



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA DE INVESTIGACIÓN EN
CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO
POSTGRADO DE SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA

ESTIMACIÓN DEL VALOR EN RIESGO MEDIANTE MODELOS DE
HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL Y TEORÍA DE
VALORES EXTREMOS

ALEJANDRO IVAN AGUIRRE SALADO

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MÉXICO

MAYO DE 2010

La presente tesis titulada: “**ESTIMACIÓN DEL VALOR EN RIESGO MEDIANTE MODELOS DE HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL Y TEORÍA DE VALORES EXTREMOS**” realizada por Alejandro Ivan Aguirre Salado, bajo la dirección del **Consejo Particular** indicado, ha sido aprobado por el mismo y aceptada como requisito parcial para la obtención del grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS
SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA**

CONSEJO PARTICULAR

Consejera:

Dra. Martha Elva Ramírez Guzmán

Director de tesis:

Dr. Humberto Vaquera Huerta

Asesor:

Dr. David H. Del Valle Paniagua

Asesor:

Dr. José René Valdez Lazalde

Montecillo, Texcoco, Estado de México, mayo de 2010.

ESTIMACIÓN DEL VALOR EN RIESGO MEDIANTE MODELOS DE
HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL Y TEORÍA DE
VALORES EXTREMOS

Alejandro Ivan Aguirre Salado, M.C.

Colegio de Postgraduados, 2010

Este trabajo propone una metodología para la estimación del valor en riesgo (VaR) de el índice de precios y cotizaciones (IPC) de la bolsa mexicana de valores mediante el uso de modelos autoregresivos generalizados de heterocedasticidad condicional (GARCH) combinada con la teoría de los valores extremos. Esto surge de la necesidad de calcular de la máxima pérdida que puede tener el índice de precios y cotizaciones (IPC), a un cierto nivel de confiabilidad y en un periodo de tiempo dado, mediante modelos más eficientes que midan la volatilidad de manera dinámica. En general, los modelos GARCH son usados para modelar los periodos de poca o intensa volatilidad, mientras que la teoría de los valores extremos es utilizada para estimar las pérdidas inesperadas que pueden ocurrir en las series financieras. La combinación de estas dos teorías nos produce un método más robusto para el cálculo del valor en riesgo. De manera paralela se estudia el valor en riesgo para el índice de precios y cotizaciones mediante el método tradicional de la industria del riesgo financiero, el método de Riskmetrics, con la finalidad de contar con un marco de comparación para la metodología propuesta del cálculo del valor en riesgo mediante el uso combinado de los modelos GARCH y la teoría de valores extremos. Adicionalmente, para aumentar la robustez de la metodología, se utilizan modelos ARMA para el modelado de las correlaciones de la serie y se asume una distribución de colas pesadas para los residuales, en este caso, la distribución t de Student.

Palabras clave: Modelos ARMA, VaR, GARCH, teoría de valores extremos.

ESTIMATING VALUE AT RISK USING GENERALIZED AUTOREGRESSIVE
CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY MODELS AND EXTREME VALUE THEORY

Alejandro Ivan Aguirre Salado, M.Sc.

Colegio de Postgraduados, 2010

This work proposes an approach for estimating value at risk (VaR) of the index of the Mexican Stock Exchange (IMSE) by using the generalized autoregressive conditional heteroscedastic (GARCH) models combined with the Extreme Value Theory (EVT). This work addresses the need to calculate the maximum loss that may have the IMSE, at a certain level of reliability in a given period of time using more efficient models to quantify volatility, dynamically. In a broad sense, the GARCH models are used to model periods of volatility (long or short), while the EVT is used to estimate the unexpected losses that may occur in the financial series. The combination of these two theories offers a more robust method for calculating the VaR. By other way, the VaR for the IMSE is also studied using the traditional approach for financial risk called Riskmetrics, with the purpose of comparing results with the proposed approach. Additionally, Autoregression and Moving Average (ARMA) models are used for modeling series correlations for augmenting the approach robustness where a heavy tails distribution for the residuals it is assumed, in this case, with the Student's t-Distribution.

Keywords: ARMA, VaR, GARCH, Extreme Value Theory, index of the Mexican Stock Exchange.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología que me brindó la oportunidad de financiar mi formación académica en el Colegio de Postgraduados.

Al Programa de Estadística del Colegio de Postgraduados especialmente a mis estimados profesores que compartieron generosamente sus conocimientos.

Al Dr. Humberto Vaquera Huerta, por sus brillantes clases de Estadística que fueron un manjar para mis oídos y una luz en la comprensión de esta apasionante ciencia.

A la Dra. Martha Elva Ramírez Guzmán investigadora de la Ciencia Estadística, por su comprensión y apoyo durante mi estancia en el Colegio de Postgraduados.

Al Dr. José René Valdez Lazalde por su apoyo en la revisión de este trabajo y sus acertadas sugerencias.

Al Dr. David H. Del Valle Paniagua por su apoyo en la revisión de este trabajo y sus interesantes comentarios.

A todos y cada uno de mis amigos compañeros del Colegio de Postgraduados: por hacerme pasadera mi estancia en esta maravillosa escuela, y por compartir momentos inolvidables de estudio, debates y sobre todo formación en investigación.

DEDICATORIA

A Dios que siempre está conmigo en las buenas y en las malas.

A mis padres Margarito Aguirre Bravo y Bertha Salado Morales por su gran ejemplo de vida y encausarme por el camino del bien mediante sus valiosos consejos en todo momento.

A mis abuelitos Clicerio Aguirre Molina e Ignacia Bravo Hernández por su valioso ejemplo de vida que han inculcado a todos y cada uno de sus hijos y nietos, y por el gran ejemplo que nos dejan día a día.

A mi hermano, Carlos Arturo Aguirre Salado y su esposa Liliana Miranda Aragón a quienes agradezco su comprensión y consejos siempre, sobre como hacer frente a las condiciones y retos que me supone la vida.

A mi hermana Olimpia Talya Aguirre Salado y su esposo Carlos Solano por la motivación brindada siempre.

A mi tíos Ariadna Aguirre y Ernesto Alvarado quienes siempre están al tanto de nosotros, brindándonos su cálido apoyo, consejos en todo momento y gran ejemplo de superación.

A mi tíos Andrómeda Aguirre y Eduardo Alcaide quienes a pesar de la distancia nos brindan constantemente su apoyo y son siempre un buen ejemplo de superación.

CONTENIDO

	Página
Resumen	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	ix
Lista de Cuadros	x
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	4
1.2. Objetivo General	4
1.3. Objetivos Particulares	4
2. Hipótesis	4
3. Revisión de Literatura	5
3.1. Evolución de las Herramientas Analíticas de Manejo del Riesgo	5
3.2. Derivados	6
3.3. Forwards	8
3.4. Futuros	8
3.5. Opciones	8
3.5.1. Call	9
3.5.2. Put	9
3.6. El Riesgo en el Marco Internacional	9
3.6.1. El Sector Privado	9
3.6.2. Reporte G-30	10
3.6.3. Grupo de Políticas sobre Derivados (Derivatives Policy Group)	10
3.6.4. Riskmetrics de J.P. Morgan	11
3.6.5. Asociación Global de Profesionales del Riesgo.	11
3.7. Reguladores	11
3.7.1. Oficina General de Contabilidad	12
3.7.2. Junta Estándar de Contabilidad Financiera	12
3.7.3. Comisión de Bolsa y de Valores	13
3.8. Definiciones	14
3.8.1. Retornos	14
3.8.2. Valor en Riesgo (VaR)	15
3.8.3. VaR en el Tiempo	15
3.8.4. Función de Verosimilitud	16
3.9. Series temporales	17
3.9.1. Estacionalidad	17
3.9.2. Función de Correlación y Autocorrelación	18
3.9.3. Criterio de Información	20
3.9.4. Tipos de Modelos	20
3.9.4.1. Modelos Auto-Regresivos	20

	3.9.4.1.1.	Determinación del Orden del Modelo	21
	3.9.4.1.2.	Estimación de los Parámetros	22
	3.9.4.1.3.	Pronóstico	23
	3.9.4.2.	Modelos de Media Móvil	24
	3.9.4.2.1.	Identificación del Modelo	25
	3.9.4.2.2.	Pronóstico Usando Modelos MA(q)	25
	3.9.4.3.	Modelos ARMA	26
	3.9.4.3.1.	Pronóstico Usando Modelos ARMA	26
3.10.		Modelos de Volatilidad	27
	3.10.1.	Modelos de Heroceasticidad Condicional	27
	3.10.2.	Kurtosis	29
	3.10.3.	Estimación	32
	3.10.4.	Identificación del Modelo GARCH(p,q)	36
	3.10.5.	Pronósticos	37
	3.10.6.	Pruebas de Ajuste del Modelo GARCH	37
3.11.		Estimación en una Serie ARMA - GARCH	38
3.12.		Metodología Riskmetrics	38
3.13.		Teoría de Valores Extremos	39
	3.13.1.	Metodologías para Encontrar los Valores Extremos de una Serie	40
	3.13.1.1.	Máximos por Bloques	40
	3.13.1.2.	El método de Picos sobre Umbral POT	41
	3.13.1.2.1.	La media de los Excesos	42
	3.13.1.2.2.	Métodos para la Selección del Umbral “u”	43
	3.13.2.	Cálculo del Valor en Riesgo Utilizando Valores Extremos	43
4.		Materiales y Métodos	44
	4.1.	Obtención y Preparación de los Datos de Estudio.	44
	4.2.	Modelado de la Media y la Varianza de los Residuales	46
	4.3.	VaR mediante Modelos GARCH y Teoría de Valores Extremos	47
	4.4.	Ajuste del Modelo	48
	4.4.1.	Comparación Histórica o Backtesting	48
5.		Resultados y Discusión	48
6.		Conclusiones	59
7.		Recomendaciones	60
8.		Bibliografía	62

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1. Ilustración del Valor en Riesgo	15
Figura 2. Función de Autocorrelación Parcial Muestral	49
Figura 3. Función de Autocorrelación Muestral	50
Figura 4. Función de Autocorrelación Muestral y Autocorrelación Parcial Muestral de los residuales	52
Figura 5. Estimación del Valor en Riesgo para diferentes modelos ARMA en la media y modelos ARCH en la Varianza.	53
Figura 6. Estimación del Valor en Riesgo para diferentes modelos ARMA en la Media y Modelos GARCH en la Varianza.	54
Figura 7. Banda del Valor en Riesgo mediante el uso un modelo ARMA(3,1) - GARCH(1,1) – EVT	56
Figura 8. Comparación de las Bandas de Valor en Riesgo de un modelo ARMA(3,1) - GARCH(1,1) - EVT (Verde) y Riskmetrics (Rojo)	58

LISTA DE CUADROS

	Página
Cuadro 1. Evolución de las herramientas utilizadas en la medición del riesgo y la valoración de instrumentos financieros.	6
Cuadro 2. Evolución de los Instrumentos Financieros anteriores al VaR	7
Cuadro 3. Serie de Datos del IPC correspondientes al periodo del 30 de Mayo del 2008 al 30 de Marzo de 2009	45
Cuadro 4. Parámetros ajustados al modelo ARMA(3,1)-GARCH(1)	51
Cuadro 5. Pruebas de los residuales del modelo ARMA(3,1)-GARCH(1)	51
Cuadro 6. Parámetros ajustados al modelo Riskmetrics	56
Cuadro 7. Pruebas a los residuales del modelo Riskmetrics	57
Cuadro 8. Principales desastres financieros mundiales ocurridos en la década de los años noventa.	64
Cuadro 9. Principales desastres financieros mundiales ocurridos por los bancos y pagados por los contribuyentes.	65
Cuadro 10. Factores de ajuste para el cálculo del Índice de Precios y Cotizaciones en función de derechos y eventos.	67
Cuadro 11. Empresas que participan en el cálculo del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.	69

1. INTRODUCCIÓN

El valor en riesgo (VaR) tiene sus orígenes en los famosos desastres financieros ocurridos a comienzos de los años 90 que provocaron enormes pérdidas, como el caso del Orange County en Estados Unidos, con una pérdida de 1.81 billones de dólares, el Barings en Inglaterra, con 1.33 billones de dólares, el Metallgesellschaft en Alemania, con 1.34 billones de dólares y el Daiwa en Japón, que perdió 1.1 billones de dólares, entre otros más. Estos desastres demuestran que sin la debida supervisión y manejo del riesgo, se pueden perder billones de dólares en un periodo de tiempo relativamente corto (Crouhy *et al.*, 2000).

En México actualmente existe poca información respecto al manejo del riesgo financiero, siendo necesaria para cualquier institución financiera, el conocer de primera mano los factores y metodologías que permitan evitar tomar riesgos innecesarios.

Durante los últimos años se han multiplicado las pérdidas ocasionadas por los derivados, que son instrumentos financieros empleados para realizar coberturas en operaciones de compra y venta de acciones. De 1987 a 1998, estas pérdidas han sumado cerca de 28 billones de dólares, comparado con los 90 trillones de dólares del mercado, representan el 0.03 por ciento del total (Jorion, 2000).

En México, la crisis financiera de 1995 fue provocada por el abuso de la política cambiaria, que sirvió para bajar y estabilizar la inflación de 160 por ciento en 1987, a un 7 por ciento en 1994. Sin embargo el déficit de la cuenta corriente comenzó a crecer a medida que la inflación bajaba. Su financiamiento reposó en los flujos de capitales externos, que sirvieron para financiar la inversión y el consumo, y por medio de esto, generar el auge crediticio, que sirvió como antecedente de la crisis bancaria (Millán-Valenzuela, 1999).

El desconocimiento de estas metodologías ha propiciado que varias corporaciones financieras hayan caído en bancarrota, ya sea por el mal manejo de información o

simplemente carencia de la misma, provocando situaciones de inflación y largos periodos de contracción de la economía.

Jorion (2000) menciona algunos episodios históricos que provocaron periodos de gran inestabilidad financiera:

- En 1970, EUA dejó el dólar a libre flotación provocando volatilidad en los tipos de cambio.
- El golpe a los precios del petróleo que empezaron en 1973, y fueron acompañados por altas tasas de inflación y fuertes oscilaciones sobre el tipo de cambio.
- El lunes negro del 19 de Octubre de 1987, cuando los mercados de Estados Unidos colapsaron cerca del 23 por ciento perdiendo un trillón de dólares en capital.
- El camino hacia la unificación monetaria en Europa fue detenida temporalmente por la explosión del sistema monetario europeo en septiembre de 1992.
- El colapso de los bonos en 1994, cuando el banco de la reserva federal de Estados Unidos, después de mantener bajas tasas de interés durante 3 años, empezó una serie de 6 alzas consecutivas provocando una pérdida de 1.5 trillones de dólares en capital global.
- La burbuja financiera en el mercado japonés que estalló a finales de 1989, enviando al índice del Nikkei de 39,000 a 17,000 tres años después. Se perdieron un total de 2.7 trillones de dólares de capital, dejando a Japón en una crisis sin precedentes.
- La agitación del mercado asiático de 1997 que ocasiono la pérdida de cerca de tres cuartos de la capitalización del dólar en equidades en Indonesia, Corea, Malasia y Tailandia.
- La crisis de Rusia en agosto de 1998 que provocó una crisis financiera global que culminó en el cercano fracaso de un gran fondo de cobertura y la gestión de capital a largo plazo.

Finalmente la crisis mundial de 2008 que empezó en Estados Unidos de América, debida directamente al colapso de la burbuja inmobiliaria del 2006, provocó en octubre de 2007 la crisis de las hipotecas y causó diferentes derrumbes bursátiles, como el de enero de 2008 y finalmente la crisis bursátil mundial de octubre de 2008 (Schwartz, 2009).

Esta tesis estudia la metodología de estimación del valor en riesgo para el Índice de Precios y Cotizaciones en México mediante la teoría de valores extremos permitiendo comparar su eficiencia respecto a la metodología tradicional, conocida como Riskmetrics.

1.1. OBJETIVOS

1.2. OBJETIVO GENERAL

Estimar el valor en riesgo del Índice de Precios y Cotizaciones para el caso de México mediante el uso de modelos autoregresivos de heterocedasticidad condicional y teoría de valores extremos en datos diarios correspondientes al periodo de 1ro de junio de 2008 al 30 de marzo del 2009.

1.3. OBJETIVOS PARTICULARES

- ❖ Estimar el valor en riesgo del Índice de Precios y Cotizaciones en México mediante modelos de heterocedasticidad condicional combinado con teoría de valores extremos.
- ❖ Estimar el valor en riesgo del Índice de Precios y Cotizaciones en México mediante el modelo Riskmetrics.
- ❖ Comparar los métodos anteriores con base en la prueba de proporción de fallas de Kupiec (Backtesting).

2. HIPÓTESIS

Los modelos de heterocedastidad condicional combinados con la teoría de valores extremos predicen mejor el valor en riesgo que el método tradicional Riskmetrics.

3. REVISIÓN DE LITERATURA

El valor en riesgo surge como un método para estimar el riesgo con técnicas estadísticas tradicionales ya empleadas en otros campos de la investigación, por ejemplo el uso de la teoría de valores extremos para estimar la corrosión marina del acero en el largo plazo (Melchers, 2008); en la estimación del ozono urbano (Reyes *et al.*, 2009); la toma de decisiones en ingeniería (Chryssolouris, 1994), etc. Formalmente el valor en riesgo (VaR) estima la pérdida máxima sobre un horizonte de tiempo dado, bajo condiciones normales del mercado, a un nivel de confiabilidad dado (Fernández, 2003). Por ejemplo, un banco puede decir que el VaR diario para su portafolio es de 15 millones de dólares al 99 por ciento de confiabilidad. Esto significa que en uno de cien casos, en condiciones normales de mercado, sus pérdidas serán superiores a los 15 millones (Christoffersen, 2003).

Como riesgo se debe de entender a la volatilidad de sucesos inesperados. Por otra parte, entendemos como riesgo financiero a las pérdidas en los mercados financieros, derivadas en parte por los movimientos en las tasas de interés (Jorion, 2000).

3.1. Evolución de las herramientas analíticas de manejo del riesgo

El manejo del riesgo surgió como respuesta a la creciente volatilidad de los mercados financieros. En 1952, Markowitz desarrolló una metodología basada en la media y la varianza y centralizó todos los riesgos en una unidad de medida común.

Las herramientas esenciales en el manejo del riesgo han ayudado a una mejor comprensión de este, sin embargo, aunque los métodos del valor en riesgo están mejor aplicados al riesgo de instrumentos conocidos como derivados, también pueden ser aplicados a todos los instrumentos financieros.

La siguiente tabla muestra la evolución de los instrumentos financieros anteriores al VaR.

Cuadro 1. Evolución de las herramientas utilizadas en la medición del riesgo y la valoración de instrumentos financieros.

Año	Herramienta analítica desarrollada
1938	Duración de Bonos
1952	Entorno de análisis de la media y la varianza de Markowitz
1963	Modelos expertos de valoración de capital (Sharpe's capital asset pricing model)
1966	Modelos de multiples factores
1973	Modelo de valoración de opciones de Black-Scholes, Griegas.
1979	Modelo Binomial de valoración de opciones
1983	RAROC, riesgo/ajuste de rendimientos
1986	Exposiciones Limites por cubos de duración
1988	Riesgo-Ponderación para activos de bancos
1992	Pruebas de Stress
1993	Valor en Riesgo
1994	Riskmetrics
1997	CreditMetrics, CreditMetrics+
1998	Integración de créditos y mercados de créditos
2000	Manejo de riesgo empresarial amplio
2004	Modelos con memoria (Long-Memory)
2006	Riskmetrics 2006

3.2. Derivados

Los derivados son instrumentos financieros diseñados para manejar el riesgo financiero eficientemente. Un contrato derivado puede ser definido como un contrato privado derivando su valor del precio de una acción subyacente, de una tasa de interés o de un

índice (de un mercado, bonos o monedas). En contraste con las acciones, las cuales son emitidas para financiar y obtener capital, los derivados son contratos entre dos partes (Lamothe, 2007).

En el siguiente cuadro se muestra la evolución en el tiempo de los derivados.

Cuadro 2. Evolución de los instrumentos financieros anteriores al VaR.

AÑO	DERIVADO
1972	Futuros de moneda extranjera
1973	Opciones sobre equidades
1975	Futuros sobre bonos del Tesoro
1981	Swaps sobre monedas
1982	Swaps sobre tasas de interés Futuros del Eurodollar Futuros sobre índices Opciones sobre monedas y tipos de cambio
1983	Opciones sobre equidad de índices Opciones sobre Futuros T-note Opciones sobre Futuros de monedas Tasas de interés topes
1985	Opciones sobre el Eurodollar Swaptions
1987	Opciones compuestas Opciones promedios
1989	Futuros sobre las tasas de interés swaps Opciones Quanto
1990	Swaps sobre índices de equidad
1991	Swaps diferenciales
1992	Opciones a seguros de riesgo a Catástrofes

1993	Captions
1994	Opciones a créditos
1996	Futuros a la electricidad
1997	Derivados sobre el Tiempo

3.3. Forwards

El más simple de los derivados es el contrato conocido como “Forward”, el cual es una obligación a comprar a un precio fijo en algún tiempo en el futuro denominado fecha de vencimiento. Generalmente el valor del contrato tiene un precio inicial fijo, pero posteriormente genera ganancias o pérdidas según sea el movimiento de la moneda extranjera. No existe un mercado donde se realice la operación, el contrato se realiza entre las dos partes y no existe margen inicial ni institución que garantice el cumplimiento de las obligaciones. La operación termina en la fecha de vencimiento (Lamothe, 2007).

3.4. Futuros

Es un contrato que da la obligación de comprar o vender una cantidad fija de acciones, a un precio fijo y en un tiempo determinado en el contrato (tiempo de vencimiento). Se requiere de una aportación inicial mínima llamada margen para poder cumplir con la obligación. Se puede deshacer la operación en cualquier momento realizando la operación contraria. Existe un mercado llamado mercado de futuros en donde se realizan las operaciones y una institución llamada cámara de compensación que garantiza que se cumplan las obligaciones (Lamothe, 2007).

3.5. Opciones

Un tipo especial de instrumentos financieros lo constituyen las opciones sobre acciones. Son contratos que dan el derecho más no la obligación de comprar o vender una cantidad fija de acciones, a un precio fijo (el precio strike), en un tiempo determinado en el contrato (tiempo de vencimiento). El comprador del contrato paga una prima que a su vez cobra el vendedor del mismo. Existe un mercado para operar llamada “Bolsa de opciones”. Una de las principales diferencias entre la opción y el

futuro está en la pérdida máxima para el comprador, mientras que en el futuro se puede perder más allá del margen inicial mínimo, en la opción la pérdida máxima es igual a la prima pagada por la opción (Lamothe, 2007).

3.5.1. Call

Es un contrato que da el derecho más no la obligación de comprar una cantidad fija de acciones, a un precio fijo (el precio strike), en un tiempo determinado en el contrato (tiempo de vencimiento). Una vez llegado al tiempo de vencimiento, el contratante puede hacer uso de su derecho y comprar las acciones al precio pactado, pero generalmente solo se ejerce la opción y se obtiene la diferencia entre el precio real de acción y el precio pactado en el contrato (Lamothe, 2007).

3.5.2. Put

Es un contrato que da el derecho más no la obligación de vender una cantidad fija de acciones, a un precio fijo (el precio strike), en un tiempo determinado en el contrato (tiempo de vencimiento). Una vez llegado al tiempo de vencimiento, el contratante puede hacer uso de su derecho y vender las acciones al precio pactado (en este punto es necesario aclarar que para poder vender la acción tiene primero que comprarlas al precio de mercado), igual que con los call, generalmente solo se ejerce la opción y se obtiene la diferencia entre el precio real de acción y el precio pactado en el contrato (Lamothe, 2007).

3.6. El riesgo en el marco internacional

3.6.1. El sector privado

Quizás la señal de advertencia más memorable fue hecha en enero de 1992 por Gerald Corrigan, presidente de la FED de New York "La alta tecnología y las finanzas tienen su lugar, pero en este negocio no todo puede ser medido, espero que esto suene como una advertencia, porque eso es" (Jorion, 2000).

3.6.2. Reporte G-30

En 1993, el grupo de los treinta (G-30), un selecto grupo consultivo de bancos, financieros, académicos, de las naciones industriales líderes publicó un importante reporte sobre derivados, "Derivados: Prácticas y Principios". El reporte concluyó que la actividad de los derivados "Hace una contribución sobre toda la economía que puede ser difícil de medir pero que es favorable y sustancial". En particular el G-30 aconsejó sobre posiciones del mercado usando el riesgo financiero con el VaR (Jorion, 2000).

3.6.3. Grupo de políticas sobre derivados (Derivatives Policy Group)

El grupo de políticas sobre derivados fue organizado por las seis mayores firmas del Wall Street en agosto de 1994 para abordar cuestiones de política pública relacionadas con las actividades de los negociadores sobre derivados OTC, las cuales no están sujetas a los requisitos de capital de los bancos comerciales (Jorion, 2000).

El DPG estableció el "Marco para la supervisión voluntaria" (1995) que consiste en:

- Controles de gestión. A partir de directrices que definan claramente el alcance de la participación en una actividad de derivados, el cual debería estar sujeto a procesos para medir y manejar el riesgo.
- Mejora de informes. Informes de la institución sobre los riesgos de crédito, así como los estados financieros sobre una base regular.
- Evaluación de riesgo en relación al capital. Utilizando un método estandarizado para medir el riesgo de mercado con un VaR al 99 por ciento, durante un horizonte de 2 semanas.
- Relación entre contrapartes, según la cual los negociantes deben proporcionar la documentación adecuada e informar a sus contrapartes de los riesgos de las operaciones.

Consecuentemente, los miembros de la firma de la DPG han dado información trimestral sobre sus riesgos de crédito y de mercado desde 1995 a sus reguladores. El marco de la información es de carácter voluntario y ha sido limitado a las seis firmas miembros.

3.6.4. Riskmetrics de J.P. Morgan

La más notable metodología del sector privado fue la llamada RiskMetrics desarrollada por la compañía J.P Morgan en octubre de 1994. Está basada en la elaboración de una matriz de riesgo de varianzas y covarianzas a través del tiempo. La metodología está disponible para el público en general y tiene como objetivos los siguientes:

- Promover mayor transparencia al mercado de riesgos
- Tener disponibles sofisticadas herramientas de manejo de riesgos para potenciales usuarios.
- Establecer la metodología de J.P. Morgan como una metodología estándar.

3.6.5. Asociación Global de Profesionales del Riesgo.

La Asociación Global de Profesionales del Riesgo (GARP, de ingles Global Association of Risk Professionals) fue establecida en 1996 y creada como un foro mundial de comunicación entre profesionales del riesgo.

El GARP organiza cada año un examen, el Financial Risk Manager Certificate Program, el cual establece un marco de referencia estándar en la industria del riesgo.

3.7. Reguladores

El crecimiento de los mercados de derivados y las pérdidas que han provocado, han promovido la creación de numerosas leyes y reguladores. Entre 1993 y 1994 hubo una intensa actividad de evaluación de estos instrumentos, principalmente en los mercados de OTC de Swap.

3.7.1. Oficina General de Contabilidad (GAO)

En mayo de 1994, la Oficina General de Contabilidad (GAO del inglés general accounting office) publicó un reporte sobre los derivados, después de un estudio de más de dos años. El reporte decía que “los derivados tienen una función importante” pero requieren un manejo cuidadoso. Entre las muchas recomendaciones, el reporte aconsejó regulaciones financieras para mejorar la evaluación de los sistemas de riesgos de los negociantes y promover reglas para los productos derivados.

3.7.2. Junta Estándar de Contabilidad Financiera

La Junta Estándar de Contabilidad Financiera (FASB, del inglés Financial Accounting Standards Board) ha tenido una intensa participación en la regulación y tratamiento de los derivados.

En junio de 1998, publicó un nuevo grupo de estándares, No. 133, “Contabilidad para instrumentos derivados y actividades de cobertura”, que unificó la contabilidad de derivados, la contabilidad de coberturas, y la divulgación de información, en un único documento. Efectiva desde el 15 de Junio del 2000, FAS 133 requiere que los derivados deben registrarse en las hojas de balance a precios razonables, es decir, citar a los precios de mercado. Cambios en los precios de mercado de los derivados deberían ser reportados en ganancias. Para los derivados usados como coberturas, las reglas permiten a las pérdidas o ganancias ser reconocidas como ingresos al mismo tiempo que como objetos de cobertura. Progresos similares fueron hechos por el Comité Internacional de Contabilidad Standard (IASB, del inglés International Accounting Standards). En diciembre de 1998, publicó el IAS39, el cual a parte de los derivados, considera a las acciones financieras y a los pasivos.

3.7.3. Comisión de Bolsa y de Valores

La Comisión de Bolsa y de Valores de Estados Unidos (conocida como SEC, Securities and Exchange Comisión) publicó las reglas que requieren las compañías

para divulgar información acerca del riesgo de los derivados y otros instrumentos financieros en reportes presentados por el SEC. Las nuevas normas se aplican a todas las solicitudes para los años fiscales después del 15 de Junio de 1998.

La sensación general de la SEC a través de sus analistas y auditores es que "los usuarios están confundidos". Los informes actuales presentados por las empresas no proporcionan detalles sobre el alcance de la participación de los instrumentos financieros ni de la actividad de los derivados en los beneficios de las empresas. Casi todas las empresas que explican el uso de derivados a "cobertura". Algunas admiten abiertamente la especulación, en otras, las pérdidas sufridas son los principales indicios de especulación. Como la línea entre la cobertura y la especulación selectiva es muy delgada, tales declaraciones arrojar muy poca luz sobre el alcance y la eficacia de las actividades de derivados por las empresas.

Para hacer más transparente la información, la SEC, requiere que se registre la información cuantitativa de los riesgos de mercado usando una de tres posibles alternativas:

- 1.- Una presentación tabular del flujo de dinero esperado y los términos de los contratos resumidos por categoría de riesgo.
- 2.- Un análisis de sensibilidad expresando posibles pérdidas para cambios hipotéticos en los precios de mercado.
- 3.- Medidas de valor en riesgo, para el actual periodo de reporte, los cuales son comparados con los actuales cambios en el mercado.

Las reglas del FASB y del SEC han sido bien recibidas por todos los usuarios de los productos financieros. La asociación para la gestión de las inversiones y la investigación de Estados Unidos (AIMR, del inglés Association for Investment Management and Research), comento que las reglas del SEC fueron "Un paso significativo hacia el mejoramiento de la capacidad de los inversores para evaluar el riesgo de inversión".

3.8. Definiciones

Para poder conocer el porcentaje de ganancias o pérdidas de los activos, es necesario entender y calcular los siguientes términos:

3.8.1. Retornos

Los retornos simples (R_t) son las ganancias (o pérdidas) que tiene un activo en el tiempo t con respecto al precio en el tiempo $t-1$. Sea P_t el precio de un activo en el tiempo t .

Los retornos simples se definen como

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (4.1)$$

Otro tipo de retorno, el cual es utilizado en la mayoría de los estudios, es el llamado retorno compuesto continuamente o retorno continuo (r_t) que se define como

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1} \quad (4.2)$$

donde $p_t = \ln(P_t)$. El retorno compuesto continuamente tiene algunas ventajas sobre el retorno simple, entre ellas la llamada agregación temporal:

$$\begin{aligned} r_t \text{ acumulada} &= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) = \ln\left[\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) * \left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right) * \dots * \left(\frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}\right)\right] \\ &= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) + \ln\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right) + \dots + \ln\left(\frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}\right) = r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Así pues:

$$r_t \text{ acumulada} = \sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i} \quad (4.4)$$

La relación que liga al retorno continuo con el retorno simple esta dada por:

$$R_t = e^{r_t} - 1 \quad (4.5)$$

En la mayor parte de los casos, los retornos tienen media cero, por lo que se suele aproximar a los retornos simples a través de retornos compuestos continuamente, es decir, se hace uso de la aproximación $R_t \approx r_t$.

3.8.2. Valor en Riesgo (VaR)

El Valor en Riesgo (VaR del inglés Value at Risk) se define como la máxima pérdida que puede sufrir un activo (y en su caso más general un portafolio el cual esta formado por un conjunto de activos) a un cierto nivel de confiabilidad α . En términos estadísticos se define como el $1-\alpha$ -ésimo cuantil de la distribución de las pérdidas de un activo.

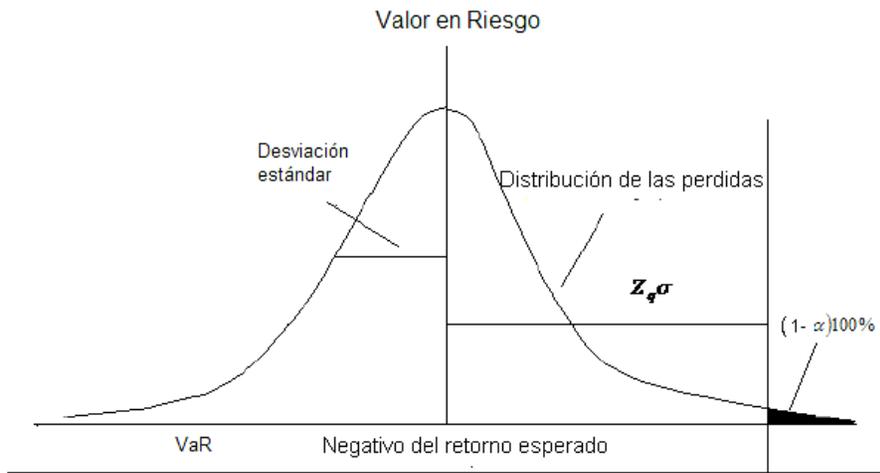


Figura 1. Ilustración del Valor en Riesgo

3.8.3. VAR en el tiempo

Sea $r_t, t=1, \dots, n$ el retorno de un activo en el tiempo t . Entonces el retorno para un periodo de k días es:

$$r_t \equiv \sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i} \tag{4.6}$$

Por lo tanto el valor esperado y la varianza de r_i son:

$$E\left[\sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i}\right] = \sum_{i=0}^{k-1} E[r_{t-i}] \quad (4.7)$$

$$Var\left[\sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i}\right] = \sum_{i=0}^{k-1} var[r_{t-i}] + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{k-1} cov[r_{t-i}, r_{t-j}] \quad (4.8)$$

Si los retornos son iid, entonces $cov[r_{t-i}, r_{t-j}] = 0, i \neq j$, $Var[r_{t-i}] = \sigma^2$ y $E[r_{t-i}] = \mu$ entonces

$$E\left[\sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i}\right] = k\mu \quad (4.9)$$

$$Var\left[\sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i}\right] = k\sigma^2 \quad (4.10)$$

Y finalmente, suponiendo una distribución normal para los retornos se tiene:

$$VAR\left[\sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i}\right] = k\mu + \sqrt{k} z_{\alpha} \sigma \quad (4.11)$$

A esta propiedad sobre el valor en riesgo en los retornos logarítmicos se le conoce como la regla de la raíz cuadrada del Tiempo (Melo-Velandia *et al.*, 2005).

3.8.4. Función de verosimilitud

Para poder entender mejor el desarrollo de los procesos siguientes conviene explicar a detalle la función de verosimilitud sobre los retornos.

Se define a la distribución condicional de X dado Y como:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \quad (4.12)$$

Así pues se tiene que:

$$f(x, y) = f(x|y) f(y) \quad (4.13)$$

De manera análoga para el caso de dos retornos consecutivos r_1 y r_2 :

$$f(r_2, r_1) = f(r_2|r_1) f(r_1) \quad (4.14)$$

Para tres retornos r_1, r_2 y r_3 , por repetidas sustituciones se tiene:

$$\begin{aligned}
f(r_3, r_2, r_1) &= f(r_3 | r_2, r_1) f(r_2, r_1) \\
&= f(r_3 | r_2, r_1) f(r_2 | r_1) f(r_1)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

y en general tenemos:

$$\begin{aligned}
f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) &= f(r_T | r_{T-1}, \dots, r_1) \\
&= f(r_T | r_{T-1}, \dots, r_1) f(r_{T-1}, \dots, r_1) \\
&= \left[\prod_{t=2}^T f(r_t | r_{t-1}, \dots, r_1) \right] f(r_1)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Si $r_t | r_{t-1}, \dots, r_1$ se distribuye normal con media μ_t y varianza σ_t^2 , entonces la verosimilitud es:

$$f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) = \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} \exp\left[-\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right] f(r_1) \tag{4.17}$$

por simplicidad $f(r_1)$ es ignorado y la función de verosimilitud se convierte en:

$$f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) = \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} \exp\left[-\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right] \tag{4.18}$$

Esta nueva función es conocida como la función de verosimilitud condicional bajo normalidad (Tsay, 2002).

3.9. Series Temporales

3.9.1. Estacionalidad

La base de las series de tiempo es la estacionalidad. Una serie r_t es estrictamente estacionaria si la distribución conjunta de r_1, \dots, r_k es idéntica a la distribución de r_{1+h}, \dots, r_{k+h} para toda h en enteros positivos.

Una serie r_t es débilmente estacionaria si la media de r_t y la covarianza entre r_t y r_{t-l} son invariantes en el tiempo, en otras palabras, r_t es débilmente estacionaria si $E(r_t) = \mu$, la cual es constante y si $\text{cov}(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$, la cual solo depende de l.

Se dice que una serie r_t es lineal si:

$$r_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \quad (4.19)$$

Donde μ es la media de r_t , $\psi_0 = 1$ y ε_t es una secuencia de variables independientes y idénticamente distribuidas con media cero.

3.9.2. Función de correlación y autocorrelación

La autocorrelación entre dos series se define como:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sqrt{E[(X - \mu_X)^2]E[(Y - \mu_Y)^2]}} \quad (4.20)$$

donde μ_X y μ_Y son la media de X y Y respectivamente, y en las cuales se asume que la varianza existe.

Cuando la muestra $\{x_t, y_t\}_{t=1}^T$ es disponible, la correlación puede ser estimada por la contraparte muestral:

$$\hat{\rho}_{x,y} = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2 \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}} \quad (4.21)$$

Considere una serie débilmente estacionaria. El coeficiente de correlación entre r_t y r_{t-l} es denotado como $\rho(l)$ y solo depende de l . Esta definida como:

$$\rho(l) = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{Var(r_t)Var(r_{t-l})}} = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{Var(r_t)} = \frac{\gamma(l)}{\gamma(0)} \quad (4.22)$$

donde debido a la estacionalidad débil se tiene que $Var(r_t) = Var(r_{t-l})$.

Para una muestra $\{r_t\}_{t=1}^T$ sea \bar{r} la media muestral $\bar{r} = \sum_{i=1}^T \frac{r_i}{T}$ entonces definamos la correlación muestral como:

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^T (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}, \quad 0 \leq l \leq T-1. \quad (4.23)$$

En muestras finitas, $\hat{\rho}_l$ es un estimador de ρ_l . El sesgo está en el orden de $1/T$ y en muestras pequeñas es significativo.

Para probar que si una correlación es cero: $H_0: \rho_1 = 0$ vs $H_a: \rho_1 \neq 0$ se usa siguiente estadístico:

$$t = \frac{\hat{\rho}_1}{\sqrt{1/T}} = \sqrt{T} \hat{\rho}_1 \quad (4.24)$$

el cual es asintóticamente normal y se rechaza H_0 si $|t| > Z_{\alpha/2}$.

Para probar si todas las correlaciones son cero se utiliza el estadístico de Ljung-Box:

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_m = 0 \text{ vs } H_a: \rho_i \neq 0$$

$$Q(m) = T \left(1 + 2 \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l}{T-l} \right) \quad (4.25)$$

el cual tiene una distribución asintótica chi-cuadrada con m grados de libertad y se rechaza H_0 si $Q(m) > \chi_m^2$.

Para series lineales y débilmente estacionarias encontramos que la media es:

$$E(r_t) = E\left(\mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right) = \mu \quad (4.26)$$

puesto que $E(\varepsilon_{t-i}) = 0, i = 1, \dots, \infty$.

Además la covarianza entre r_t y r_{t-l} es:

$$\begin{aligned}
\gamma &= Cov(r_t, r_{t-1}) = Cov\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-1-j}\right) \\
&= E\left(\sum_{i,j} \psi_i \psi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-1-j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+1} \psi_j E(\varepsilon_{t-1-j}^2) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+1} \psi_j
\end{aligned} \tag{4.27}$$

3.9.3. Criterio de información

El criterio de información es un estadístico usado para determinar el orden de p en un modelo autorregresivo. El más conocido es el criterio de información de Akaike definido como:

$$AIC = \frac{-2}{T} \ln(\text{verosimilitud}) + \frac{2}{T} \times (\text{Número de parametros}) \tag{4.28}$$

donde la verosimilitud esta evaluada en los estimadores de máxima verosimilitud y T es el tamaño de la muestra. Para un modelo normal el AIC se reduce a:

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}_t^2) + \frac{2l}{T} \tag{4.29}$$

donde $\hat{\sigma}_t^2$ es el estimador de máxima verosimilitud de σ_ε^2 el cual es la varianza de ε .

3.9.4. Tipos de modelos

Los modelos que pueden ser utilizados para el cálculo del pronóstico de la media de los retornos son los modelos auto-regresivos (AR), los modelos de medias móviles (MA) y los modelos ARMA:

3.9.4.1. Modelos auto-regresivos

Un simple modelo que consta de un solo parámetro es el conocido como autorregresivo de orden 1, AR(1):

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.30}$$

En este modelo el valor de r_t depende del retorno pasado r_{t-1} :

$$E\{r_{t-1} | r_{t-1}\} = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} \quad \text{Var}\{r_{t-1} | r_{t-1}\} = \text{Var}\{r_{t-1}\} = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.31)$$

Note que:

$$E\{r_t | r_{t-1}\} = \phi_0 + \phi_1 E\{r_{t-1} | r_{t-1}\} \quad (4.32)$$

Bajo la condición de estacionalidad, $E\{r_t | r_{t-1}\} = E\{r_{t-1} | r_{t-1}\} = \mu$ y así:

$$\mu = \phi_0 + \phi_1 \mu \quad \rightarrow \quad E\{r_t | r_{t-1}\} = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} \quad (4.33)$$

Además usando $\phi_0 = \phi_0 - \phi_1 \mu$, el modelo AR(1) puede ser escrito como:

$$r_t - \mu = \phi_1 (r_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad (4.34)$$

Sustituyendo la ecuación anterior repetidas veces tenemos:

$$\begin{aligned} r_t - \mu &= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Usando la propiedad de independencia de la serie ε_t , tenemos que $E\{\varepsilon_{t+i} | \varepsilon_t\} = 0$, por lo que $E\{r_{t-1} - \mu | \varepsilon_t\} = 0$ y así:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{r_t | r_{t-1}\} &= E\{r_t - \mu | r_{t-1}\}^2 = E\{\phi_1 (r_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t | r_{t-1}\}^2 \\ &= \phi_1^2 E\{r_{t-1} - \mu | r_{t-1}\}^2 - 2\phi_1 E\{r_{t-1} - \mu | r_{t-1}\} E\{\varepsilon_t | r_{t-1}\} \\ &= \phi_1^2 \text{Var}\{r_{t-1} | r_{t-1}\} + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

debido a la condición de estacionalidad, $\text{Var}\{r_t | r_{t-1}\} = \text{Var}\{r_{t-1} | r_{t-1}\}$ y concluimos:

$$\text{Var}\{r_t | r_{t-1}\} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \quad (4.37)$$

Al generalizar este tipo de modelos llegamos al modelo autorregresivo de orden p, AR(p) el cual tiene media igual a:

$$E\{r_t | r_{t-1}\} = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} \quad (4.38)$$

3.9.4.1.1. Determinación del orden del modelo

La función de autocorrelación parcial es usada para determinar el orden de un modelo AR(p), considere los siguientes modelos AR consecutivos:

$$\begin{aligned}
 r_t &= \phi_{0,1} + \phi_{1,1}r_{t-1} + e_{1t} \\
 r_t &= \phi_{0,2} + \phi_{1,2}r_{t-1} + \phi_{2,2}r_{t-2} + e_{2t} \\
 r_t &= \phi_{0,3} + \phi_{1,3}r_{t-1} + \phi_{2,3}r_{t-2} + \phi_{3,3}r_{t-3} + e_{3t} \\
 r_t &= \phi_{0,4} + \phi_{1,4}r_{t-1} + \phi_{2,4}r_{t-2} + \phi_{3,4}r_{t-3} + \phi_{4,4}r_{t-4} + e_{4t} \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Estos modelos son de la forma de una regresión lineal múltiple y los estimadores $\hat{\phi}_{i,j}$ pueden ser estimados mediante mínimos cuadrados. Note que esta ecuación $\hat{\phi}_{i,j}$ representa la contribución a la explicación del modelo de la variable r_{t-j} , por lo que en un modelo AR(p) el coeficiente $\hat{\phi}_{i,j}$ debería ser cercano a cero si $j > p$. El coeficiente $\hat{\phi}_{i,j}$ es conocido la función de autocorrelación parcial muestral a distancia j (PACF por sus siglas en ingles).

3.9.4.1.2. Estimación de los parámetros

Para la estimación de los parámetros en un modelo AR(p), se usa el método de mínimos cuadrados condicionales (Tsay, 2002). Específicamente condicionando sobre las primeras p observaciones, tenemos:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = p+1, \dots, T \tag{4.40}$$

El cual puede ser estimado por el método de mínimos cuadrados. Denotando el estimador de ϕ_i por $\hat{\phi}_i$, El modelo ajustado es:

$$r_t = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 r_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p r_{t-p} \tag{4.41}$$

con los residuales asociados:

$$\hat{\varepsilon}_t = r_t - \hat{r}_t \tag{4.42}$$

de los cuales podemos obtener $\hat{\sigma}_t^2$ como:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_{t=p+1}^T \varepsilon_t^2}{T-2p-1} \quad (4.43)$$

3.9.4.1.3. Pronostico

Para un modelo AR(p) supóngase que estamos en el tiempo h y estamos interesados en predecir a r_{h+l} , con $l > 1$. El índice h es llamado el origen del pronóstico y l es conocido como el horizonte del pronóstico.

Sea \hat{r}_h el pronóstico de r_{h+l} usando mínimos cuadrados, el pronóstico a un paso de r_{h+1} esta dado por la esperanza condicional:

$$\hat{r}_h = E(r_{h+1} | r_h, r_{h-1}, \dots) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{h+1-i} \quad (4.44)$$

con su respectivo error:

$$e_h = r_{h+1} - \hat{r}_h = \varepsilon_{h+1} \quad (4.45)$$

Consecuentemente la varianza del error de la predicción a un paso es:

$$Var(e_h) = Var(\varepsilon_{h+1}) = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.46)$$

Si ε_t están normalmente distribuidos entonces el intervalo al 95% de confianza para el pronóstico a un paso es $\hat{r}_h \pm 1.96\sigma_\varepsilon$.

En general nosotros tenemos:

$$r_{h+l} = \phi_0 + \phi_1 r_{h+l-1} + \dots + \phi_p r_{h+l-p} + \varepsilon_{h+l} \quad (4.47)$$

El pronóstico a l pasos de r_{h+l} basado en la función de mínimos cuadrados es la esperanza condicional de r_{h+l} dados los $\{r_{h-i}\}_{i=0}^{l-1}$, los cuales son obtenidos como:

$$\hat{r}_h = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{r}_{h-i} \quad (4.48)$$

donde $\hat{r}_h = r_{h+i}$ si $i \leq 0$. El pronóstico puede ser calculado recursivamente usando \hat{r}_h para $i = 1, \dots, l-1$.

El error del pronóstico a l pasos es:

$$e_h \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{h+l} + \sum_{i=1}^{l-1} \phi_h \varepsilon_{h+l-i} \quad (4.49)$$

por lo que la varianza del pronóstico a l pasos es:

$$\text{Var} \left(e_h \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + \sum_{i=1}^{l-1} \phi_h^2 \right) \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.50)$$

3.9.4.2. Modelos de media móvil

Para la introducción de estos modelos considérese el siguiente modelo autorregresivo de orden infinito.

$$r_t = \phi_0 - \theta_1 r_{t-1} - \theta_1^2 r_{t-2} - \theta_1^3 r_{t-3} - \dots + \varepsilon_t \quad (4.51)$$

donde los coeficientes dependen de un único parámetro θ_1 vía $\phi_i = -\theta_1^i$ para $i \geq 1$. Para que este modelo sea estacionario $|\theta_1| < 1$, así tendríamos que $\theta_1^i \rightarrow 0$ conforme $i \rightarrow \infty$

lo cual representa es razonable ya que la contribución de r_{t-i} a r_t decae exponencialmente conforme se incrementa el tiempo i .

El modelo anterior puede ser escrito de una forma más compacta (Tsay, 2002). Para ver esto reescribimos al modelo como:

$$r_t + \theta_1 r_{t-1} + \theta_1^2 r_{t-2} + \theta_1^3 r_{t-3} + \dots = \phi_0 + \varepsilon_t \quad (4.52)$$

el modelo para r_{t-1} es:

$$r_{t-1} + \theta_1 r_{t-2} + \theta_1^2 r_{t-3} + \dots = \phi_0 + \varepsilon_{t-1} \quad (4.53)$$

Multiplicando la ecuación anterior por θ_1 y restándola de X tenemos que:

$$r_t = \phi_0 - \theta_1 \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (4.54)$$

El modelo anterior depende de los errores ε_t y ε_{t-1} . Este modelo es conocido como media móvil de orden 1 o MA(1).

Un modelo más general es el MA(q) que tiene la siguiente estructura:

$$r_t = c_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (4.55)$$

donde $q > 0$.

Tomando esperanzas al modelo tenemos que:

$$\begin{aligned} E\hat{r}_t &= c_0, \\ \text{Var}\hat{r}_t &= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

3.9.4.2.1. Identificación del modelo

La función de autocorrelación muestral es usada para identificar el orden de un modelo MA(q). Para una serie r_t con ACF $\rho(l)$, si $\rho(l) \neq 0$ para $l \leq q$ y $\rho(l) = 0$ para $l > q$, entonces r_t sigue un modelo MA(q).

3.9.4.2.2. Pronóstico usando modelos MA(q)

Para el pronóstico a un paso de un modelo MA(1) el modelo dice:

$$r_{h+1} = c_0 + \varepsilon_{h+1} - \theta_1 \varepsilon_h \quad (4.57)$$

Tomando la esperanza condicional tenemos:

$$\hat{r}_h = E(r_{h+1} | r_h, r_{h-1}, \dots) = c_0 - \theta_1 \varepsilon_h \quad (4.58)$$

$$e_h = r_{h+1} - \hat{r}_h = \varepsilon_{h+1} \quad (4.59)$$

$$\text{Var}(e_h) = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.60)$$

En la práctica la cantidad ε_h puede ser obtenida de varias formas. Por ejemplo, asumimos que $\varepsilon_0 = 0$, entonces $\varepsilon_1 = r_1 - c_0$ y calculamos ε_t para $2 \leq t \leq h$ recursivamente usando $\varepsilon_t = r_t - c_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$.

Para el pronóstico a dos pasos de un modelo MA(1) es:

$$r_{h+2} = c_0 + \varepsilon_{h+2} - \theta_1 \varepsilon_{h+1} \quad (4.61)$$

Tomando la esperanza condicional tenemos:

$$\hat{r}_h = E(r_{h+2} | r_h, r_{h-1}, \dots) = c_0 \quad (4.62)$$

$$e_h = r_{h+2} - \hat{r}_h = \varepsilon_{h+2} - \theta_1 \varepsilon_{h+1} \quad (4.63)$$

$$\text{Var}(\hat{r}_h) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2) \quad (4.64)$$

Similarmente para un MA(2) , el modelo para r_{t+l} es:

$$r_{t+l} = c_0 + \varepsilon_{t+l} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-1} - \theta_2 \varepsilon_{t+l-2} \quad (4.65)$$

del cual obtenemos:

$$\hat{r}_h = c_0 - \theta_1 \varepsilon_h - \theta_2 \varepsilon_{h-1} \quad (4.66)$$

$$\hat{r}_h = c_0 - \theta_2 \varepsilon_h \quad (4.67)$$

$$\hat{r}_h = c_0 \quad \text{para } l > 2 \quad (4.68)$$

En general para un modelo MA(q) el pronóstico mayor a q pasos será igual a la media (Tsay, 2002).

3.9.4.3. Modelos ARMA

Un modelo general ARMA es de la forma:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (4.69)$$

donde ε_t es ruido blanco y p y q son enteros no negativos.

3.9.4.3.1. Pronóstico usando modelos ARMA

Sea h el tiempo origen del pronóstico, el pronóstico a 1 pasos del modelo arma es:

$$\hat{r}_h = E(r_{h+1} | r_h, r_{h-1}, \dots) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{h+1-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i r_{h+1-i}, \quad (4.70)$$

$$e_h = r_{h+1} - \hat{r}_h = \varepsilon_{h+1} \quad (4.71)$$

$$\text{Var}(\hat{r}_h) = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.72)$$

Para el pronóstico a l pasos tenemos:

$$\hat{r}_h = E(r_{h+l} | r_h, r_{h-1}, \dots) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{r}_h(-i) - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_h(-j) \quad (4.73)$$

donde:

$$\hat{r}_h \leftarrow -i \rightrightarrows r_{h+l-i} \text{ si } l-i \leq 0 \quad (4.74)$$

$$\varepsilon_h \leftarrow -i \rightrightarrows 0 \text{ si } l-i > 0 \quad (4.75)$$

$$\varepsilon_h \leftarrow -i \rightrightarrows \varepsilon_{h+l-i} \text{ si } l-i \leq 0 \quad (4.76)$$

La explicación exhaustiva del uso de las series temporales, queda fuera del alcance de este trabajo para mayores referencias vease Tsay (2002).

3.10. Modelos de volatilidad

La volatilidad se define como la varianza condicional de los retornos de los activos. Es un factor importante en la valoración de opciones y el mercado financiero (Tsay, 2002).

Aunque las correlaciones de los retornos son pequeñas, las correlaciones de los retornos al cuadrado son altas, por lo que lo más apropiado para su estudio es utilizar modelos de series de tiempo (Bhattacharyya y Ritolia, 2008).

Los modelos más usados para explicar estos casos son los modelos de volatilidad dinámica de la forma:

$$r_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (4.77)$$

donde r_t es el retorno en el tiempo t, μ_t es la media esperada para el retorno en el tiempo t, σ_t es la volatilidad en el tiempo t y Z_t es la parte estocástica del modelo la cual depende de los residuales.

3.10.1. Modelos de heterocedasticidad condicional

Engels en 1982 introdujo los primeros modelos sistemáticos para trabajar la volatilidad, el modelo propuesto fue conocido como el modelo ARCH(q) el cuál se describe a continuación:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (4.78)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \quad (4.79)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (4.80)$$

Donde r_t es el retorno, μ_t es la media esperada de los retornos, ε_t es el error de predicción, z_t es una variable aleatoria con media cero y varianza unitaria, y finalmente los a_i 's son los coeficientes del modelo ARCH (q).

En 1986 Bollerslev amplió estos modelos añadiendo a la ecuación de la varianza las estimaciones de la varianza en periodos anteriores, estos modelos fueron conocidos como modelos autoregresivos generalizados de heterocedasticidad condicional, el GARCH(p,q):

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.81)$$

Donde $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$ para $i=1, \dots, q$, y $b_j \geq 0$ para $j=1, \dots, p$. además se debe cumplir que

$$\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1 \quad \text{para que la varianza incondicional de } \varepsilon_t \text{ sea finita.}$$

Para comprender mejor las propiedades de los modelos Garch se suele representar con la siguiente representación. Sea $\eta_t = \varepsilon_t - \sigma_t$ así $\sigma_t = \varepsilon_t - \eta_t$ y sustituyendo $\sigma_{t-i} = \varepsilon_{t-i} - \eta_{t-i}$ el modelo queda como:

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + b_j) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_{j-1} \eta_{t-j} + \eta_t \quad (4.82)$$

con $m = \max(p, q)$

Es fácil observar que η_t es una martingala i.e. $E[\eta_t] = 0$ y $\text{cov}(\eta_t, \eta_{t-j}) = 0$ para $j > 1$. Sin embargo la serie η_t no es en general iid (Tsay, 2002). La ecuación 5.82 tiene la forma de una serie ARMA, y de la media incondicional del modelo ARMA tenemos que:

$$E\{\varepsilon_t^2\} = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (a_i + b_i)} \quad (4.83)$$

Observando el modelo GARCH(1,1) caso se puede apreciar fácilmente que periodos con alta varianza le siguen periodos con alta varianza

Note que un modelo GARCH(p,q) puede ser representado como:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2 = a_0 + a \varepsilon_t^2 + b \sigma_t^2 \quad (4.84)$$

Por otra parte si $1 - b \neq 0$ donde b es el resultado de sustituir 1 en el polinomio b se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 - b \sigma_t^2 &= a_0 + a \varepsilon_t^2 \\ \sigma_t^2 &= \frac{a_0 + a \varepsilon_t^2}{1 - b} = \frac{a_0}{1 - b} + \left(\frac{a}{1 - b} \right) \varepsilon_t^2 \\ \sigma_t^2 &= \frac{a_0}{1 - b} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned} \quad (4.85)$$

Por lo que un proceso GARCH(1,1) es equivalente a un proceso ARCH(p) con infinito número de parámetros p, y cada uno de los α_i viene dada por la expansión de la expresión $\frac{a}{1 - b}$.

3.10.2. Kurtosis

Se desarrollara la kurtosis para el caso más simple, un modelo ARCH(1), la ecuaciones para modelos de orden superior son más complicadas, pero básicamente el desarrollo y los resultados son similares. Así pues, tenemos ε_t es un proceso estacionario se tiene que $E\{\varepsilon_t\} = 0$, y su varianza incondicional es $Var\{\varepsilon_t\} = Var\{\varepsilon_{t-1}\} = E\{\varepsilon_{t-1}^2\}$, por lo que $Var\{\varepsilon_t\} = a_0 + a_1 Var\{\varepsilon_{t-1}\}$

Finalmente:

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \quad (4.86)$$

Así la kurtosis de los errores es:

$$E(\epsilon_t^4) = E(\epsilon_t^4 \sigma_t^4), \text{ si } z \text{ se distribuye normal entonces } E(\epsilon_t^4) = 3 \text{ y } E(\epsilon_t^4) = 3E(\epsilon_t^4)$$

$$\text{De esta manera } E(\epsilon_t^4) = 3E(\alpha_0 + a_1 \epsilon_{t-1}^2) = 3E(\alpha_0^2 + 2a_0 a_1 \epsilon_{t-1}^2 + a_1^2 \epsilon_{t-1}^4)$$

Si ϵ_t es estacionario de cuarto orden entonces $E(\epsilon_t^4) = E(\epsilon_{t-1}^4)$ y:

$$E(\epsilon_t^4) = 3(\alpha_0^2 + 2a_0 a_1 \text{Var}(\epsilon_t) + a_1^2 E(\epsilon_{t-1}^4))$$

$$E(\epsilon_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1+a_1)}{(1-a_1)(1-3a_1^2)} \quad (4.87)$$

La kurtosis incondicional el Modelo ARCH (1) es:

$$\frac{E(\epsilon_t^4)}{\text{Var}(\epsilon_t)^2} = \left[\frac{3\alpha_0^2(1+a_1)}{(1-a_1)(1-3a_1^2)} \right] \left[\frac{(1-a_1)^2}{\alpha_0^2} \right] = 3 \left[\frac{1-a_1^2}{1-3a_1^2} \right] > 3 \quad (4.88)$$

Además se puede demostrar que si $1-2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1) > 0$ entonces para un modelo GARCH(1,1):

$$\frac{E(\epsilon_t^4)}{E(\epsilon_t^2)^2} = \frac{3(1-\alpha_1 + b_1)}{1 - (\alpha_1 + b_1) - 2\alpha_1^2} > 3 \quad (4.89)$$

Lo que implica que los colas de la distribución de ϵ_t en los Modelos ARCH(1) y GARCH(1,1) son de colas más pesadas que las de la distribución normal.

Para el caso de la distribución t con v grados de libertad, se tiene que $E(\epsilon_t^4) = \frac{6}{v-4} + 3$

por lo que si $v > 4$ entonces las colas de la distribución t son más pesadas que la de la una variable aleatoria z con distribución normal, en donde $E(\epsilon_t^4) = 3$.

Pruebas para detectar colas pesadas.

Sea r_t una serie estacionaria, defínase:

$$\text{media muestral: } \hat{\mu}_r = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t \quad (4.90)$$

$$\text{Varianza muestral: } \hat{\sigma}_r^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu}_r)^2 \quad (4.91)$$

$$\text{Asimetría muestral: } \hat{S}_r = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_r^3} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu}_r)^3 \quad (4.92)$$

$$\text{Curtosis muestral: } \hat{K}_r = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_r^4} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu}_r)^4 \quad (4.93)$$

Bajo el supuesto de normalidad se tiene que:

$$\hat{S}_r \sim N\left(0, \frac{6}{T}\right), \quad \hat{K}_r \sim N\left(0, \frac{24}{T}\right) \quad (4.94)$$

Así la prueba para probar asimetría se basa en:

$$S^* = \frac{\hat{S}_r}{\sqrt{6/T}} \sim N(0,1) \quad (4.95)$$

Se rechaza H_0 : existe normalidad en los datos si $|S^*| > Z_{\alpha/2}$

De igual manera la prueba para probar colas pesadas (exceso de kurtosis) se basa en:

$$K^* = \frac{\hat{K}_r - 3}{\sqrt{24/T}} \sim N(0,1) \quad (4.96)$$

Se rechaza H_0 : distribución con colas normales si $|K^*| > Z_{\alpha/2}$.

Se puede probar conjuntamente las dos pruebas anteriores (para asimetría y kurtosis), con el estadístico de Jarque-Bera:

$$JB = (S^*)^2 + (K^*)^2 \sim \chi_2^2 \quad (4.97)$$

Donde la χ_2^2 denota una distribución ji-cuadrada con 2 grados de libertad.

La prueba consiste en entonces rechazar H_0 : de normalidad si $JB > \chi_2^2$.

3.10.3. Estimación

Nuevamente se explicará la estimación para el Modelo ARCH(m), esto por que el desarrollo para modelos mas complicados es idéntico, y la única diferencia es la forma de estimar recursivamente la varianza.

La estimación más común se hace por el método de máxima verosimilitud (Tsay, 2002). En este caso la función de máxima verosimilitud para un modelo ARCH(m) es:

$$f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_T | a) = f(\epsilon_T | F_{T-1}) f(\epsilon_{T-1} | F_{T-2}) \dots f(\epsilon_{T-m} | F_{T-m}) f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m | a) \quad (4.98)$$

$$= \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{2\pi\sigma_t^2} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \times f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m | a) \quad (4.99)$$

Donde $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ y $f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m | a)$ es la densidad conjunta de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$. Generalmente esta última expresión es muy complicada y solo se utiliza la función de verosimilitud condicional:

$$f(\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_T | a, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{2\pi\sigma_t^2} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (4.100)$$

El logaritmo de la verosimilitud es:

$$l(\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_T | a, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = \sum_{t=m+1}^T -\ln \pi - \frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (4.101)$$

Y finalmente como 2π no contiene parámetros se tiene que:

$$l(\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_T | a, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (4.102)$$

En algunos casos se tiene que ϵ_t tiene una distribución de colas pesadas, tal como la distribución t de student o la distribución de errores generalizada (GED por sus siglas en ingles). Para el caso de la distribución t de student se tiene que la si x_v tiene

distribución t de student con v grados de libertad entonces su varianza es $v/v-2$ para $v > 2$, y se tiene que $z_i = x_v / \sqrt{v/v-2}$. (Recuerde que z_i tiene distribución con media cero y varianza unitaria). Por lo tanto la función de densidad de ε_i es:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi(v-2)}} \left(1 + \frac{z_i^2}{v-2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \quad v > 2 \quad (4.103)$$

Donde $\Gamma(x)$ es la función gamma evaluada en x :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy \quad (4.104)$$

Recordando que $\varepsilon_i = z_i \sigma_i$, se tiene que la función de verosimilitud condicional es:

$$f(\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_T | a, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi(v-2)}} \frac{1}{\sigma_i} \left[1 + \frac{\varepsilon_i^2}{(v-2)\sigma_i^2}\right]^{-\frac{v+1}{2}} \quad (4.105)$$

Donde $v > 2$.

Por lo que el logaritmo de la verosimilitud es:

$$l(\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_T | a, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \sum_{i=m+1}^T \left[\frac{v+1}{2} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_i^2}{(v-2)\sigma_i^2}\right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right) \right] \quad (4.106)$$

La ecuación anterior se aplica cuando los grados de libertad son especificados, y generalmente se utilizan valores para v de entre 3 y 6 grados (Angelis *et al*, 2004).

Si se desea estimar conjuntamente los grados con los parámetros de los modelos se utiliza la siguiente log-verosimilitud:

$$l(\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_T | a, v, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = (T-m) \ln \left(\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi(v-2)}}\right) + l(\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_T | a, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \quad (4.107)$$

Finalmente Nelson sugirió otra distribución de colas pesadas, la distribución de errores generalizada, cuya función de densidad es:

$$D(\varepsilon_i; v) = \frac{v \exp\left(-0.5|z_i/\lambda|^v\right)}{2\left(\frac{1+v}{v}\right)\Gamma\left(\frac{1+v}{v}\right)}, \quad v > 0 \quad (4.108)$$

y λ es el parámetro de que tan pesada o delgada es la cola y

$$\lambda \equiv \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}{2^{\frac{2}{v}} \Gamma\left(\frac{3}{v}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.109)$$

Note que cuando $\lambda=2$, z_t se distribuye normal estándar. Para $v < 2$, esta distribución tiene colas más pesadas que la distribución normal, por ejemplo si $v=1$ entonces z_t sigue una distribución doble exponencial y para $v > 2$ esta distribución tiene colas más delgadas.

La función de log-verosimilitud para este caso es:

$$l(\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_T | a, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = \sum_{t=1}^T \left[\ln \left(\frac{v}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{\epsilon_t / \sigma_t}{\lambda} \right|^v - \left(\frac{1}{v} - 1 \right) \ln \left(\frac{1}{v} \right) - \frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 \right] \quad (4.110)$$

En general se tiene que la función de log-verosimilitud puede ser escrita en términos de la función de densidad de z_t de la siguiente forma (Angelis *et al*, 2004):

$$l(\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_T | a, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = \sum_{t=1}^T \left[\ln D(\epsilon_t; v) - \frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 \right] \quad (4.111)$$

Donde $D(\epsilon_t; v)$ es la función de densidad de z_t .

Estimación de máxima verosimilitud para Modelos ARCH

De la ecuación 5.111 se tiene que la log-verosimilitud de un modelo ARCH es:

$$\ln L = l(\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_T | a, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = \sum_{t=m+1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \right] \quad (4.112)$$

Derivando con respecto a él vector de parámetros a se tiene que:

$$\frac{d \ln L}{da} = \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{d\sigma_t^2}{da} \left[\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right] \quad (4.113)$$

$$\frac{d^2 \ln L}{dada'} = -\frac{1}{2\sigma_i^4} \frac{d\sigma_i^2}{da} \frac{d\sigma_i^2}{da'} \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2} + \left[\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2} - 1 \right] \frac{d}{da'} \left[\frac{1}{2\sigma_i^2} \frac{d\sigma_i^2}{da} \right] \quad (4.114)$$

La matriz de información, con base en la cual estimamos las varianzas de los parámetros (Recuérdese que la cota inferior de Cramer Rao para las varianzas es igual a la inversa de la matriz de información, la cual a su vez es la esperanza de la matriz hessiana de la log-verosimilitud cambiada de signo). Tomando en cuenta que $E_{t-1}(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$ se tiene $E_{t-1}(\varepsilon_i^2/h_i^2) = 1$. Por lo que la matriz de información resulta:

$$l_{aa} = -\sum_t E_{t-1} \left[\frac{d^2 \ln L}{dada'} \right] = \sum_t \frac{1}{2\sigma_i^4} \frac{d\sigma_i^2}{da} \frac{d\sigma_i^2}{da'} \quad (4.115)$$

Por otra parte note que

$$\sigma_i^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \varepsilon_{t-p}^2 \rightarrow \sigma_i^2 = z_i' a \quad (4.116)$$

Donde:

$$z_i' = (\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-p}^2) \quad (4.117)$$

$$a' = (a_0, a_1, \dots, a_p) \quad (4.118)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\sigma_i^2}{da} = z_i \quad (4.119)$$

Y la expresión 5.113 queda como:

$$\frac{d \ln L}{da} = \frac{1}{2\sigma_i^2} z_i \left[\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2} - 1 \right] \quad (4.120)$$

Y la matriz de información queda como:

$$l_{aa} = \frac{1}{2} \sum_t \frac{z_i z_i'}{\sigma_i^4} \quad (4.121)$$

Estas expresiones resultan útiles para programar la estimación numérica de los parámetros, y el algoritmo de tipo scoring iterativo (Novales *et al.*,1993) para encontrar los estimadores es:

$$\begin{aligned}
 a_{i+1} &= a_i + \left(\sum_{t=1}^T \tilde{Z}'_t \right)^{-1} \tilde{Z}'_i W_i \\
 \text{donde} \\
 \tilde{z}'_i &= \left(\varepsilon_{i-1}^2, \dots, \varepsilon_{i-p}^2 \right) h_i^2 \\
 Z'_i &= \left(\tilde{z}'_1, \tilde{z}'_2, \dots, \tilde{z}'_T \right) \\
 w_i &= \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2} - 1 \\
 W' &= \left(w_1, w_2, \dots, w_T \right)
 \end{aligned} \tag{4.122}$$

Los incrementos correspondiente en cada iteración es igual al valor de los coeficientes obtenidos en una regresión de la variable \tilde{z}' sobre w . En este caso h_i^2 es calculado con base en los parámetros obtenidos en la iteración anterior.

La varianza de los estimadores se obtiene con base en la inversa de la matriz de información que para este caso sería $2 \left(\sum_{t=1}^T \tilde{Z}'_t \right)^{-1}$, (Saez-Zafra *et al.*,1994).

3.10.4. Identificación del modelo GARCH(p,q)

De secciones anteriores se demostró que si se hace la sustitución $\eta_t = \varepsilon_t - \sigma_t$ el modelo queda como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_t^2 &= a_0 + \sum_{i=1}^m \left(a_i + b_j \right) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_{j-1} \eta_{t-j} + \eta_t \\
 \text{con } m &= \max(p, q)
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

El modelo anterior cual sigue un proceso ARMA(m,p) con un término de error sin autocorrelación, por lo cual Bollerslev en 1986 sugirió usar la autocorrelación simple y parcial del modelo anterior para determinar el orden del modelo GARCH (p,q).

3.10.5. Pronósticos

Considere el modelo GARCH(1,1) y considere que estamos en el tiempo h. Para el pronóstico a un paso hacia delante, tenemos:

$$\sigma_{h+1}^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_h^2 + b_1 \sigma_h^2 \quad (4.124)$$

Donde ε_h^2 y σ_h^2 son conocidos en el tiempo h. Así entonces se tiene que el pronóstico a un paso hacia delante es:

$$\widehat{\sigma}_h^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_h^2 + b_1 \sigma_h^2 \quad (4.125)$$

Para pronósticos de n pasos hacia delante, usamos $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 z_t^2$, y describimos la función de volatilidad como:

$$\sigma_{t+1}^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_t^2 + b_1 \widehat{\sigma}_t^2 + a_1 \sigma_t^2 (z_t^2 - 1) \quad (4.126)$$

Cuando $t = h+1$, la ecuación se convierte en:

$$\sigma_{h+2}^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{h+1}^2 + b_1 \widehat{\sigma}_{h+1}^2 + a_1 \sigma_{h+1}^2 (z_{h+1}^2 - 1) \quad (4.127)$$

Debido a que $E(z_t^2 - 1 | F_h) = 0$, el pronóstico de la volatilidad a 2 pasos de h satisface la ecuación:

$$\widehat{\sigma}_h^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_h^2 + b_1 \widehat{\sigma}_h^2 \quad (4.128)$$

En general, nosotros tenemos

$$\widehat{\sigma}_h^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_h^2 + b_1 \widehat{\sigma}_h^2 (l > 1). \quad (4.129)$$

3.10.6. Pruebas de Ajuste del modelo GARCH

Para probar el ajuste se examinan las series

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \quad (4.130)$$

En particular la estadística de Ljung-Box sobre la serie z_t puede ser usada para checar el ajuste de la media al modelo y la estadística de Ljung-Box sobre la serie z_t^2 para checar el ajuste de la ecuación de la volatilidad (Tsay, 2002).

3.11. Estimación en una serie ARMA-GARCH

Los parámetros estimados de un modelo ARMA-GARCH se encuentran maximizando la función de Quasi-verosimilitud (Francq y Zakoian, 2004) definida anteriormente como:

$$l(\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_T | a, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (4.131)$$

donde $\epsilon_t : 1 \leq t \leq n$ y $\sigma_t^2 : 1 \leq t \leq n$ son procesos definidos recursivamente por:

$$\epsilon_t = \epsilon_t = X_t - c - \sum_{i=1}^p \phi_i \epsilon_{t-i} - c + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} \quad (4.132)$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p a_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.133)$$

Con valores iniciales tomados adecuadamente (Frank y Zakoian, 2004).

3.12. Metodología *Riskmetrics*

También conocida como el método de suavizamiento exponencial, consiste en un promedio de las volatilidades pasadas de la forma:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_{t-i}^2 \quad (4.134)$$

Donde $\alpha_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow n$ y $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Si se supone que las ponderaciones decaen exponencialmente a una tasa constante, se tiene que:

$$\alpha_{i+1}/\alpha_i = \lambda \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \lambda^{i-1}\alpha \quad (4.135)$$

donde :

$$0 < \lambda < 1$$

Por lo que la expresión 5.134 es aproximadamente:

$$\sigma_t^2 \approx \left(-\lambda \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} r_{t-i}^2 \right) \quad (4.136)$$

rezagando y multiplicando por λ :

$$\lambda \sigma_{t-1}^2 \approx \left(-\lambda \sum_{i=1}^n \lambda^i r_{t-i-1}^2 \right) \quad (4.137)$$

Restando 5.137 de 5.136 y asumiendo n grande se tiene:

$$\sigma_t^2 \approx \lambda \sigma_{t-1}^2 + \left(-\lambda \tilde{r}_{t-1}^2 \right) \quad (4.138)$$

La ecuación anterior nos indica que la volatilidad está determinada por el retorno y la volatilidad del periodo anterior. El valor utilizado para λ es de 0.94 para datos diarios y de 0.97 para datos mensuales.

El valor en riesgo al $1-\alpha$ de confiabilidad, utilizando la volatilidad obtenida por Riskmetrics asumiendo una distribución normal con media cero para los retornos es entonces (Cevallos, 2007):

$$VaR_{Riskmetric} = z_{1-\alpha} \sigma_{Riskmetric} \quad (4.139)$$

3.13. Teoría de valores extremos

Alternativamente al uso de los cuantiles de la distribución de los retornos para calcular el VaR, se puede usar la distribución de los valores máximos de los retornos para modelar exclusivamente los valores extremos y usar los cuantiles de esta distribución

para obtener una mejor estimación del valor en riesgo. En este contexto, la teoría de los valores extremos juega un rol importante para encontrar la distribución de los valores máximos de una serie de datos.

3.13.1. Metodologías para encontrar los valores extremos de una serie

El primero es el llamado máximo por bloques, en donde se dividen los datos en secciones de igual tamaño y se escoge el valor más grande dentro de cada bloque. La ventaja de este método es que se escogen valores sobre todo el conjunto de datos, sin embargo, se pueden omitir los siguientes valores extremos dentro del mismo bloque que posiblemente sean mayores que el máximo dentro de otro bloque.

3.13.1.1. Máximos por bloques

En 1928 Fisher y Tippett y más tarde Gnedenko en 1943, demostraron que las únicas distribuciones límites, para modelar los valores extremos son las siguientes:

$$I). \text{Gumbel: } \Delta(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in R \quad (4.140)$$

$$II). \text{Fréchet: } \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \quad (4.141)$$

$$III). \text{Weibull: } \psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-x^\alpha) & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (4.142)$$

Donde $\alpha > 0$ se denomina el parámetro de forma para las familias Fréchet y Weibull. Este grupo de funciones es conocido como las distribuciones del valor extremo.

En términos prácticos, para la estimación de los máximos en bloques, primero se seleccionan los máximos dentro de cada bloque, se elige una distribución a priori del tipo $G(x)$ anterior y finalmente se estiman los parámetros por máxima verosimilitud.

Para evitar la selección de una función a priori, se utiliza la expresión dada por Jenkinson y Von Mises, conocida como la distribución generalizada de los valores extremos:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi x\right)^{1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0. \\ \exp(-e^{-x}) & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \quad (4.143)$$

donde $1 + \xi x > 0$. La distribución Fréchet puede ser obtenida a partir de la GEV fijando $\xi = \alpha^{-1}$, para la distribución Weibull se tiene que $\xi = -\alpha^{-1}$ y para la Gumbell $\xi = 0$.

De lo anterior se observa que es posible realizar la estimación en la metodología de máximos por bloques aplicando el método de máxima verosimilitud a la distribución GEV.

3.13.1.2. El método de picos sobre umbral POT

El método de picos sobre umbral POT, por sus siglas en inglés, selecciona los valores más grandes que sobrepasan un umbral, así la mayor parte de los resultados de este método se basa en la distribución de los excesos sobre dicho umbral.

Supóngase que se tiene una variable R con función de distribución F_R , la función condicional de R dado que es mayor que un umbral u se conoce como la distribución de los excesos de R , $F_{R,u}$, y esta dada por:

$$F_{R,u}(y) = P\{-u \leq y | R > u\} \quad (4.144)$$

donde $0 \leq y \leq R_u - u$, y R_u corresponde al extremo superior de la variable aleatoria.

En la búsqueda de la distribución de los excesos existe el siguiente teorema (Balkema y De Haan, 1974; Pickands 1795):

Para una gran clase de funciones de distribución, la distribución de los excesos de R , $F_{R,u}$, para valores grandes de u , es aproximadamente igual a:

$$F_{R,u} \approx G_{\xi,\beta} \begin{cases} 1 - (\xi y / \beta)^{1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-y/\beta) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (4.145)$$

donde $\xi \in R$, $\beta = \sigma + \xi(-\mu)$. Los parámetros ξ y β son conocidos como los parámetros de forma y escala, y $G_{\xi,\beta}$ es conocida como la distribución generalizada de Pareto, GDP por sus siglas en ingles (Pickands, 1795).

Dependiendo del valor del parámetro ξ de la GPD se obtienen tres tipos de funciones de distribución: Si $\xi > 0$, la GPD es una distribución de Pareto con parámetros $\alpha = 1/\xi, k = \beta/\xi$, para valores $y \geq 0$. Para $\xi = 0$ la GPD corresponde a una distribución exponencial con parámetro $1/\beta$ y $y \geq 0$. Finalmente si $\xi < 0$, las GPD toman la forma de una distribución tipo Pareto II, la cual esta definida en el rango $0 \leq y \leq \beta/\xi$.

3.13.1.2.1. La media de los excesos

Un parámetro importante relacionado con la distribución de los excesos es la media

$e(u)$, la cual se define como:

$$e(u) = E(-u | X > u) \quad (4.146)$$

Para el caso de la GPD, con parámetros $\beta = \beta_0 > 0$ y $\xi < 1$ la media de los excesos esta dada por:

$$e(u) = \frac{\beta_0 + \xi u}{1 - \xi} \quad (4.147)$$

En este caso en particular, la media de los excesos presenta una tendencia lineal. Si en lugar de u utilizamos un umbral $v > u$, entonces la nueva media dependerá de u y será

$$e(u) = \frac{\beta_0 + \xi(-u)}{1 - \xi} \quad (4.148)$$

3.13.1.2.2. Métodos para la selección del umbral “u”

Un método para estimar el valor de u consiste en utilizar el valor esperado de los excesos definido como:

$$\hat{e}(u) = \frac{1}{N_U} \sum_{i=1}^{N_U} (r_{(i)} - \tilde{u}) \quad (4.149)$$

Donde $r_{(1)} > r_{(2)} > \dots > r_{(N_U)}$ son las N_U observaciones mayores que \tilde{u} , $\tilde{u} < r_{\max}$ y r_{\max} corresponde a la observación más grande de la muestra. A partir de ese estimador de la media de los excesos, se analiza la tendencia de la gráfica de las parejas ordenadas $(r_{(i)}, \hat{e}(u))$. Si $G_{\xi, \beta}$ es una aproximación válida de $F_{R,u}$ para un umbral dado u^* , el gráfico de la media de los excesos debe ser aproximadamente lineal alrededor de u^* , lo cual permite seleccionar intervalos a partir de los cuales seleccionar el umbral u (Melo-Velandia et al., 2005).

3.13.2. Cálculo del Valor en Riesgo utilizando valores extremos

Sea R_t una serie de tiempo estrictamente estacionaria que representa las pérdidas de un activo. Note que la función de excesos de pérdida de R_t es:

$$F_{R,u}(y) = P(-u \leq y | R > u) = \frac{P(-u \leq y, R > u)}{P(R > u)} = \frac{P(u \leq R \leq y+u)}{P(R > u)} = \frac{F_R(y+u) - F_R(u)}{1 - F_R(u)} \quad (4.150)$$

Sea $x = y+u$, si la distribución de los máximos de R converge a la distribución generalizada de los extremos H_ξ , entonces la distribución de los excesos “y” convergen a una distribución generalizada de Pareto $G_{\xi, \beta}$, y se tiene:

$$F_{R,u}(x-u) \approx G_{\xi, \beta}(x-u)$$

Reemplazando este resultado en la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned} F_{R,u}(x-u) &\approx \frac{F_R(y+u) - F_R(u)}{1 - F_R(u)} \rightarrow G_{\xi, \beta}(x-u) \approx \frac{F_R(y+u) - F_R(u)}{1 - F_R(u)} \\ &\rightarrow F_R(x) \approx (1 - F_R(u)) G_{\xi, \beta}(x-u) + F_R(u) \end{aligned} \quad (4.151)$$

Si se conoce la función de distribución F_R , el cálculo del VaR solo requiere el cálculo de los parámetros de su distribución y encontrar el cuantil $1-\alpha$ de dicha distribución. Sin embargo, generalmente esta función es desconocida, por lo que se utiliza el resultado anterior, donde F_R depende de $F_R(\cdot)$ y de $G_{\xi, \beta}(\cdot - u)$.

Usando como estimador de $F_R(\cdot)$ a su función de distribución empírica, se llega al siguiente resultado:

$$\hat{F}_R(\cdot) = 1 - \frac{k}{n} \left(1 + \xi \frac{x-u}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\xi} \quad (4.152)$$

entonces dada la definición de valor en riesgo se tiene:

$$F_R(\text{VaR}_\alpha) = \alpha = 1 - \frac{k}{n} \left(1 + \xi \frac{\text{VaR}_\alpha - u}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\xi} \quad (4.153)$$

y despejando para el Valor en Riesgo se tiene finalmente la expresión siguiente:

$$\text{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\xi} \left(\left(\frac{1-\alpha}{k/n} \right)^{-\xi} - 1 \right) \quad (4.154)$$

4. MATERIALES Y MÉTODOS

4.1. Obtención y preparación de los datos de estudio.

Se obtuvo la serie del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores correspondiente al periodo entre el 1ro de junio de 2008 y el 30 de marzo del 2009, dicho periodo coincidió con la crisis financiera global de octubre de 2008, durante la cual se vivieron periodos con mucha volatilidad y en el cual el manejo del riesgo se convirtió en una de las principales herramientas para evitar las enormes pérdidas características de esos periodos.

Para cada uno de los valores de la serie se calculó el retorno logarítmico de la siguiente forma:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

donde P_t representa el valor del índice en el tiempo t. Es conveniente aclarar que la serie de los retornos logarítmicos es aproximadamente igual a la serie de las ganancias (retorno simple). Finalmente como debemos obtener la serie de las pérdidas simplemente cambiamos de signo a la serie anterior.

Cuadro 3. Serie de datos del IPC correspondientes al periodo del 30 de mayo del 2008 al 30 de marzo de 2009

Fecha	IPC	Fecha	IPC	Fecha	IPC	Fecha	IPC
30/03/2009	19530.15	12/01/2009	21162.27	23/10/2008	17798.99	08/08/2008	27132.79
27/03/2009	20315.17	09/01/2009	21741.29	22/10/2008	18787.34	07/08/2008	26986.98
26/03/2009	20542.25	08/01/2009	21955.4	21/10/2008	20203.27	06/08/2008	27342.39
25/03/2009	20272.77	07/01/2009	22117.51	20/10/2008	20786.21	05/08/2008	26990.19
24/03/2009	20242.61	06/01/2009	23005.41	17/10/2008	20312.83	04/08/2008	26487.76
23/03/2009	20346.43	05/01/2009	23238.86	16/10/2008	20457.93	01/08/2008	26959.18
20/03/2009	19363.3	02/01/2009	23250.96	15/10/2008	21135.42	31/07/2008	27501.02
19/03/2009	19596.51	31/12/2008	22380.32	14/10/2008	22244.61	30/07/2008	27474.04
18/03/2009	19620.48	30/12/2008	22420.01	13/10/2008	22095.89	29/07/2008	27318.64
17/03/2009	19325.05	29/12/2008	22392.38	10/10/2008	19905.27	28/07/2008	26732.84
13/03/2009	19437.01	26/12/2008	22515.34	09/10/2008	20310.2	25/07/2008	27084.77
12/03/2009	18864.87	24/12/2008	22340.7	08/10/2008	20678.97	24/07/2008	27644.75
11/03/2009	17790.69	23/12/2008	22174.26	07/10/2008	20884.74	23/07/2008	27644.75
10/03/2009	17543.52	22/12/2008	22059.18	06/10/2008	21749.13	22/07/2008	27592.24
09/03/2009	16964.36	19/12/2008	22221.64	03/10/2008	22989.5	21/07/2008	27988.47
06/03/2009	17043.44	18/12/2008	22347.17	02/10/2008	24027.35	18/07/2008	28169.77
05/03/2009	17365.02	17/12/2008	22572.5	01/10/2008	25117.32	17/07/2008	28215.86
04/03/2009	17824.96	16/12/2008	22032.54	30/09/2008	24888.9	16/07/2008	27968.82
03/03/2009	17093.25	15/12/2008	21050.55	29/09/2008	23955.67	15/07/2008	27435.8
02/03/2009	16929.8	11/12/2008	21408.35	26/09/2008	25593.77	14/07/2008	27517.11
27/02/2009	17752.18	10/12/2008	21689.84	25/09/2008	25645.5	11/07/2008	27614.54
26/02/2009	18047.16	09/12/2008	21439.65	24/09/2008	24944.25	10/07/2008	27877.33
25/02/2009	18200.7	08/12/2008	21168.72	23/09/2008	24969.17	09/07/2008	28095.79
24/02/2009	18296.11	05/12/2008	20081.83	22/09/2008	25131.91	08/07/2008	28551.25
23/02/2009	17956.4	04/12/2008	19916.21	19/09/2008	25701.03	07/07/2008	28383.53
20/02/2009	18324.23	03/12/2008	20147.01	18/09/2008	24577.9	04/07/2008	28338.12
19/02/2009	18682.47	02/12/2008	19802.27	17/09/2008	23456.84	03/07/2008	28465.55
18/02/2009	18741.27	01/12/2008	19533.08	15/09/2008	24618.15	02/07/2008	28680.83
17/02/2009	18853.93	28/11/2008	20534.72	12/09/2008	25588.41	01/07/2008	29221.11
16/02/2009	19520.87	27/11/2008	20201.82	11/09/2008	25552.49	30/06/2008	29395.49
13/02/2009	19368.1	26/11/2008	20025.79	10/09/2008	25622.91	27/06/2008	29295
12/02/2009	19358.25	25/11/2008	19297.63	09/09/2008	25629.79	26/06/2008	29199.94
11/02/2009	19446.65	24/11/2008	19529.25	08/09/2008	26232.56	25/06/2008	29569.44
10/02/2009	19825.72	21/11/2008	18251.41	05/09/2008	25904.18	24/06/2008	29291.61
09/02/2009	20537.1	20/11/2008	18190.7	04/09/2008	26151.63	23/06/2008	29464.54
06/02/2009	20438.13	19/11/2008	18578.38	03/09/2008	26467.79	20/06/2008	29533.44
05/02/2009	19736.96	18/11/2008	19036.23	02/09/2008	26522.76	19/06/2008	29847.85
04/02/2009	19622.6	14/11/2008	19562.14	01/09/2008	26424.7	18/06/2008	29618.11
03/02/2009	19630.46	13/11/2008	19710.1	29/08/2008	26290.99	17/06/2008	29925.27
30/01/2009	19565.14	12/11/2008	18804.95	28/08/2008	26444.12	16/06/2008	30354.18
29/01/2009	19537.05	11/11/2008	19795.25	27/08/2008	26131.35	13/06/2008	30413.48
28/01/2009	20145.22	10/11/2008	20020.53	26/08/2008	26071.46	12/06/2008	30475.44
27/01/2009	19616.15	07/11/2008	19865.22	25/08/2008	26416.62	11/06/2008	30446.24
26/01/2009	19583.08	06/11/2008	19650.86	22/08/2008	26875.45	10/06/2008	30898.87
23/01/2009	19348.81	05/11/2008	20446.77	21/08/2008	26534.97	09/06/2008	30933.44
22/01/2009	19306.73	04/11/2008	21535.27	20/08/2008	26865.04	06/06/2008	31149.06
21/01/2009	19497.1	03/11/2008	20612.68	19/08/2008	26732.11	05/06/2008	31726.01
20/01/2009	19213.02	31/10/2008	20445.32	18/08/2008	26777.48	04/06/2008	31448.11

19/01/2009	20393.41	30/10/2008	20207.02	15/08/2008	27340.83	03/06/2008	31492.64
16/01/2009	20325.39	29/10/2008	19157.33	14/08/2008	27247.45	02/06/2008	31636.21
15/01/2009	20280.49	28/10/2008	18632.53	13/08/2008	26877.07	30/05/2008	31975.47
14/01/2009	20369.23	27/10/2008	16891.03	12/08/2008	26636.55		
13/01/2009	21047.3	24/10/2008	16978.84	11/08/2008	26943.69		

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores.

4.2. Modelado de la media y la varianza de los residuales

Para modelar la media de los retornos se utilizó un modelo de series temporales, se ajustaron modelos de medias móviles y autorregresivos, y se escogió el modelo que minimizó el criterio de información de Akaike y que cumplía con las pruebas de Ljung-Box sobre la no correlación de los residuales. Simultáneamente se ajustó el modelo Garch(p,q) que tuviera el menor número de parámetros y que modelara correctamente las varianzas condicionales de los retornos.

Para lo anterior Francq y Zakoian (2004) sugieren minimizar simultáneamente la siguiente función de Quasi-verosimilitud con respecto a los parámetros de la serie ARMA y GARCH:

$$l(\alpha, \sigma^2) = \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \quad (4.155)$$

donde $\varepsilon_t : 1 \leq t \leq n$ y $\sigma_t^2 : 1 \leq t \leq n$ son procesos definidos recursivamente por:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t - c - \sum_{i=1}^p \phi_i \varepsilon_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (4.156)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.157)$$

Para el caso de este trabajo se utilizó la versión estudiantil del programa Oxmetrics 4 el cuál calcula los parámetros del Modelo ARMA para la media y GARCH para la varianza de manera simultánea.

4.3. VaR mediante modelos GARCH y Teoría de Valores Extremos

Al utilizar únicamente los modelos GARCH para modelar las colas pesadas, típicas en los retornos financieros, se puede subestimar a los valores extremos de estas series. Por otro lado para poder utilizar la teoría de los valores extremos para modelar los máximos de la serie de los retornos financieros, se requiere que dicha serie no este correlacionada, lo cual en la práctica generalmente no sucede.

Los resultados obtenidos en teoría de valores extremos asumen que las series son independientes e idénticamente distribuidas. Sin embargo, generalmente, las distribuciones de los retornos presentan autocorrelaciones, ante esta situación Bhattacharyya y Ritolia (2008) proponen realizar un análisis de valores extremos a los residuales estandarizados de una serie ARIMA-GARCH y con este resultado calcular el VaR de los retornos como sigue:

$$VaR_{\alpha}(\hat{r}_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} VaR_{\alpha}(\hat{\epsilon}_t) \quad (4.158)$$

Donde $VaR_{\alpha}(\hat{\epsilon}_t)$ es el VaR calculado a los residuales estandarizados del modelo ajustado a los retornos, y el cual es obtenido mediante la ecuación 5.155:

$$VaR_{\alpha} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1-\alpha}{k/n} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (4.159)$$

donde los parámetros $\hat{\xi}$ y $\hat{\beta}$ son calculados por máxima verosimilitud a la función generalizada de Pareto (ecuación 5.158), con los máximos obtenidos por el método de picos sobre umbral de los residuales estandarizados del modelo ARMA-GARCH ajustado a los retornos.

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi y / \beta)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-y/\beta) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (4.160)$$

4.4. Ajuste del modelo

4.4.1. Comparación histórica o Backtest

Esta prueba es utilizada para probar el ajuste del modelo, así como para comparar entre distintos modelos. El Backtest asume que el numero de fallas o numero de datos históricos que caen fuera de los limites del VaR tienen una distribución binomial con $p = 1 - \alpha$. La prueba se basa en el estadístico de kupiec:

$$k = -2 \ln \left(\frac{p^Y (1-p)^{N-Y}}{\left(\frac{Y}{N}\right)^Y \left(1 - \frac{Y}{N}\right)^{N-Y}} \right) \quad (4.161)$$

Donde Y es el numero de fallas, N es el número total de datos y $p = 1 - \alpha$ (α es el utilizado para calcular VaR_α).

El estadístico k es una prueba de razón de verosimilitudes el cual tiene una distribución asintóticamente χ_1^2 .

Alternativamente se puede obtener la estimación directa a partir de la distribución binomial, se calcula el intervalo de confianza para Y como (y_1, y_2) tal que $P(Y < y_1) = P(Y > y_2) = 1 - \alpha' / 2 = 0.025$ y $Y \sim BIN(N, p)$ aquí Y es el numero de fallas, N es el numero total de datos y $p = 1 - \alpha$. Si \tilde{Y} el numero de fallas observado cae dentro

del intervalo anterior entonces se acepta que la hipótesis que $p = \frac{Y}{N} = 1 - \alpha$ y el modelo es adecuado.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Al realizar la prueba de Jarque-Bera para mostrar si la distribución de los retornos tiene colas más pesadas que la normal (lo que indica mayor volatilidad), se encontró que esta fue significativa con un valor del estadístico de 72.1738 y un p-value igual a $2.220e-16$, lo que nos indica que los retornos definitivamente tienen colas pesadas.

Así mismo, al aplicar la prueba de Ljung-Box encontramos que los retornos están correlacionados a distancia de 3 valores con un p-value de 0.0208 con un 95 % de confiabilidad. Por lo tanto, es conveniente probar con modelos autorregresivos de orden menor o igual a tres para modelar esta correlación.

En general es frecuente que en las series financieras existan correlaciones que pueden ser modeladas con modelos de series temporales, para el caso del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, esta situación se verifica en la función de autocorrelación parcial muestral, como se muestra en Figura 2, la cual sugiere que para esta serie se puede ajustar un modelo AR (3).

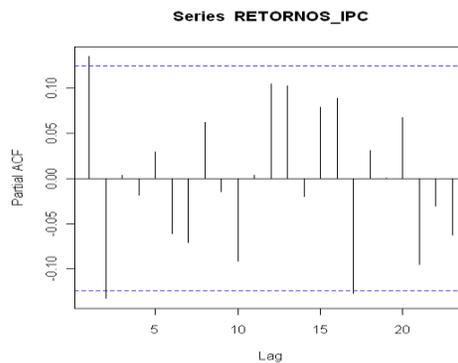


Figura 2. Función de autocorrelación parcial muestral

Al observar la función de autocorrelación muestral (Figura 3), encontramos que la única correlación diferente de cero es la primera, por lo que es conveniente probar igualmente con modelos de medias móviles de orden uno.

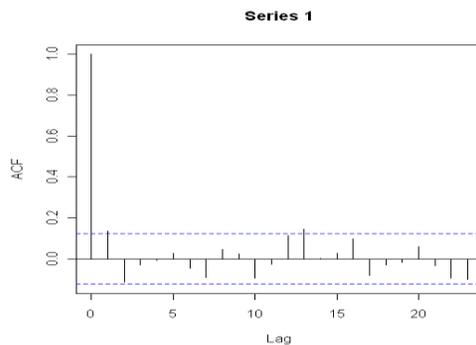


Figura 3. Función de autocorrelación muestral

Como resultado de la revisión a la función de autocorrelación muestral y a la función de autocorrelación parcial muestral, para determinar el modelo que se ajuste a los retornos, probamos los modelos autorregresivos de orden menor o igual a 3 conjuntamente con las medias móviles de orden menor o igual a 1.

De igual manera para modelar los residuales se utilizaron los modelos ARCH (1) y GARCH (1,1), con distribución t-student. En cada caso se realizó un estudio de los valores extremos a los residuales estudentizados para encontrar las medidas de valor en riesgo utilizando la metodología del cálculo del VaR mediante modelos GARCH con teoría de valores extremos.

La medida de comparación para evaluar cada modelo fue el número de fallas que se obtienen, así como el grado de ajuste de los parámetros a través de sus correspondientes pruebas de t.

Los resultados son mostrados en la Figura 6, en donde se observa que el mejor modelo es ARMA(3,1)-GARCH(1)-EVT con un total de 8 fallas en el cálculo del VaR, al realizar

la prueba de ajuste de Kupiec, encontramos que el modelo ajusta correctamente la confiabilidad deseada con un p-value de 0.941568.

La revisión de los coeficientes del modelo ajustado ARMA(3,1)-GARCH(1), indican que a excepción de las medias, el resto de los coeficientes son significativamente diferentes de cero, por lo que el modelo utilizado es el adecuado (Cuadro 4).

Cuadro 4. Parámetros ajustados al modelo ARMA(3,1)-GARCH(1)

Parámetro	Coficiente	Error Estándar	Valor de t	t-prob
Media(M)	0.002457	0.0014003	-1.755	0.0805
AR(1)	0.988169	0.13657	7.236	0
AR(2)	-0.219158	0.08508	-2.576	0.0106
AR(3)	0.140384	0.061194	2.294	0.0227
MA(1)	-0.886803	0.11650	-7.612	0
Media(Alpha 0)	0.087438	0.085597	1.021	0.3081
ARCH(Alpha1)	0.161448	0.066731	2.419	0.0163
GARCH(Beta1)	0.874359	0.036113	24.21	0
Student(Grados)	3.552736	1.4170	2.507	0.0128

De igual forma al realizar las pruebas de Asimetría, Exceso Kurtosis y Jarque-Bera se observa que los residuales ya no están correlacionados, con una confiabilidad del 95% (Cuadro 5).

Cuadro 5. Pruebas de los residuales del modelo ARMA(3,1)-GARCH(1)

Pruebas	Valor del estadístico	Prueba de t	P-Value
Asimetría	0.2062	1.334	0.18221"
Exceso de curtosis	1.0888	3.5349	0.00040789"
Prueba de Jarque-Bera	14.009	.NaN	0.00090776"
Criterio de Información (a ser minimizado)			
Akaike	-4.879607	Shibata	-4.8821
Schwarz	-4.752103	Hannan-Quinn	-4.8282
Pruebas de Ljung-Box			

Estadística Q	P-Value
Q(10) =7.89067	0.3465
Q(15) =11.9534	0.3810
Q(20) =17.804	0.0627

Al analizar la función de Autocorrelación y la función de Autocorrelación Parcial a los residuales, nos muestra que estos ya no están correlacionados (Figura 4).

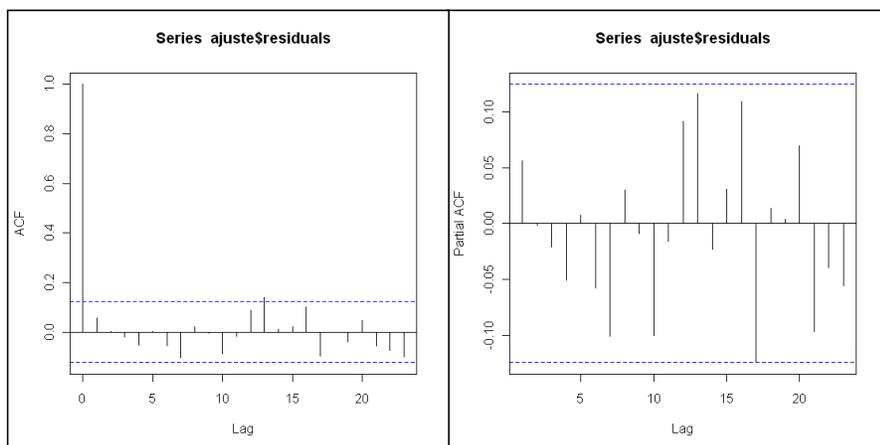


Figura 4. Función de Autocorrelación Muestral y Autocorrelación Parcial Muestral de los residuales

Para el modelado de la volatilidad se probaron los modelos ARCH(1) y los modelos GARCH (1,1), y se encontró que el valor en riesgo utilizando los modelos ARCH presenta estimaciones demasiado elevadas y poco conservadoras, que sobreestiman el valor de la máxima pérdida posible. Por otra parte el número de fallas en las que incurren es superior al de los modelos GARCH. Lo anterior puede observarse en la Figura 5, en las que se muestra el cálculo del valor en riesgo calculado con diferentes modelos ARMA para la media y con el modelo ARCH (1) para la volatilidad.

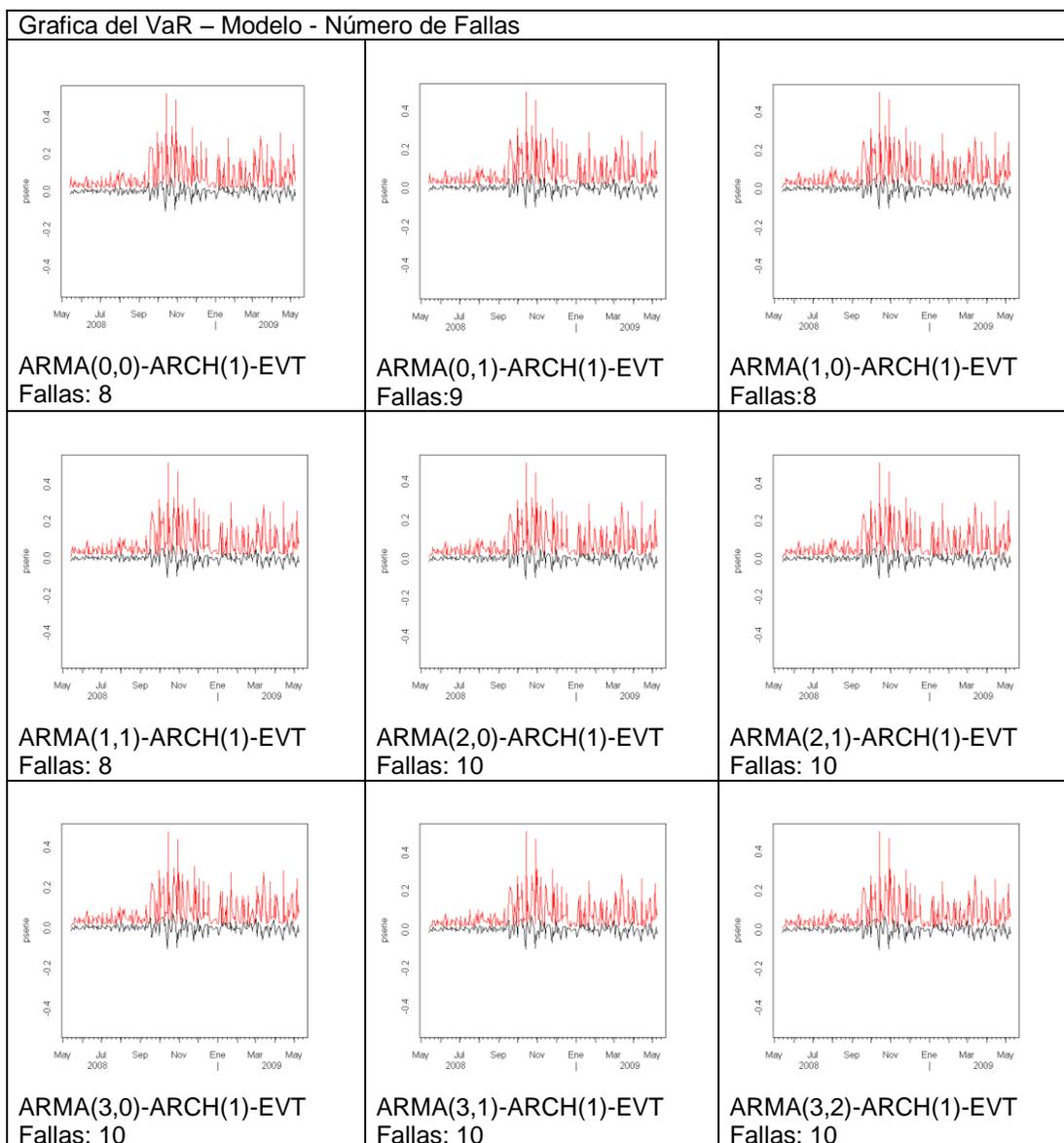


Figura 5. Estimación del Valor en Riesgo para diferentes modelos ARMA en la media y modelos ARCH en la varianza, en la línea roja se muestra la estimación del VaR y en la línea negra el retorno del índice.

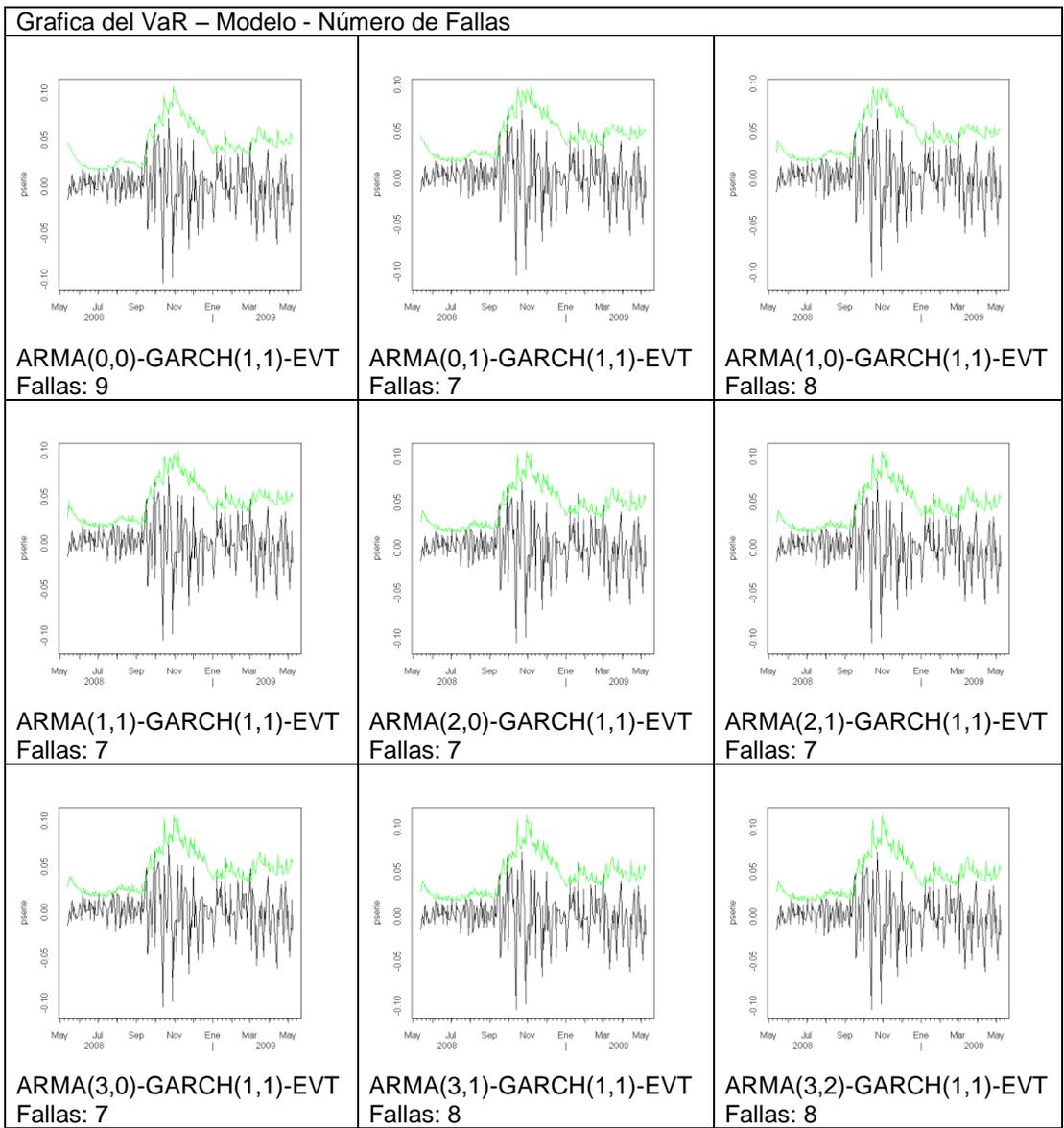


Figura 6. Estimación del Valor en Riesgo para diferentes modelos ARMA en la media y modelos GARCH en la varianza, en la línea verde se muestra la estimación del VaR y en la línea negra el retorno del índice.

De manera similar en la Figura 6, se muestra el cálculo del valor en riesgo calculado con diferentes modelos ARMA para la media y con el modelo GARCH (1,1) para la volatilidad. Se observa que el número de fallas no disminuye significativamente al variar el modelo para la media, sin embargo, al utilizar el modelo GARCH para la volatilidad, disminuye considerablemente la magnitud de la estimación del valor en riesgo, así como el número promedio de fallas (8 en comparación con las 10 del modelo ARCH).

Por otra parte, se realizó el cálculo del Valor en Riesgo por el método de Riskmetrics, con el objetivo de poder tener un punto de referencia y comparación para nuestro modelo ARMA-GARCH-EVT.

Los resultados son mostrados en la Figura 7, en donde se observa que el modelo Riskmetrics presenta un total de 7 fallas en el cálculo del VaR, al realizar la prueba de ajuste de Kupiec, encontramos que el modelo ajusta correctamente la confiabilidad deseada con un p-value de 0.95.

La revisión de los coeficientes del modelo ajustado Riskmetrics, indican que a excepción de las medias, el resto de los coeficientes son significativamente diferentes de cero, derivado de que la metodología recomienda un valor para el coeficiente de λ de 0.94 para datos diarios (Cuadro 5).

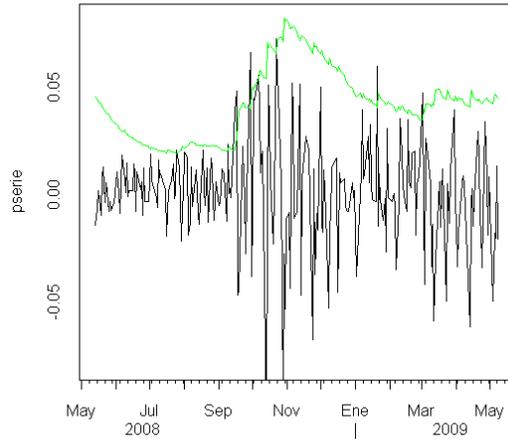


Figura 7. Banda del valor en riesgo mediante el uso un modelo ARMA(3,1)-GARCH(1,1)-EVT

El modelo Riskmetrics ajustado para los retornos fue el siguiente:

$$r_t = 0.001381 + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z\sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.94\varepsilon_t^2 + 0.06\sigma_{t-1}^2$$

Cuadro 6. Parámetros ajustados al modelo Riskmetrics

Parámetro	Coeficiente	Error Estándar	Valor de t	t-prob
Media(M)	0.001381	0.0011619	1.188	0.2358
ARCH(Alpha1)	0.06			
GARCH(Beta1)	0.94			

Realizando las pruebas de Asimetría, Exceso de Kurtosis y Jarque-Bera se observa que los residuales están correlacionados, derivado de que únicamente se les resta la media a los datos y por lo tanto heredaron las correlaciones de los datos originales (Cuadro 7).

Cuadro 7. Pruebas a los residuales del modelo Riskmetrics

Pruebas	Valor del estadístico	Prueba de t	P-Value
Asimetría	-0.044782	0.28964	0.7720
Exceso de curtosis	1.2131	3.9357	8.2970e-005
Prueba de Jarque-Bera	15.269	-	0.0004
Criterio de Información (a ser minimizado)			
Akaike	-4.785604	Shibata	-4.7858
Schwarz	-4.743103	Hannan-Quinn	-4.7684"
Pruebas de Ljung-Box			
Estadística Q	P-Value		
Q(10) = 21.3796	0.0185968		
Q(15) = 28.2625	0.0199825		
Q(20) = 34.1105	0.0253871		

El número de fallas obtenidas con la metodología Riskmetrics fue menor (1 menos en comparación con el método de ARMA(3,1)-GARCH(1,1)-EVT), se observa que sus estimaciones son en general más grandes que la del método GARCH-EVT, lo cual se observa en la Figura 8.

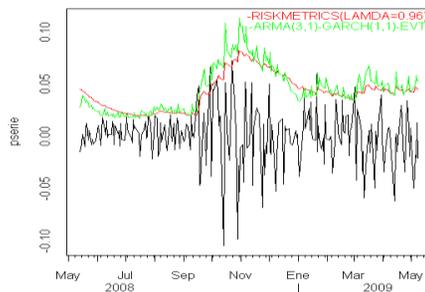


Figura 8. Comparación de las bandas de valor en riesgo de un modelo ARMA(3,1)-GARCH(1,1)-EVT (Verde) y Riskmetrics (Rojo)

Al observar la Figura 8, encontramos que en el periodo de septiembre de 2008 a enero 2009 se observa un periodo de mucha volatilidad, este periodo coincide con la crisis mundial de octubre de 2008.

6. CONCLUSIONES

Del análisis de los datos, se puede observar que ambos métodos ARMA(3,1)-GARCH(1,1)-EVT y Riskmetrics, son muy similares ya que la diferencia del número de fallas de ambos modelos no es significativa.

De las 250 observaciones, existe un promedio de 7 fallas, lo cual es un valor muy pequeño. Por lo consiguiente, ambos modelos estiman correctamente el valor en riesgo.

De los modelos de heterocedasticidad condicional, encontramos que el modelo GARCH, es más preciso en sus estimaciones, comparado con los modelos ARCH. El modelo GARCH nos indica que la máxima pérdida del Índice de Precios y Cotizaciones corresponde al 18%, en contraste con el modelo ARCH, el cual presenta una pérdida máxima del Índice de Precios y Cotizaciones del 40%.

Al analizar los modelos en este periodo de tiempo encontramos que el modelo de Riskmetrics presenta más fallas en comparación con el ARMA(3,1)-GARCH(1,1)-EVT. Por otra parte en los periodos de poca volatilidad podemos observar que el modelo ARMA(3,1)-GARCH(1,1)-EVT presenta estimaciones más precisas que el de Riskmetrics, como se observa en el periodo de mayo 2008 a septiembre de 2008, por lo que finalmente concluimos que la metodología del cálculo del Valor en Riesgo mediante modelos de heterocedasticidad condicional con teoría de valores extremos tiene mejor desempeño que la metodología de Riskmetrics de 1994.

7. RECOMENDACIONES

El uso del Valor en Riesgo del modelo ARMA-GARCH-EVT puede ser implementado para cada uno de los siguientes grupos de aplicaciones:

- El valor en riesgo del modelo ARMA-GARCH-EVT puede informar a los analistas financieros sobre el riesgo de sus operaciones de inversión. También informaría a los accionistas sobre el riesgo de su corporación, en términos más amigables y no tan técnicos.
- Se puede usar el VaR del modelo ARMA-GARCH-EVT para fijar posiciones límites para corredores y casas de bolsa. La ventaja del VaR es que crea un denominador común con el cual se comparan actividades de riesgo en diversos mercados.
- El VaR del modelo ARMA-GARCH-EVT también podría ser usado para colocar capital a través de corredores y casas de bolsa. Con esta metodología se le incentiva de manera automática al corredor que toma un riesgo extra. Implementado correctamente esta estrategia puede llevar a la institución mejores rendimientos.

Finalmente el Valor en Riesgo del modelo ARMA-GARCH-EVT debería ser adoptado de manera activa por las siguientes instituciones:

- Instituciones Financieras: La prudente regulación de instituciones financieras requiere el mantenimiento de un mínimo de reserva de capital relacionado con su riesgo financiero, así como de un manejo eficiente del riesgo de los complicados instrumentos financieros con los que operan, todos los cuales pueden ser medidos con el Valor en Riesgo.

- Los comités de supervisión de bancos: Los bancos centrales, la comisión de tipos de cambios así como los reguladores de cada país deberían implementar al Valor en Riesgo del modelo ARMA-GARCH-EVT como punto de referencia en la medición del riesgo.
- Corporaciones no financieras: Sería ampliamente recomendable utilizar el VaR del modelo ARMA-GARCH-EVT para el manejo centralizado del riesgo de cualquier corporación que esta expuesta a riesgos financieros.
- Corredores de bolsa. Inversionistas institucionales también podrían utilizar al VaR del modelo ARMA-GARCH-EVT para manejar sus riesgos financieros, al elegir las posiciones que presentan el menor riesgo.
- Finalmente, se recomienda que para cualquier inversión en los mercados de valores, es necesario calcular el valor en riesgo utilizando modelos ARMA-GARCH-EVT, con la finalidad de evitar pérdidas parciales o totales de la inversión.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Angelis, T., Benos, A., Degiannakis, S. 2004. The use of GARCH models in VaR estimation. *Statistical Methodology*, 1, 105–128.
- Bhattacharyya, M. y Ritolia, G. 2008. Condicional VaR using EVT-Towards a plane margin scheme. *International Review of Financial Analysis*, 17, 382–395.
- Balkema, A. A., & Haan, L. de. 1974. Residual lifetime at great age. *Annals of Probability*, 2, 792–804.
- Bollerslev, T., Chou, R., & Kroner, K. 1992. ARCH modeling in finance. *Journal of Econometrics*, 52, 5–59.
- Byström-Hans N. E. 2004. Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. *International Review of Financial Analysis*, 13, 133–152.
- Crouhy, M., Galai, D., Mark, R. 2000. *Risk Management*. McGraw-Hill. New York, NY. 752p.
- Christoffersen, P. 2003. *Elements of Financial Risk Management*. Elsevier Science. San Diego, Ca. 214p.
- Chrysolouris, G., Subramanian V. and Moshin L. 1994. Use of extreme value theory in engineering decision making. *Journal of Manufacturing Systems*, 13(4), 302-312.
- Fernández, V. 2003. *Extreme value theory: value at risk and returns dependence around the world*. Documentos de Trabajo, Centro de Economía Aplicada, Universidad de Chile, No. 161.
- Fisher, R., & Tippett, L. 1928. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180–190.
- Francq, C. y Zakoian, J. M. 2004. Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli* 10 (4), 605–637.
- Jorion, P. 2000. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 2a. ed. McGraw-Hill. New York, NY. 544p.

- Schwartz, A.J. 2009. Origins of The Financial Market Crisis of 2008. *Cato Journal* 29(1), 19-23.
- Lamothe, P. 2007. *Opciones Financieras y Productos Estructurados*. McGraw-Hill. New York, NY. 624p.
- Lee, S., Song, J. 2008. Test for parameter change in ARMA models with GARCH innovations. *Statistics & Probability Letters*, 78 (13), 1990-1998.
- Saez-Zafra, M., Pérez-Rodríguez, J. V. 1994. Modelos Autorregresivos para la Varianza Condicionada Heterocedastica. *Estudios de economía aplicada*. 2, 71-106.
- Cevallos, M. 2007. Estimación de Riesgo en Carteras de Inversión. *Coloquio Argentino de Estadística 2007*. 22-24 de Octubre, Mar de Plata.
- Melchers, R.E. 2008. Extreme value statistics and long-term marine pitting corrosion of steel. *Probabilistic Engineering Mechanics*. 23(4), 482- 488.
- Melo-Velandia, L. F., Becerra-Camargo, O. R. 2005. Medidas de riesgo, características y técnicas de medición: Una aplicación del VaR y el ES a la tasa interbancaria de Colombia. *Borradores de Economía* 003198, Banco de la República. 75p.
- Millán-Valenzuela, H. 1999. Las causas de la crisis financiera en México. *Economía, Sociedad y Territorio*, 2 (5), 25-66.
- Novalés A. C., Gracia D. M. 1993. Guía para la estimación de modelos ARCH. *Estadística Española*, 35(132), 5-38.
- Pickands, III, J. 1975. Statistical inference using extreme order statistics. *The annals of Statistics*. 3(1), 119- 131.
- Reyes, H. J., Vaquera H., y Villaseñor J. A. 2009. Estimation of trends in high urban ozone levels using the quantiles of (GEV). *Environmetrics*. DOI: 10.1002/env.997.
- Tsay, R. S. 2002. *Análisis of Financial Time Series*. Jhon Wiley and Son. New York, NY. 448p.
- Von Mises, R. 1936. La distribution de la plus grande de n valeurs. *American Mathematical Society*. Providence. 2, 271- 294.

Comentario [CAAS1]: Preguntarle al Dr. Humberto Vaquera por el Volumen y las páginas de este artículo para citarlo aquí.

ANEXOS 1

Desastres financieros.

Las pérdidas de 1993 a 1999 debidas a los derivados son mostradas en cuadro siguiente.

Cuadro 8. Principales desastres financieros mundiales ocurridos en la década de los años noventa.

Corporación	Fecha	Instrumento	Perdida (Millones de dólares)
Orange County, CA	Diciembre de 1994	Reportes reversos	1,810
Showa Shell Sekiyu, japon.	Febrero de 1993	Forward de tipo de cambio	1,580
Kashima Oil, Japón	Abril de 1994	Forward de tipo de cambio	1,450
Metallgesellschaft, Alemania	Enero de 1994	Futuros del petróleo	1,340
Barings, Inglaterra	Febrero de 1995	Futuro sobre índices del mercado	1,330
Ashanti, Ghana	Octubre de 1999	"Exóticos" sobre Oro	570
Yakult Onza, Japón	Marzo de 1998	Derivados sobre índices del mercado	523
Codelco, Chile	Enero de 1994	Futuros del cobre	200
Procter & Gamble	Abril de 1994	Swaps diferenciales	157
NatWest, Inglaterra	Febrero de 1997	Swaptions	127

El Cuadro 9 muestra los desastres financieros en bancos, que fueron pagados por los contribuyentes. Estas pérdidas fueron debidas generalmente a créditos incobrables, y que ocasionaron pérdidas en algunos casos iguales a la tercera parte del producto interno bruto.

Cuadro 9. Principales desastres financieros mundiales ocurridos por los bancos y pagados por los contribuyentes.

Lugar y Fecha	Suceso	% PIB	\$Billones de dólares
Japon, 1990	Créditos incobrables	14	550
China, 1990	Quiebra de 4 grandes bancos	47	498
Estados Unidos, 1984-91	1400 S&Ls, 1300 bancos con problemas	2.7	150
Corea del Sur, 1998	Reestructuración de bancos	28	90
México, 1995	Recapitalización de 20 bancos	17	72
Argentina, 1980-82	70 instituciones cerraron	55	46
Tailandia, 1997	Sector bancario	32	36
España, 1977-85	Nacionalización de 20 bancos	17	28
Malasia, 1997-	Sector bancario	35	25
Suecia, 1991-94	5 Bancos rescatados	4	15

Venezuela, 1994-	Insolvencia de los bancos	20	14
Francia, 1994-95	Creditos lyonnal	0.7	10
Noruega, 1987-93	El estado toma más de 3 bancos	8	8
Israel, 1977-83	Todo el sistema bancario	30	8
Chile, 1981-83	8 instituciones cerraron	41	8
Finlandia, 1991-93	Ahorros del sector bancario	8	7
Australia, 1989-92	Dos grandes bancos recapitalizados	2	6

Fuente: Datos adaptados de Caprio y Klingebiel (1999), "Episodes of Systemic and Borderline Financial Crisis", World Bank Working Paper, con cálculos de los autores, citados por Jorion (2000).

Forma de calcular el Índice de Precios y Cotizaciones

En México, el índice de precios y cotizaciones (IPC) es un índice ponderado por valor de capitalización de 35 series accionarias de mayor bursatilidad que cotizan en la bolsa mexicana de valores. Las series seleccionadas se deberán de haber mantenido dentro de este grupo en los últimos 6 meses.

El cálculo del IPC se realiza mediante la fórmula:

$$I_t = I_{t-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^n P_{it} * Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it-1} * Q_{it-1} * F_{it}} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Donde:

I_t = Índice en el día t

P_{it} = Precio de la emisora i en el día t

Q_{it} = Acciones de la emisora i en el día t

F_i = Factor de ajuste por ex-derechos

Cuadro 10. Factores de ajuste para el cálculo del Índice de Precios y Cotizaciones en función de derechos y eventos.

Evento de acuerdo al Reglamento interior de BMV	Tipo de movimiento	Factor de ajuste	Ajuste requerido
Pago de dividendo en acciones	Capitalización	$F = \frac{Aa}{Ap}$	Ninguno
Suscripción	Suscripción	$F = \frac{Pa * Aa + Ps * As}{Pa * Ap}$	Incremento de capital
Canje de Títulos	Reestructuración Accionaria	$F = \frac{Pa * Aa + Ps * Ar}{Pa * Ap}$	Cambio de Capital
Split y Split Inverso	Split (reverse)	$F = \frac{Aa}{Ap}$	Ninguno
Reembolso	Reembolso	$F = 1 - \frac{Pa - Pp}{Pa}$	Decremento de Capital
Escisión	Escisión	$F = \frac{Pp * Aa - Pp * Ae}{Pa * Ap}$	Reducción de Capital
Fusión	Fusión	Dependiendo tipo de fusión	Incremento de Capital
No está catalogado como derecho corporativo.	Obligaciones Convertibles	$F = \frac{Pp * Aa - Pa * Ac}{Pa * Ap}$	Incremento de Capital

Fuente: Metodología para el cálculo del IPC, BMV.

Donde:

F = Factor de ajuste por movimiento.

Fi = Factor de ajuste requerido en la emisora i.

Aa = Número de acciones anteriores al ajuste.

Ac = Número de acciones producto de la conversión.

Ae = Número de acciones por escindir.

Ap = Número de acciones posteriores al ajuste.

Ar = Número de acciones por reestructuración.

As = Número de acciones suscritas.

Pa = Precio anterior al ajuste.

Pp = Precio posterior al ajuste.

Ps = Precio de suscripción.

Cuadro 11. Empresas que participan en el cálculo del índice de precios y cotizaciones de la bolsa mexicana de valores.

Cuadro 12.

No	Emisora	Empresa	Ramo
1	ALFA	Alfa , S.A.B. de C.V.	Controladoras
2	AMX	América Móvil, S.A.B. de C.V.	Servicios de telecomunicaciones inalámbricas
3	ARA	Consorcio Ara	Construcción de viviendas
4	AUTLAN	Compañía Minera Autlan, S.A.B. de C. V.	Metales y minería
5	AXTEL	Axtel, S.A.B. De C.V.	Servicios de telecomunicaciones diversos
6	BIMBO	Grupo Bimbo, S.A.B. De C.V.	Alimentos
7	BOLSA	Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V.	Mercados financieros
8	CEMEX	Cemex, S.A.B. de C.V.	Materiales de construcción
9	COMERCI	Controladora Comercial Mexicana, S.A.B. de C.V.	Venta de productos de consumo frecuente
10	COMPART	Banco Compartamos, S.A., Institución de Banca Múltiple	Bancos
11	ELEKTRA	Grupo Elektra, S.A. de C.V.	Ventas especializadas
12	FEMSA	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	Bebidas
13	GAP	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. De C.V.	Infraestructura de transportes
14	GCARSO	Grupo Carso, S.A.B. de C.V.	Controladoras
15	GEO	Corporación Geo, S.A.B. de C.V.	Construcción de viviendas
16	GFINBUR	Grupo Financiero Inbursa, S.A.B. De C.V.	Grupos financieros
17	GFNORTE	Grupo Financiero Banorte, S.A.B de C.V.	Grupos financieros

18	GMEXICO	Grupo México, S.A.B. de C.V.	Metales y minería
19	GMODELO	Grupo Modelo, S.A.B. de C.V.	Bebidas
20	HOMEX	Desarrolladora Homex, S.A.B. de C.V.	Construcción de viviendas
21	ICA	Empresas Ica, S.A.B. de C.V.	Construcción e ingeniería
22	ICH	Industrias Ch, S.A.B. de C.V.	Fabricación y comercialización de materiales
23	KIMBER	Kimberly - Clark de México S.A.B. De C.V.	Productos domésticos
24	MEXCHEM	Mexichem, S.A.B. de C.V.	Productos químicos
25	OMA	Grupo Aeroportuario Del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	Infraestructura de transportes
26	PE&OLES	Industrias Peñoles, S. A.B. De C. V.	Metales y minería
27	SIMEC	Grupo Simec, S.A.B. de C.V.	Fabricación y comercialización de materiales
28	SORIANA	Organización Soriana, S.A.B. de C.V.	Venta de productos de consumo frecuente
29	TELECOM	Carso Global Telecom, S.A.B. de C.V.	Servicios de telecomunicaciones diversos
30	TELINT	Telmex Internacional, S.A.B. de C.V.	Servicios de telecomunicaciones diversos
31	TELMEX	Teléfonos de México, S.A.B. de C.V.	Servicios de telecomunicaciones diversos
32	TELEVISA	Grupo Televisa, S.A.	Medios de comunicación
33	TVAZTECA	Tv Azteca, S.A. de C.V.	Medios de comunicación
34	URBI	Urbi Desarrollos Urbanos, S.A.B. de C.V.	Construcción de viviendas
35	WALMEX	Wal - Mart de Mexico, S.A.B. de C.V.	Venta de productos de consumo frecuente

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores