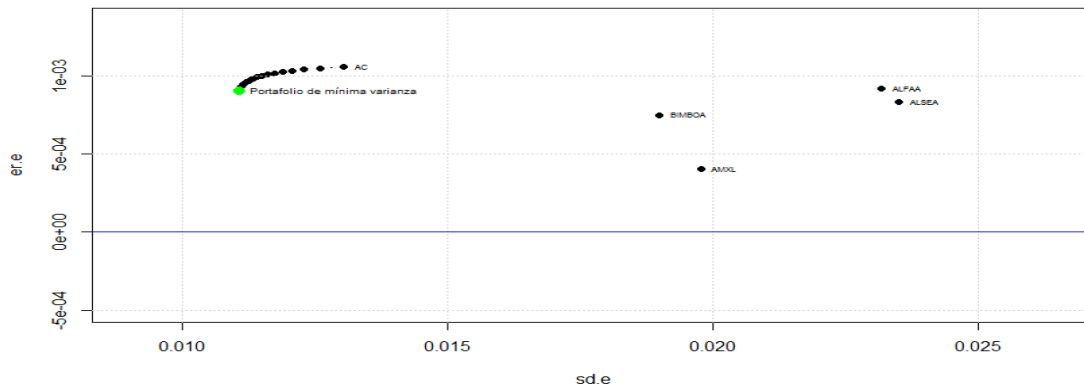


Figura A.1: Frontera eficiente

# Apéndice B

## B.1. Participación en el índice

Nombre	Clase	Código	Participación en el índice
America Movil	L	AMXL	15.651
Fomento Econ Mex	UBD	FEMSAUBD	11.599
Televisa Gpo	CPO	TLEVISACPO	9.497
GFBanorte	O	GFNORTEO	7.690
Wal Mart de Mexico	*	WALMEX	7.636
GMexico	B	GMEXICOB	6.626
Cemex	CPO	CEMEXCPO	6.373
Alfa	A	ALFAA	4.711
GFInbursa	O	GFINBURO	2.202
Coca Cola Femsa	L	KOFL	2.195
Kimberly Clark Mex	A	KIMBERA	2.026
Asureste	B	ASURB	1.898
Santander Serfin GF	B	SANMEXB	1.892
Bimbo	A	BIMBOA	1.853
Gruma	B	GRUMAB	1.696
Mexichem	*	MEXCHEM	1.589
Prom Y Op de Infra	*	PINFRA	1.525
Liverpool Puerto de	C-1	LIVEPOLC-1	1.310
Gpo Aeroport Pacif	B	GAPB	1.282
Arca Continental	*	AC	1.111
Elektra Gpo	*	ELEKTRA	1.066
Alsea	*	ALSEA	0.954

**Tabla B.1:** Praticipación en el IPC.(Fuente: Económica)

## B.1 Participación en el índice

---

Nombre	Clase	Código	Participación en el índice
Genera	*	GENTERA	0.914
Penoles Industrias	*	PE&OLES	0.864
Lala	B	LALAB	0.849
Comercial Mexicana	UBC	COMERCIUBC	0.812
GCarso	A1	GCARSOA1	0.749
Ohl Mexico	*	OHLMEX	0.723
Infraes Energetica	*	IENOVA	0.680
Genomma Lab Intern	B	LABB	0.435
Bolsa Mexicana Val	A	BOLSAA	0.407
Alpek	A	ALPEKA	0.333
Gfregio	O	GFREGIOO	0.328
Industrias Ch	B	ICHB	0.320
Ica Soc Controlad	*	ICA	0.202

---

**Tabla B.2:** Participación en el IPC(continuación).(Fuente: Economática)