



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

**SOCIOECONOMIA, ESTADÍSTICA E INFORMATICA
ESTADÍSTICA**

**PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE
PARA DISTRIBUCIONES ESTABLES**

ELIZABETH GONZALEZ ESTRADA

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:**

DOCTORA EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MEXICO

2007

Índice

1	Introducción	1
2	Materiales y métodos	3
2.1	Distribuciones estables y teoremas relacionados	3
2.1.1	Distribuciones sum-estables	3
2.1.2	Distribuciones max y min-estables	4
2.2	Pruebas de hipótesis	6
2.2.1	Pruebas de bondad de ajuste	8
3	Revisión de literatura	12
4	Prueba para distribuciones estables univariadas	16
4.1	Introducción	16
4.2	La prueba propuesta	17
4.2.1	Distribución de la estadística de prueba	18
4.3	Pruebas para algunas hipótesis específicas	18
4.3.1	Prueba para normalidad univariada	19
4.3.2	Prueba para la distribución Gumbel	20
4.3.3	Prueba para exponencialidad	22
4.4	Otras pruebas de bondad de ajuste	24
4.4.1	Prueba de Shapiro-Wilk	24
4.4.2	Prueba de Anderson-Darling	27

4.4.3	Prueba de Epps	27
4.5	Estudio comparativo	28
4.5.1	Simulación de Monte Carlo	28
4.5.2	Discusión de resultados	29
5	Pruebas para distribuciones estables multivariadas: el caso de la normal multivariada	36
5.1	Una prueba para normalidad multivariada	37
5.1.1	Distribución de la estadística de prueba	38
5.2	Otras pruebas para normalidad multivariada	39
5.2.1	Pruebas de Mardia	39
5.2.2	Prueba de Henze y Zirkler	42
5.2.3	Prueba de Mudholkar, Srivastava y Lin	42
5.2.4	Prueba de Srivastava y Hui	43
5.3	Estudio comparativo	44
5.3.1	Simulación de Monte Carlo	44
5.3.2	Discusión de resultados	45
6	Discusión y conclusiones	51
6.1	Discusión de resultados	51
6.2	Conclusiones	52
A	Goodness of fit tests for location-scale stable distributions	58
B	A generalization of Shapiro-Wilk's test for multivariate normality	72
C	Distribución de W^*	87
D	Programas en lenguaje R	89
D.1	Programa para calcular la prueba R_N	89
D.2	Programa para calcular la prueba W^*	91

Índice de figuras

4.1	Distribución de R_N para $n = 30, 40, 50$	21
4.2	Distribución de R_G para $n = 30, 40, 50$	23
4.3	Distribución de R_E para $n = 30, 40, 50$	25
5.1	Distribución de W_1^* para $(n, p) = (20, 5)$	40
5.2	Distribución de W_1^* para $(n, p) = (50, 5)$	41

Índice de tablas

4.1	Percentiles de R_N	30
4.2	Percentiles de R_G	31
4.3	Percentiles de R_E	32
4.4	Potencia de las pruebas para normalidad (n=50, $\alpha=0.10$)	33
4.5	Potencia de las pruebas para Gumbel (n=50, $\alpha=0.10$)	34
4.6	Potencia de las pruebas para exponencialidad (n=20, $\alpha=0.10$)	35
5.1	Potencia de las pruebas para NMV en % (p=2, n=20, $\alpha=0.05$)	47
5.2	Potencia de las pruebas para NMV en % (p=2, n=50, $\alpha=0.05$)	48
5.3	Potencia de las pruebas para NMV en % (p=5, n=20, $\alpha=0.05$)	49
5.4	Potencia de las pruebas para NMV en % (p=5, n=50, $\alpha=0.05$)	50

Capítulo 1

Introducción

Una clase importante de distribuciones en la teoría de convergencia de sumas, máximos y mínimos normalizados de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d) es la clase de las distribuciones sum, max y min-estables ya que los miembros de esta clase coinciden con las distribuciones límites de dichas transformaciones cuando estos límites existen (Teorema Central del Límite Generalizado y Teorema de Fisher-Tippet).

Las distribuciones de esta clase pueden depender de parámetros de forma, asimetría, localidad y escala. Sea C_{lss} la clase de distribuciones formada por todas las distribuciones h -estables cuyos únicos parámetros desconocidos son los de localidad y escala, donde h denota cualquiera de las operaciones suma, máximo y mínimo. Ejemplos de distribuciones en C_{lss} son las distribuciones normal, Gumbel y exponencial.

Algunos métodos de análisis estadístico suponen que las observaciones provienen de una distribución que pertenece a la clase C_{lss} , como es el caso del análisis de varianza, el análisis de regresión y la prueba de t , los cuales asumen normalidad.

En este trabajo se propone una prueba de bondad de ajuste para probar la hipótesis de que una muestra aleatoria (m.a.) sigue una distribución h -estable con parámetros de localidad y escala desconocidos haciendo uso de la propiedad de estabilidad la cual se refiere al hecho de que sumas, máximos y mínimos de v.a.i.i.d. con distribución sum, max

y min-estable también tienen distribución sum, max y min-estable, respectivamente.

Por otra parte, también se propone una prueba de bondad de ajuste para la distribución normal multivariada la cual es una distribución sum-estable multivariada muy importante en el desarrollo de métodos de análisis multivariado. La prueba propuesta es una generalización de la prueba de Shapiro-Wilk para normalidad univariada.

En el Capítulo 2 se presentan las definiciones de v.a.'s sum, max y min-estables y dos teoremas sobre convergencia en distribución de sumas y máximos normalizados de v.a.i.i.d. También se revisan algunos conceptos básicos sobre pruebas de hipótesis y algunos criterios para clasificar las pruebas de bondad de ajuste.

En el Capítulo 3 se hace una revisión de la literatura sobre pruebas de bondad de ajuste para distribuciones que pertenecen a la clase C_{lss} y sobre pruebas para normalidad multivariada.

En el Capítulo 4 se propone una técnica para obtener pruebas de bondad de ajuste para distribuciones estables con parámetros de localidad y escala desconocidos. En particular, se dan los detalles necesarios para probar las hipótesis de normalidad, distribución Gumbel y exponencialidad. También se presenta una comparación de las potencias de estas pruebas con las potencias de las pruebas de Anderson-Darling y Epps (2005).

En el Capítulo 5 se hace una generalización de la prueba W de Shapiro-Wilk para probar normalidad multivariada. Se revisan las pruebas de Mardia (1970), Srivastava y Hui (1987), Henze y Zirkler (1990) y Mudholkar, Srivastava y Lin (1995) y se hace una comparación de estas pruebas con la prueba propuesta en términos de sus potencias contra varias alternativas.

En el Capítulo 6 se discuten los resultados obtenidos en los dos problemas estudiados y se hacen algunas conclusiones.

Capítulo 2

Materiales y métodos

Este capítulo contiene las definiciones, resultados y métodos necesarios para el desarrollo de este trabajo. En la Sección 2.1 se dan las definiciones de v.a.'s sum, max y min-estables y se presenta el Teorema Central de Límite Generalizado y el Teorema de Fisher y Tippett. La Sección 2.2 contiene algunos conceptos básicos sobre pruebas de hipótesis y una revisión sobre varios criterios para clasificar las pruebas de bondad de ajuste.

2.1 Distribuciones estables y teoremas relacionados

2.1.1 Distribuciones sum-estables

Definición: Una v.a. X es **sum-estable** si para dos copias independientes de X , digamos X_1 y X_2 , y cualesquiera constantes a y b ,

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d \tag{2.1}$$

para alguna constante $c > 0$ y algún $d \in \mathfrak{R}$. La v.a. X es estrictamente sum-estable si se cumple (2.1) con $d = 0$ para todas las elecciones de a y b .

La definición anterior es equivalente a la siguiente (Nolan, 2007).

Definición: Una v.a. X es **sum-estable** si y sólo si $X \stackrel{d}{=} aZ + b$, $a > 0$, $b \in \mathfrak{R}$,

donde Z es una v.a. con función característica

$$\begin{aligned}\varphi_Z(u) &= \exp\left(-|u|^\alpha \left[1 - i\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \text{sign}(u)\right]\right), \alpha \neq 1 \\ &= \exp\left(-|u| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(u) \ln|u|\right]\right), \alpha = 1\end{aligned}$$

donde $0 < \alpha \leq 2$ y $-1 \leq \beta \leq 1$.

En general, una distribución sum-estable depende de 4 parámetros: el índice de estabilidad $\alpha \in (0, 2]$, el parámetro de asimetría $\beta \in [-1, 1]$, el parámetro de escala $\gamma > 0$ y el parámetro de localidad $\delta \in \mathfrak{R}$. El estudio de estas distribuciones típicamente se hace a través de su función característica porque en general no existen expresiones con forma cerrada para densidades y funciones de distribución.

El Teorema del Límite Central (TLC) establece que la distribución de la suma normalizada de v.a.i.i.d. con varianza finita converge a la distribución normal. El siguiente teorema es una generalización del TLC para v.a.i.i.d. con varianza infinita.

Teorema del Límite Central Generalizado

Sea X_1, X_2, X_3, \dots una secuencia de v.a. i.i.d. Existen constantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathfrak{R}$ y una v.a. no degenerada Z tal que, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$a_n(X_1 + \dots + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z$$

si y sólo si Z es sum-estable.

2.1.2 Distribuciones max y min-estables

Sean X_1, X_2, \dots, X_n , $n \geq 2$, copias independientes de una v.a. X con f.d. F_X . Sea $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Definición: Se dice que la v.a. X es **max-estable** si

$$M_n \stackrel{d}{=} a_{n,\max} X + b_{n,\max}$$

para ciertas constantes $a_{n,\max} > 0$ y $b_{n,\max} \in \mathfrak{R}$.

Teorema. Propiedad límite de las distribuciones max-estables

La clase de distribuciones max-estables coincide con la clase de todas las distribuciones límite posibles de máximos de v.a.i.i.d.

Prueba: Ver Embrechts (1997), pág. 121.

Teorema de Fisher-Tippet (distribuciones límite de máximos)

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una secuencia de v.a.i.i.d. Si existen constantes $c_n > 0$, $d_n \in \mathfrak{R}$ y alguna f.d. G tal que, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} G,$$

entonces G es alguna de las f.d. siguientes

Gumbel: $G_1(x) = \exp\{-\exp\{-x\}\}$, $x \in \mathfrak{R}$.

Weibull: $G_2(x) = \exp\{-(-x)^\alpha\}$, $x \leq 0$, $\alpha > 0$.

Fréchet: $G_3(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$, $x > 0$, $\alpha > 0$.

Prueba: Ver por ejemplo Resnick (1987).

Definición: *Se dice que la v.a. X es min-estable si*

$$\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \stackrel{d}{=} a_{n,\min}X + b_{n,\min}$$

para ciertas constantes $a_{n,\min} > 0$ y $b_{n,\min} \in \mathfrak{R}$.

Se pueden obtener resultados análogos a los anteriores para el mínimo de una m.a. usando la igualdad $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, -X_2, \dots, -X_n\}$ (Reiss y Thomas, 2001).

Para una revisión más completa sobre el contenido de esta sección veáanse a los libros de Embrechts, Klüppelberg y Mikosch (1997) y Reiss y Thomas (2001).

2.2 Pruebas de hipótesis

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una densidad $f_X(x; \theta)$, donde $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$.

Definición: Una hipótesis estadística es una afirmación o conjetura acerca de la distribución de una o más variables aleatorias.

Sea $\omega \subset \Omega$. Considere las hipótesis:

$$H_0 : \theta \in \omega \quad \text{y} \quad H_1 : \theta \in \Omega - \omega.$$

H_0 es llamada la hipótesis nula y H_1 la hipótesis alternativa.

Definición: Una prueba de hipótesis es una regla de decisión basada en $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ que especifica para qué valores muestrales no se rechaza que H_0 es verdadera y para qué valores se rechaza H_0 y se acepta que H_1 es verdadera.

Si χ denota al conjunto de todos los valores posibles del vector de observaciones \mathbf{X} , entonces una prueba es una partición de χ en dos conjuntos, χ_R y χ_A , tales que $\chi_R \cup \chi_A = \chi$ y $\chi_R \cap \chi_A = \phi$. La regla de decisión es: rechazar H_0 si $\mathbf{x} \in \chi_R$ o no rechazar H_0 si $\mathbf{x} \in \chi_A$, donde \mathbf{x} es una realización de \mathbf{X} .

Típicamente, χ_R se describe en términos de una estadística $T = t(\mathbf{X})$ la cual es llamada la estadística de prueba. Al considerar $T = t(\mathbf{X})$, el espacio χ es transformado en el espacio τ el cual es el conjunto de todos los valores posibles de T .

Al tomar la decisión de rechazar o no rechazar H_0 puede ocurrir alguno de los siguientes tipos de errores:

Error de tipo I: se rechaza H_0 cuando H_0 es verdadera.

Error de tipo II: no se rechaza H_0 cuando H_0 es falsa.

Las pruebas de hipótesis se evalúan y comparan a través de las probabilidades de los errores de tipo I y II, las cuales son:

$$\begin{aligned}
P \{\text{error de tipo I usando } \chi_R\} &= P \{\mathbf{x} \in \chi_R \mid H_0 \text{ es verdadera}\} \\
&= P \{\mathbf{x} \in \chi_R \mid \theta \in \omega\} \\
&= \int_{\chi_R} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta) d\mathbf{x}, \theta \in \omega \\
&= \int_{\tau_R} f_T(t; \theta) dt, \theta \in \omega
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
P \{\text{error de tipo II usando } \chi_R\} &= P \{\mathbf{x} \in \chi_A \mid H_0 \text{ es falsa}\} \\
&= P \{\mathbf{x} \in \chi_A \mid \theta \in \Omega - \omega\} \\
&= \int_{\chi_A} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta) d\mathbf{x}, \theta \in \Omega - \omega \\
&= \int_{\tau_A} f_T(t; \theta) dt, \theta \in \Omega - \omega.
\end{aligned}$$

Lo peor que puede suceder es que $P \{\text{error de tipo I usando } \chi_R\}$ sea máxima para $\theta \in \omega$ o que $P \{\text{error de tipo II usando } \chi_R\}$ sea máxima para $\theta \in \Omega - \omega$.

Definición: Se dice que una prueba χ_R es de tamaño α si

$$P \{\text{error de tipo I usando } \chi_R\} \leq \alpha, \quad \theta \in \omega, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Es decir, χ_R es de tamaño α si

$$\sup_{\theta \in \omega} \{P \{\text{error de tipo I usando } \chi_R\}\} \leq \alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Definición: La función de potencia de una prueba χ_R es una función $\beta_{\chi_R}(\theta) : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned}
\beta_{\chi_R}(\theta) &= P \{\text{rechazar } H_0 \text{ usando } \chi_R \mid \theta\} \\
&= P \{\mathbf{x} \in \chi_R \mid \theta\} \\
&= \int_{\chi_R} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta)
\end{aligned}$$

En general, no existe una prueba χ_R óptima. Por lo tanto, típicamente se fija un tamaño de prueba, digamos α_0 , y se trata de identificar la prueba uniformemente más potente de tamaño α_0 bajo la hipótesis alternativa.

2.2.1 Pruebas de bondad de ajuste

Definición: Una *prueba de bondad de ajuste* es un procedimiento estadístico para probar la hipótesis de que una función de distribución particular ajusta un conjunto de datos observados sin especificar una hipótesis alternativa.

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una f.d. $F_X(x)$. Cuando se enfrenta el problema de construir una prueba de bondad de ajuste para la hipótesis nula

$$H_0 : F_X(x) = F_0(x),$$

donde $F_0(x)$ denota una familia de distribuciones, no se cuenta con un criterio general para construirla. Sin embargo, al revisar la literatura se observa que muchas pruebas se han obtenido con base en alguno de los siguientes criterios (D'Agostino y Stephens, 1986).

Pruebas basadas en la función de distribución empírica

Estas pruebas están basadas en una comparación de la función de distribución empírica (f.d.e.) con la f.d. teórica. La estadística de prueba es de la forma:

$$T_1 = d_1(F_0(x), F_n(x))$$

donde $d_1(F_0(x), F_n(x))$ es una función de distancia y $F_n(x)$ denota la f.d.e. la cual se define como

$$F_n(x) = \frac{\# \text{ de } x'_i \text{ s } < x}{n}$$

donde las x'_i s son una realización de la m.a.

Ejemplo: la estadística de Kolmogorov

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_0(x)|$$

y la de Anderson-Darling

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F_0(x))^2}{F_0(t)(1 - F_0(t))} dF_0(x).$$

La distribución de algunas estadísticas de este tipo no depende de $F_0(x)$.

Pruebas basadas en la función característica empírica

Sea $\phi_0(x)$ la función característica (f.c.) de $F_0(x)$ y sea $\phi_n(x)$ la f.c. empírica definida como

$$\phi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\{itx_i\}, i = \sqrt{-1}, t \in \Re.$$

La estadística de este tipo de pruebas es de la forma

$$T_2 = d_2(\phi_0(x), \phi_n(x))$$

donde $d_2(\phi_0(x), \phi(x))$ es una función de distancia tal que $d(\phi_0(x), \phi(x)) = 0$ si y sólo si $\phi(x) = \phi_0(x)$.

Ejemplo: la estadística de Epps (2005)

$$I_n = n \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t) - \phi_0(t)|^2 w(t) dt$$

donde

$$w(t) = |\phi_0(t)|^2 / \int |\phi_0(\tau)|^2 d\tau.$$

Pruebas basadas en momentos

Otro criterio para construir pruebas de bondad de ajuste consiste en comparar algunos momentos poblacionales con los momentos muestrales correspondientes. El k -ésimo momento central de $F_0(x)$, $k > 0$, se define como

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k dF_0(x)$$

donde $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_0(x)$ y el k -ésimo momento central muestral está dado por

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$$

donde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Ejemplo: la estadística

$$b_2 = \frac{m_4}{m_2^2}.$$

A pesar de que los k -ésimos momentos de dos distribuciones distintas pueden ser iguales para algunos valores de k , existen muchas pruebas basadas en este criterio (Thode, 2002).

Pruebas de correlación y regresión

Sea $F_0(x)$ una f.d. que depende únicamente de parámetros de localidad y escala, $\mu \in \Re$ y $\sigma^2 > 0$. Sea $\mathbf{X}_0 = (X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$ el vector de estadísticas de orden correspondientes a la m.a. X_1, X_2, \dots, X_n . Sea $\mathbf{Z}_0 = (Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots, Z_{(n)})$ una m.a. ordenada de la f.d. $F_0(x)$ con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ y sean $\mathbf{m}' = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ y $\mathbf{V} = \{v_{ij}\}$ el vector de medias y la matriz de covarianzas de \mathbf{Z}_0 , respectivamente. Entonces,

$$X_{(i)} \stackrel{d}{=} \mu + \sigma Z_{(i)}, i = 1, \dots, n.$$

Una prueba de correlación compara dos estimadores de σ^2 . Un ejemplo de este tipo es la prueba de Shapiro y Wilk (1965) para probar normalidad univariada cuya estadística de prueba es

$$W = \frac{\left[\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)} \right]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

para ciertas constantes a_1, a_2, \dots, a_n .

Una prueba de regresión consiste en medir la linealidad entre \mathbf{X}_0 y \mathbf{m} .

Pruebas basadas en caracterizaciones

Se dice que una propiedad caracteriza la distribución F_0 cuando dicha propiedad se cumple si y sólo si F_0 es verdadera.

Se dice que una prueba se basa en una caracterización de F_0 cuando se prueba que se cumple la propiedad característica en lugar de probar directamente que se cumple F_0 . Algunas pruebas basadas en caracterizaciones son de alguno de los tipos anteriores.

Evaluación de una prueba de bondad de ajuste

La forma más común de evaluar una prueba de bondad de ajuste consiste en obtener su potencia contra una distribución alternativa completamente especificada. Sin embargo, debido a que en muchos casos es difícil (o no es posible) calcular la potencia de una prueba analíticamente, típicamente se recurre al uso de simulación de Monte Carlo para obtener una estimación empírica de la misma.

Capítulo 3

Revisión de literatura

En este capítulo se hace una revisión sobre pruebas para las distribuciones normal, Gumbel y exponencial, las cuales pertenecen a la clase C_{lss} de distribuciones estables con parámetros de localidad y escala desconocidos. También se revisa la literatura sobre pruebas para normalidad multivariada.

La prueba de Shapiro y Wilk (1965) es la prueba clásica para probar normalidad univariada. La estadística de prueba es la razón del cuadrado de una combinación lineal de las estadísticas de orden entre la varianza muestral. Varios estudios de potencia dan evidencia de que esta prueba tiene buena potencia cuando se consideran tamaños de muestra pequeños (Gan y Koehler, 1990 y Seier, 2002).

Thode (2002) revisa varias pruebas formales para normalidad además de algunos métodos gráficos y otras pruebas generales útiles para detectar desviaciones de normalidad. Thode hace una discusión sobre las comparaciones de las potencias de varias pruebas de normalidad realizadas en trabajos previos y recomienda la prueba de Shapiro y Wilk porque tiene buena potencia contra una amplia variedad de distribuciones no normales.

Srivastava y Mudholkar (2003) revisan varias pruebas de normalidad univariada con el propósito de indicar qué ventajas y limitaciones tienen e ilustrar su uso. Srivastava y Mudholkar mencionan que la prueba de Shapiro y Wilk es razonable y apropiada en

la mayoría de las situaciones prácticas.

Algunas pruebas para normalidad univariada propuestas en los últimos años son las de Bontemps y Meddahi (2005), Cabaña y Cabaña (2003) y Ahmad y Mugdadi (2003).

Epps (2005) propone una clase de procedimientos para probar bondad de ajuste de familias con parámetros de localidad y escala. La estadística de prueba es una medida de la distancia entre la función característica empírica de las observaciones estandarizadas usando estimadores consistentes de los parámetros y la función característica estándar teórica.

Para probar la hipótesis de distribución Gumbel, Stephens (1977) obtiene valores críticos asintóticos bajo esta hipótesis de las estadísticas tipo Cramer-von Mises. Kinison (1989) propone usar el coeficiente de correlación muestral de una gráfica de probabilidad.

Henze y Meintanis (2005) revisan pruebas clásicas y recientes para probar exponencialidad. Además proponen una prueba basada en una caracterización de la distribución exponencial y realizan un estudio de simulación para comparar las potencias de las pruebas.

Las pruebas de Mardia (1970) son las pruebas clásicas para probar normalidad multivariada (NMV). Estas pruebas están basadas en medidas de asimetría y curtosis multivariadas.

Henze y Zirkler (1990) proponen una clase de pruebas para normalidad p -variada basadas en la comparación de la función característica empírica de las observaciones ortogonalizadas con la función característica normal estándar p -variada, cuya estadística de prueba es invariante afín. Con base en los resultados de Csörgo (1989), los autores demuestran que su clase de pruebas es consistente contra cualquier alternativa no normal.

Mudholkar, Srivastava y Lin (1995) descomponen el problema de probar normalidad p -variada en el problema de probar normalidad univariada de p componentes usando la prueba de Shapiro-Wilk (1965). Por medio de un estudio de simulación de Monte

Carlo, Mudholkar encuentra evidencia de que su prueba conserva el tamaño de prueba y que tiene mayor potencia que otras pruebas.

Hay varias revisiones sobre pruebas para NMV. Looney (1995) revisa pruebas para NMV basadas en pruebas para normalidad univariada. El propósito de su revisión es indicar a los usuarios cómo implementar las pruebas.

Thode (2002) revisa algunas estrategias generales para evaluar la bondad de ajuste de la distribución NMV y varias pruebas formales para NMV. Thode recomienda las pruebas de Mardia (1970) y de Henze y Zirkler (1990) para probar NMV ya que, de acuerdo con las comparaciones realizadas en los trabajos revisados, tienen buena potencia contra una amplia variedad de alternativas.

Henze (2002) hace una sinopsis sobre pruebas invariantes-afines para NMV dando énfasis al progreso que se logró en los 10 años previos a la publicación. Henze recomienda la prueba de Henze y Zirkler (1990) como prueba omnibus de NMV ya que ésta es consistente contra cualquier alternativa.

Srivastava y Mudholkar (2003) revisan métodos para probar normalidad multivariada e indican sus ventajas y limitaciones e ilustran su uso.

Mecklin y Mundfrom (2004) hacen una revisión sobre un gran número de técnicas para probar bondad de ajuste de la distribución NMV y resumen los resultados de los estudios de potencia realizados en los trabajos incluidos en la revisión.

Algunas referencias recientes sobre pruebas para NMV son Sürücü (2006), Székely y Rizo (2005) y Hwu, Han y Rogers (2002).

En varios trabajos se compara la potencia de pruebas para NMV. Por ejemplo, Romeu y Ozturk (1993) realizan un estudio de simulación de Monte Carlo para comparar 10 pruebas de bondad de ajuste para NMV. Las pruebas son comparadas con respecto al efecto del tamaño de muestra, la dimensión, la probabilidad de la cola, la estructura de covarianzas y el tipo de alternativa.

Mecklin y Mundfrom (2005), evalúan la potencia de 13 pruebas para NMV por medio de simulación de Monte Carlo. Con base en sus resultados, estos autores recomiendan

la prueba de Henze y Zirkler (1990) como prueba formal de NMV y recomiendan no usar 6 de las pruebas consideradas en su estudio, entre ellas la de Mudholkar, Srivastava y Lin (1995) y la de Mardia y Foster (1983), porque no conservan el tamaño de prueba fijado.

Farrell, Sahbian-Barrera y Naczk (2007) revisan literatura sobre pruebas para NMV y estudian el tamaño y la potencia de 3 de ellas. Usando simulación encuentran que la prueba de Henze y Zirkler (1990) tiene buenas propiedades de potencia particularmente para tamaños de muestra mayores que 75 y que la extensión de la prueba de Shapiro-Wilk propuesta por Royston (1992) es efectiva para detectar desviaciones de NMV para tamaños de muestra pequeños.

Capítulo 4

Prueba para distribuciones estables univariadas

En este capítulo se propone un método para construir pruebas de bondad de ajuste para distribuciones estables con parámetros de localidad y escala desconocidos. En la Sección 4.3 se dan los detalles necesarios para probar las hipótesis de normalidad, Gumbel y exponencialidad. En la Sección 4.5 se presenta una comparación de las potencias de estas pruebas con las potencias de las pruebas de Anderson-Darling (1952) y Epps (2005), las cuales se describen en la Sección 4.4 junto con la prueba de Shapiro y Wilk (1965).

4.1 Introducción

Sea C_{lss} la clase de distribuciones integrada por las distribuciones sum, max y min-estables cuyos únicos parámetros desconocidos son los de localidad y escala.

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de tamaño n de una función de distribución $F_X \in C_{lss}$ con parámetros de localidad y escala $\mu \in \mathfrak{R}$ y $\sigma > 0$. Considere la transformación

$$Z_k = h(X_i, X_j), \quad i < j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.1)$$

donde $m = n(n - 1)/2$ y h denota cualquiera de las operaciones suma, máximo y mínimo.

Por la propiedad de estabilidad de F_X , la f.d. de la v.a. Z_k , denotada como G , pertenece a la clase C_{lss} . Sean $\mu_1 \in \Re$ y $\sigma_1 > 0$ los parámetros de la distribución G , entonces

$$G(z) = F_0 \left(\frac{z - \mu_1}{\sigma_1} \right)$$

donde $F_0(\cdot)$ denota la forma estándar de F_X , esto es, para $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Por lo tanto,

$$F_0^{-1}(G(z)) = \frac{z - \mu_1}{\sigma_1}, \quad (4.2)$$

donde $F_0^{-1}(\cdot)$ denota la función inversa de $F_0(\cdot)$.

De (4.2) se tiene que $q(Z_k) \equiv F_0^{-1}(G(Z_k))$ es una función lineal de la variable aleatoria Z_k . Así, la correlación entre $q(Z_k)$ y Z_k es igual a uno.

4.2 La prueba propuesta

Para una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n de tamaño n de una f.d. $F_X(x)$, sean Z_1, Z_2, \dots, Z_m las variables aleatorias definidas por la transformación (4.1). Sea $G_m(\cdot)$ la función de distribución empírica de las Z_k 's, es decir,

$$G_m(z) = \frac{\# \text{ de } Z_k \text{'s} < z}{m}.$$

Entonces, un estimador del lado izquierdo de (4.2) es

$$\hat{q}(Z_k) = F_0^{-1}(G_m(Z_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Para probar la hipótesis:

$$H_0 : F_X = F_{lss}, \text{ donde } F_{lss} \in C_{lss} \quad (4.3)$$

se propone usar como estadística de prueba el coeficiente de correlación entre $\hat{q}(Z_k)$ y Z_k , $k = 1, 2, \dots, m$ el cual se define como

$$R = \frac{\sum_{k=1}^m \left(\hat{q}(Z_k) - \overline{\hat{q}(Z)} \right) \left(Z_k - \bar{Z} \right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\hat{q}(Z_k) - \overline{\hat{q}(Z)} \right)^2 \sum_{k=1}^m \left(Z_k - \bar{Z} \right)^2}} \quad (4.4)$$

donde $\overline{\hat{q}(Z)} = m^{-1} \sum_{k=1}^m \hat{q}(Z_k)$.

Por la relación (4.2), se espera que la estadística R sea cercana a 1. Por lo tanto, una prueba de tamaño α rechaza la hipótesis nula en (4.3) si $R < k_\alpha$, donde el valor crítico k_α es tal que $\alpha = P(R < k_\alpha | H_0)$.

Note que para obtener k_α se pueden escoger cualesquiera valores de μ y σ debido a que la distribución de R es aproximadamente libre de parámetros, ya que bajo H_0 , por (4.2), $\hat{q}(Z_k)$ es aproximadamente lineal y R es invariante bajo transformaciones de localidad y escala.

4.2.1 Distribución de la estadística de prueba

Dada H_0 y dados n y α , la constante crítica k_α se puede obtener usando simulación de Monte Carlo de la siguiente manera.

1. Se calculan N valores de R , digamos r_1, r_2, \dots, r_N , a partir de muestras pseudo aleatorias de tamaño n de la distribución $F_{l_{ss}}$.
2. Sean $r_{(1)}, r_{(2)}, \dots, r_{(N)}$ los valores r_i ordenados de manera ascendente, $i = 1, 2, \dots, N$.
Un estimador del valor crítico k_α es $\tilde{k}_\alpha = r_{(\alpha N)}$.

4.3 Pruebas para algunas hipótesis específicas

En esta sección se dan los detalles que se requieren para aplicar el método propuesto para probar las hipótesis de normalidad, de distribución Gumbel y de exponencialidad. En cada caso se proporcionan algunos valores críticos de la estadística de prueba para muestras de tamaño $20 \leq n \leq 50$.

4.3.1 Prueba para normalidad univariada

Definición: Se dice que la v.a. X tiene distribución normal univariada si su f.d. está dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y - \mu)^2 \right\} dy, \mu \in \mathfrak{R} \text{ y } \sigma > 0.$$

Se puede ver que la función característica de la distribución normal coincide con la función característica de una distribución sum-estable con índice de estabilidad $\alpha = 2$, véase la Definición 2 de la Subsección 2.1. Entonces, es claro que la distribución normal pertenece a la clase C_{lss} ya que $F_X(x)$ depende únicamente de parámetros de localidad y escala.

Por lo tanto, el método propuesto en la Sección 4.2 se puede aplicar para probar la hipótesis

$H_{0,N}$: la muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n tiene distribución normal

de la siguiente manera.

Sea R_N igual a la estadística R (definida en (4.4)) evaluada en

$$Z_k = X_i + X_j, \quad i < j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

y

$$\hat{q}(Z_k) = \Phi_0^{-1}(G_m(Z_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

donde Φ_0^{-1} denota la inversa de la función de distribución normal estándar.

Se rechaza la hipótesis $H_{0,N}$ si $R_N < k_\alpha$ donde k_α es tal que $\alpha = P(R_N < k_\alpha | H_{0,N})$, es decir, k_α es el percentil del $\alpha\%$ de la distribución de R_N bajo $H_{0,N}$.

La Tabla 4.1 contiene los percentiles del 1, 2.5, 5 y 10% de la distribución de R_N bajo la hipótesis de normalidad para muestras aleatorias de tamaño $20 \leq n \leq 50$. Para obtener estos valores se siguió el procedimiento indicado al final de la Sección 4.2. Se

calcularon 20,000 valores de R_N a partir de muestras pseudo aleatorias de tamaño n de la distribución normal univariada.

La Figura 4.1 contiene las densidades empíricas suavizadas de R_N para muestras de tamaño 30, 40 y 50. Se puede observar que la distribución de R_N está muy concentrada a la izquierda del 1 y que se concentra más a medida que aumenta el tamaño de muestra.

4.3.2 Prueba para la distribución Gumbel

Definición: Se dice que la v.a. X tiene distribución Gumbel si

$$F_X(x) = \exp \left\{ -e^{-\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}} \right\}, \quad \mu_1 \in \mathfrak{R} \text{ y } \sigma_1 > 0. \quad (4.5)$$

De los teoremas revisados en la Subsección 2.1.2 (Teorema de Fisher y Tippet y propiedad límite de las distribuciones max-estables), se tiene que la distribución Gumbel es max-estable. Entonces, de (4.5) y la observación anterior, se ve que la distribución Gumbel pertenece a la clase C_{lss} .

Por lo tanto, evaluando la estadística R (dada en (4.4)) en

$$Z_k = \max \{X_i, X_j\}, \quad i < j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

y

$$\hat{q}(Z_k) = F_0^{-1}(G_m(Z_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

donde F_0^{-1} denota la inversa de la función de distribución Gumbel estándar y denotándola como R_G , se obtiene una estadística de prueba para la hipótesis

$H_{0,G}$: la muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n tiene distribución Gumbel

la cual se rechaza con un tamaño de prueba α si $R_G < k_\alpha$ donde k_α es tal que $\alpha = P(R_G < k_\alpha | H_{0,G})$.

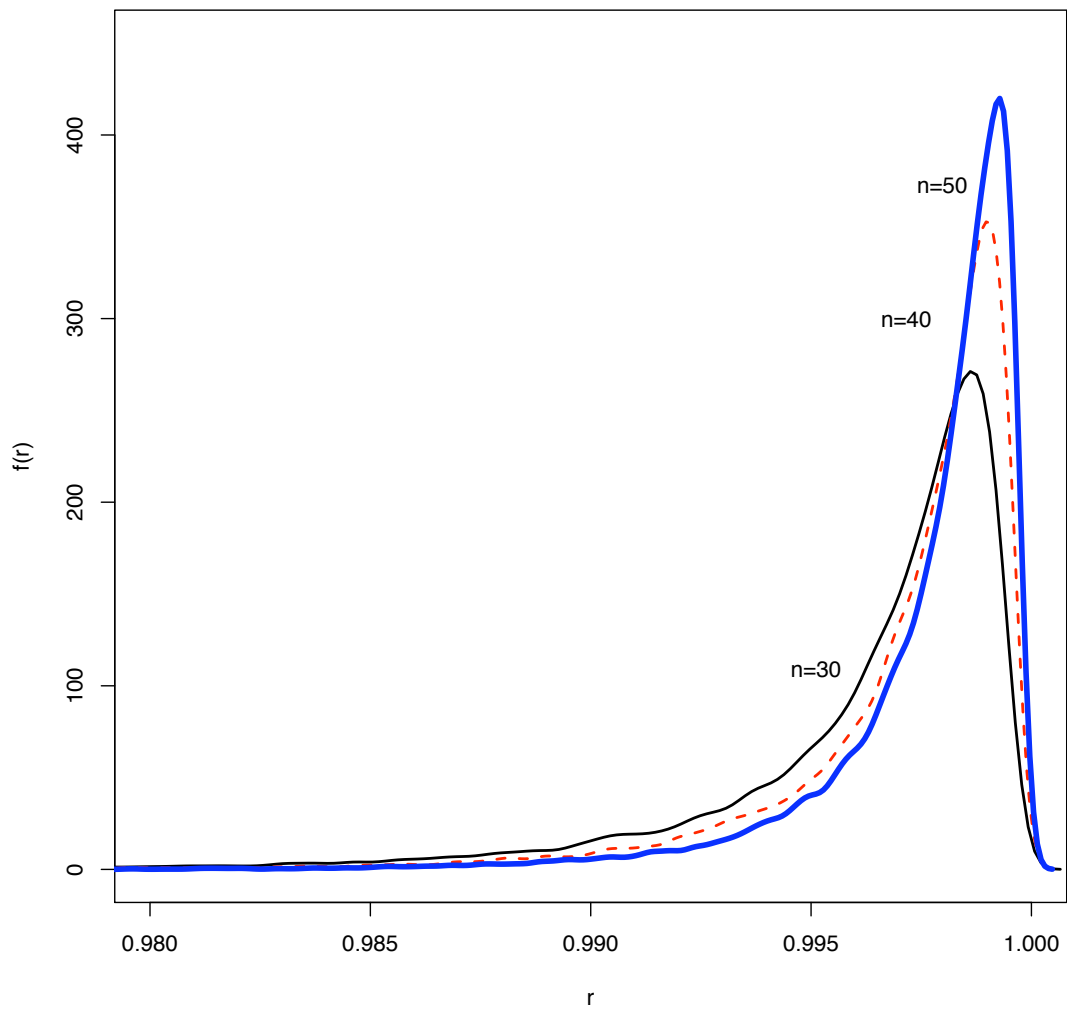


Figura 4.1: Distribución de R_N para $n = 30, 40, 50$

La Tabla 4.2 contiene los percentiles del 1, 2.5, 5 y 10% de la distribución de R_G bajo la hipótesis de distribución Gumbel para muestras aleatorias de tamaño $20 \leq n \leq 50$. Estos valores se obtuvieron usando 20,000 muestras pseudo aleatorias de la distribución Gumbel estándar.

En la Figura 4.2 se observa que la distribución de R_G está concentrada a la izquierda de 1 y que se concentra más cuando el tamaño de muestra crece.

4.3.3 Prueba para exponencialidad

Definición: Se dice que la v.a. X tiene la distribución exponencial de dos parámetros si

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x - \mu}{\beta}\right\}, \text{ para } x > \mu, \mu \in \Re \text{ y } \beta > 0.$$

Es bien conocido que el mínimo de una muestra aleatoria exponencial también tiene distribución exponencial (Arnold, Balakrishnan y Nagaraja (1992)). Así, es claro que esta distribución pertenece a la clase C_{lss} .

Por lo tanto, evaluando la estadística definida en (4.4) en

$$Z_k = \min\{X_i, X_j\}, \quad i < j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

y

$$\hat{q}(Z_k) = F_0^{-1}(G_m(Z_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

donde F_0^{-1} denota la inversa de la función de distribución exponencial estándar y denotándola como R_E , se obtiene una estadística de prueba para probar la hipótesis

$H_{0,E}$: la muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n tiene distribución exponencial.

Se rehaza $H_{0,E}$ con un tamaño de prueba α si $R_E < k_\alpha$, con k_α tal que $\alpha = P(R_E < k_\alpha | H_{0,E})$.

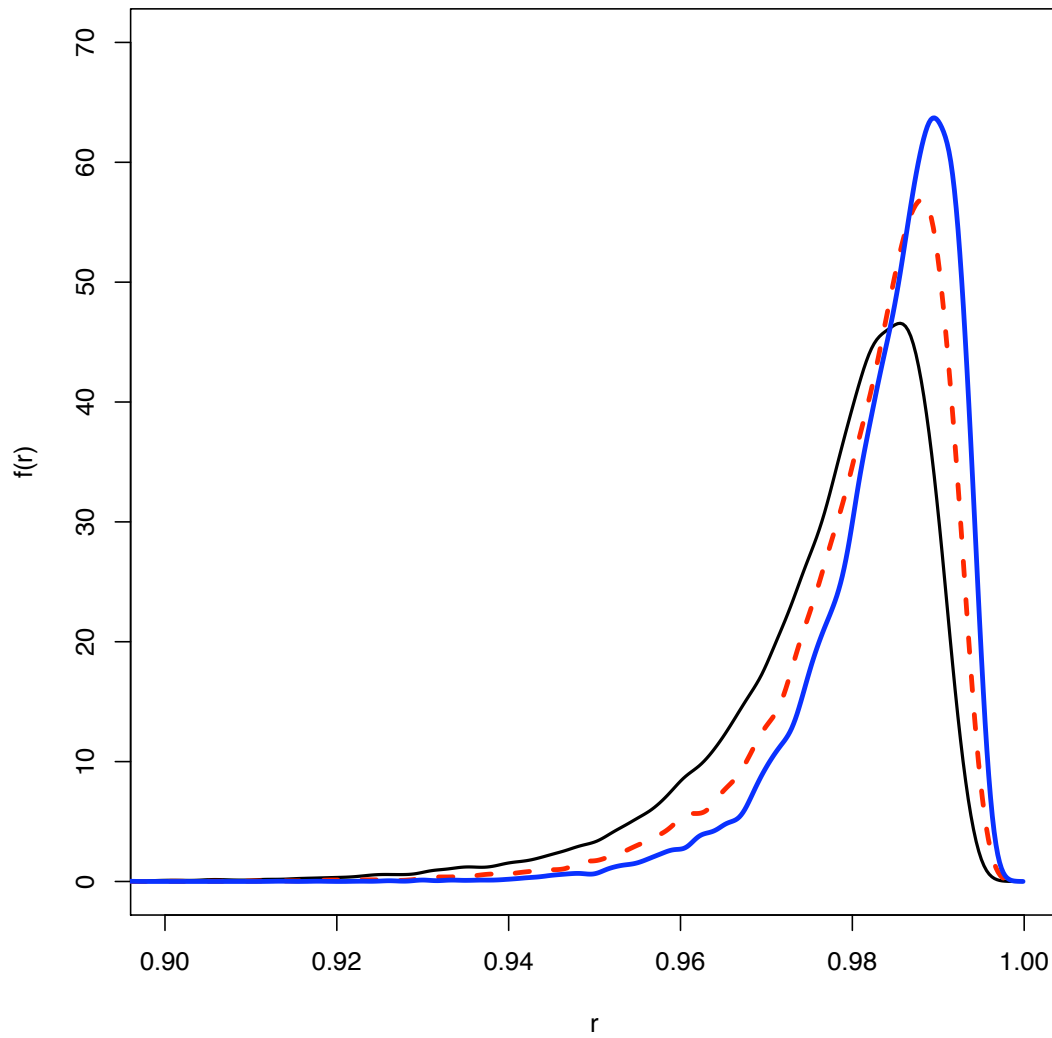


Figura 4.2: Distribución de R_G para $n = 30, 40, 50$

La Tabla 4.3 contiene percentiles del 1, 2.5, 5 y 10% de la distribución de R_E bajo la hipótesis de exponencialidad para muestras aleatorias de tamaño $20 \leq n \leq 50$. Estos valores se obtuvieron siguiendo el procedimiento indicado al final de la Sección 4.2 usando 20,000 muestras pseudo aleatorias de la distribución exponencial estándar.

La Figura 4.3 contiene la densidad empírica suavizada de R_E bajo $H_{0,E}$ para muestras de tamaño 30, 40 y 50.

4.4 Otras pruebas de bondad de ajuste

Sean $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ las estadísticas de orden de una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n de tamaño n de una f.d. F_X . En esta sección se revisa la prueba de Shapiro y Wilk (1965) para normalidad univariada y las pruebas de bondad de ajuste de Anderson-Darling (1952) y Epps (2005).

4.4.1 Prueba de Shapiro-Wilk

Sea $\Phi(\cdot)$ la función de distribución normal estándar. Para probar la hipótesis de normalidad univariada:

$$H_0 : F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \text{ donde } \mu \in \mathfrak{R} \text{ y } \sigma > 0 \text{ son desconocidos,}$$

Shapiro y Wilk (1965) proponen la estadística de prueba

$$W_X = \frac{\left[\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)}\right]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.6)$$

donde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ y a_i es el i -ésimo elemento del vector

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)' = \frac{\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}}{(\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{m})^{1/2}}$$

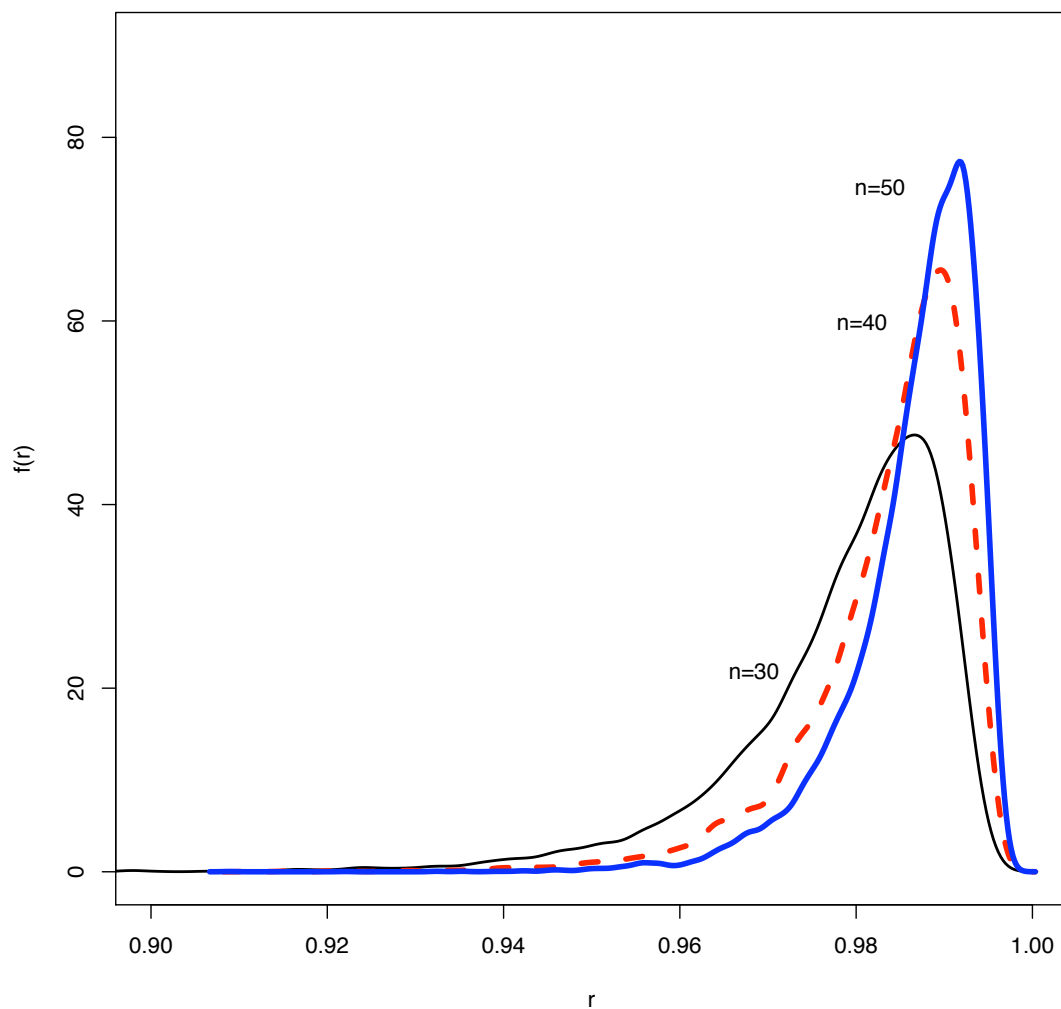


Figura 4.3: Distribución de R_E para $n = 30, 40, 50$

con $\mathbf{m}' = E[\mathbf{Z}]$ y $\mathbf{V} = \mathbf{cov}(\mathbf{Z})$ donde \mathbf{Z} denota al vector de estadísticas de orden de una muestra aleatoria normal estándar de tamaño n .

Para calcular \mathbf{a} es necesario conocer \mathbf{m} and \mathbf{V} . Sin embargo, ya que \mathbf{V} sólo se conoce para tamaños de muestra $n \leq 20$, Royston (1995) desarrolló un algoritmo para calcular una aproximación de \mathbf{a} para muestras de tamaño $3 \leq n \leq 5000$.

La prueba de Shapiro-Wilk rechaza la hipótesis de normalidad con un tamaño de prueba α si $W_X < k_\alpha$, donde k_α denota el percentil $100\alpha\%$ de la distribución de W_X bajo la hipótesis de normalidad.

Como W_X es una función del vector \mathbf{a} , la distribución de W_X no puede obtenerse analíticamente y es necesario recurrir a métodos numéricos para obtenerla.

Usando simulación, Royston (1992) encuentra que la cola superior de la distribución de $\log(1 - W)$ se puede ajustar con una distribución normal con parámetros

$$\mu_n = -1.5861 - .31082y - 0.083751y^2 + .0038915y^3 \quad (4.7)$$

y

$$\sigma_n = \exp(-.4803 - .082676y + .0030302y^2), \quad (4.8)$$

donde $y = \log n$ y el tamaño de muestra es $11 < n < 2000$.

La prueba del siguiente lema se encuentra en Shapiro y Wilk (1965).

Lema 5.1: El máximo valor de W es 1.

Observación 1. Es fácil probar que $W_X = W_Y$ cuando

$$y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{s^2}}, i = 1, \dots, n, \quad (4.9)$$

donde $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

4.4.2 Prueba de Anderson-Darling

Considere la hipótesis nula $H_0 : F_X = F_0$, donde F_0 es alguna distribución conocida. La estadística de Anderson-Darling es

$$AD = -n - \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)}{n} [\ln F(x_{(i)}) + \ln(1 - F(x_{(n+1-i)}))]$$

Se rechaza H_0 si $AD > c_{1-\alpha}$, donde el valor crítico $c_{1-\alpha}$ es el percentil $100(1-\alpha)\%$ de la distribución de AD bajo H_0 . Cuando F_0 es la distribución Gumbel, los valores críticos se pueden obtener de Stephens (1977).

4.4.3 Prueba de Epps

Epps (2005) propone una clase de procedimientos para probar

$$H_0 : F_X(x) = F_0(x; \theta_1, \theta_2), \quad (4.10)$$

donde $F_0(x; \theta_1, \theta_2)$ denota una función de distribución con parámetros de localidad y escala $\theta_1 \in \mathfrak{R}$ y $\theta_2 > 0$. Sea $Z_j = (X_j - \theta_1)/\theta_2$ y sea $\phi_0(t)$ su función característica correspondiente.

Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ estimadores equivariantes y consistentes de θ_1 y θ_2 . Considere las observaciones estandarizadas $\hat{Z}_j := (X_j - \hat{\theta}_1)/\hat{\theta}_2$ cuya función característica empírica es:

$$\hat{\phi}_n(t) := n^{-1} \sum_{j=1}^n e^{it\hat{Z}_j}, \quad i = \sqrt{-1} \text{ y } t \in \mathfrak{R}.$$

La forma general de la estadística de prueba es

$$I_n = n \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}_n(t) - \phi_0(t) \right|^2 w(t) dt$$

donde

$$w(t) = |\phi_0(t)|^2 / \int |\phi_0(\tau)|^2 d\tau.$$

Esta prueba rechaza la hipótesis H_0 en (4.10) con un tamaño de prueba α si $I_n > k_\alpha$.

Para probar normalidad, la estadística I_n se reduce a

$$I_n = 1 + 2n^{-1} \sum_{j < k} e^{-(\hat{Z}_j - \hat{Z}_k)^2/4} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{j=1}^n e^{-\hat{Z}_j^2/6} + \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

La constante crítica del 10% para muestras de tamaño $10 \leq n \leq 400$ es $k_{.10,n} = .121 - .18n^{-1/2} + .85n^{-1} - 2n^{-3/2}$.

Bajo la hipótesis de distribución Gumbel, se tiene que

$$I_n = 1 + \frac{8}{n} \sum_{j < k} \frac{\widehat{W}_j \widehat{W}_k}{(\widehat{W}_j + \widehat{W}_k)^2} + 8 \sum_{j=1}^n \widehat{W}_j \left[(\widehat{W}_j + 1) e^{\widehat{W}_j} Ei(-\widehat{W}_j) + 1 \right] + \frac{2n}{3},$$

donde $Ei(-r) = -\int_r^\infty u^{-1} e^{-u} du$ y $\widehat{W}_j \equiv e^{-\hat{Z}_j}$. Los valores críticos del 10% para muestras de tamaño $10 \leq n \leq 400$ están dados por $k_{.10,n} = .226 - .106n^{-1/2} + .42n^{-1} - .8n^{-3/2}$.

Bajo la hipótesis de exponencialidad,

$$I_n = 1 + \frac{2}{n} \sum_{j < k} e^{-|\hat{Z}_j - \hat{Z}_k|} - \sum_{j=1}^n (1 + 2\hat{Z}_j) e^{-\hat{Z}_j} + \frac{n}{2}.$$

La constante crítica del 10% para muestras de tamaño $10 \leq n \leq 400$ es $k_{.10,n} = .635$.

4.5 Estudio comparativo

Esta sección contiene los resultados de un experimento de simulación de Monte Carlo que se realizó para comparar la potencia de las pruebas propuestas para probar normalidad, distribución Gumbel y exponencialidad con las pruebas de Anderson-Darling y Epps. La prueba de normalidad también se comparó con la prueba de Shapiro-Wilk.

4.5.1 Simulación de Monte Carlo

La potencia de las pruebas se estimó usando 5000 muestras pseudo aleatorias de tamaño $n = 50$ de cada distribución alternativa con un tamaño de prueba $\alpha = 0.10$. Las alternativas consideradas fueron:

1. Exponencial(β): $f(x) = \beta^{-1}e^{-x/\beta}$, $x > 0$ y $\beta > 0$.
2. Logística: $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$, $x \in \mathfrak{R}$.
3. Gumbel: $f(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}$, $x \in \mathfrak{R}$.
4. Cauchy: $f(x) = [\pi(1 + x^2)]^{-1}$, $x \in \mathfrak{R}$.
5. Normal: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in \mathfrak{R}$.
6. Gama($\alpha, 1$): $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}$, $x > 0$ y $\alpha > 0$.
7. Normal contaminada (α, β): $f(x) = (1 - \alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} + \alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\beta^2}x^2}$, $x \in \mathfrak{R}$.
8. Beta(α, β): $f(x) = B(\alpha, \beta)^{-1}x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}$, $0 < x < 1$.
9. Estable(α, β): $\phi(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \exp\left[\frac{-\pi i\beta(1 - |1 - \alpha|)|t|}{2t}\right]\right\}$, $x \in \mathfrak{R}$ y $\alpha \neq 1$.
10. t-Student(α): $f(x) = \alpha^{-1}B\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}$, $x \in \mathfrak{R}$.
11. Lognormal(α, β): $f(x) = \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \alpha}{\beta}\right)^2\right\}$, $x > 0$.
12. Weibull(α): $f(x) = \alpha x^{\alpha-1} \exp\{-x^\alpha\}$, $x > 0$.

4.5.2 Discusión de resultados

La Tabla 4.4 contiene las potencias estimadas de las pruebas para normalidad. En general, se observa que las potencias de R_N , W e I_n son muy similares y que la potencia de AD es menor que la de las otras pruebas. La prueba W es más potente cuando se considera como alternativa alguna distribución beta.

La Tabla 4.5 contiene las potencias estimadas de las pruebas para la distribución Gumbel. Se observa que R_G es más potente que AD e I_n cuando se consideran alternativas Gama y Weibull. En general, se observa que R_G es más potente que AD e I_n , las cuales tienen un comportamiento muy parecido.

En la Tabla 4.6 se observa que la prueba R_E es considerablemente más potente que la prueba de Anderson-Darling contra la mayoría de las alternativas consideradas. En esta comparación la prueba I_n resulta ser más potente que las otras dos en la mayoría de los casos considerados.

Tabla 4.1: Percentiles de R_N

n	0.01	0.025	0.05	0.10
20	0.9719	0.9796	0.9845	0.9887
21	0.9740	0.9810	0.9852	0.9893
22	0.9742	0.9810	0.9853	0.9893
23	0.9754	0.9823	0.9862	0.9900
24	0.9763	0.9825	0.9867	0.9903
25	0.9767	0.9827	0.9869	0.9905
26	0.9773	0.9836	0.9875	0.9910
27	0.9784	0.9841	0.9877	0.9910
28	0.9792	0.9845	0.9882	0.9915
29	0.9808	0.9858	0.9888	0.9920
30	0.9804	0.9856	0.9889	0.9919
31	0.9807	0.9859	0.9893	0.9922
32	0.9817	0.9863	0.9896	0.9925
33	0.9828	0.9870	0.9900	0.9927
34	0.9830	0.9871	0.9901	0.9929
35	0.9831	0.9875	0.9906	0.9931
36	0.9839	0.9880	0.9908	0.9933
37	0.9832	0.9880	0.9910	0.9934
38	0.9846	0.9885	0.9912	0.9936
39	0.9848	0.9887	0.9915	0.9937
40	0.9854	0.9889	0.9915	0.9938
41	0.9861	0.9895	0.9919	0.9940
42	0.9866	0.9897	0.9920	0.9941
43	0.9865	0.9901	0.9922	0.9944
44	0.9867	0.9900	0.9922	0.9943
45	0.9874	0.9904	0.9925	0.9945
46	0.9874	0.9906	0.9928	0.9947
47	0.9874	0.9906	0.9927	0.9948
48	0.9874	0.9906	0.9929	0.9948
49	0.9880	0.9912	0.9932	0.9950
50	0.9881	0.9911	0.9932	0.9950

Tabla 4.2: Percentiles de R_G

n	0.01	0.025	0.05	0.10
20	0.9131	0.9298	0.9402	0.9506
21	0.9151	0.9308	0.9421	0.9525
22	0.9196	0.9335	0.9438	0.9537
23	0.9244	0.9360	0.9459	0.9557
24	0.9262	0.9386	0.9473	0.9573
25	0.9277	0.9402	0.9496	0.9585
26	0.9317	0.9435	0.9519	0.9605
27	0.9338	0.9450	0.9531	0.9616
28	0.9339	0.9465	0.9549	0.9632
29	0.9375	0.9476	0.9556	0.9638
30	0.9393	0.9497	0.9571	0.9649
31	0.9407	0.9504	0.9577	0.9653
32	0.9414	0.9510	0.9589	0.9663
33	0.9432	0.9530	0.9598	0.9671
34	0.9450	0.9546	0.9611	0.9679
35	0.9460	0.9553	0.9622	0.9687
36	0.9469	0.9560	0.9631	0.9697
37	0.9477	0.9568	0.9633	0.9698
38	0.9500	0.9580	0.9643	0.9706
39	0.9494	0.9577	0.9643	0.9710
40	0.9497	0.9585	0.9651	0.9713
41	0.9524	0.9599	0.9662	0.9723
42	0.9531	0.9607	0.9666	0.9728
43	0.9539	0.9613	0.9676	0.9732
44	0.9541	0.9620	0.9676	0.9736
45	0.9550	0.9630	0.9687	0.9741
46	0.9565	0.9632	0.9691	0.9746
47	0.9577	0.9639	0.9696	0.9750
48	0.9585	0.9649	0.9702	0.9754
49	0.9581	0.9652	0.9708	0.9757
50	0.9587	0.9658	0.9709	0.9763

Tabla 4.3: Percentiles de R_E

n	0.01	0.025	0.05	0.10
20	0.9051	0.9226	0.9354	0.9473
21	0.9114	0.9270	0.9387	0.9500
22	0.9149	0.9304	0.9407	0.9516
23	0.9184	0.9327	0.9432	0.9536
24	0.9209	0.9351	0.9451	0.9553
25	0.9241	0.9373	0.9475	0.9569
26	0.9259	0.9390	0.9482	0.9580
27	0.9278	0.9408	0.9498	0.9597
28	0.9302	0.9429	0.9517	0.9607
29	0.9353	0.9461	0.9542	0.9626
30	0.9364	0.9474	0.9554	0.9635
31	0.9379	0.9484	0.9565	0.9647
32	0.9387	0.9492	0.9578	0.9656
33	0.9414	0.9516	0.9592	0.9665
34	0.9430	0.9521	0.9596	0.9670
35	0.9440	0.9531	0.9603	0.9678
36	0.9466	0.9555	0.9625	0.9693
37	0.9471	0.9560	0.9628	0.9695
38	0.9475	0.9569	0.9636	0.9703
39	0.9500	0.9580	0.9646	0.9709
40	0.9502	0.9590	0.9655	0.9717
41	0.9526	0.9607	0.9663	0.9724
42	0.9518	0.9606	0.9669	0.9729
43	0.9536	0.9616	0.9676	0.9734
44	0.9553	0.9628	0.9683	0.9741
45	0.9557	0.9635	0.9689	0.9745
46	0.9573	0.9643	0.9701	0.9754
47	0.9584	0.9651	0.9703	0.9756
48	0.9589	0.9658	0.9707	0.9760
49	0.9597	0.9662	0.9715	0.9764
50	0.9601	0.9671	0.9723	0.9771

Tabla 4.4: Potencia de las pruebas para normalidad ($n=50$, $\alpha=0.10$)

Alternativa	R_N	W	I_n	AD
Exponencial	100	100	100	100
Logística	28	27	30	25
Gumbel	83	78	79	69
Cauchy	100	100	100	82
Normal	10	10	11	11
Gamma(2.5,1)	93	94	92	88
Gamma(4,1)	80	79	79	70
Gamma(6,1)	64	63	64	53
Gamma(12,1)	40	38	42	33
NormCont(.2,2)	38	35	37	30
Beta(2,3)	19	35	24	29
Beta(3,3)	4	15	7	14
Stable(1.5,0)	85	85	86	80
Stable(1.5,.5)	88	88	89	82
Student(6)	39	36	38	32
Lognorm(0,1)	100	100	100	99
Weibull(2,1)	53	55	53	45
Weibull(3,1)	9	12	10	12
Uniforme	34	88	43	74

Tabla 4.5: Potencia de las pruebas para Gumbel ($n=50$, $\alpha=0.10$)

Alternativa	<i>AD</i>	<i>I_n</i>	<i>R_G</i>
Exponencial	90	79	100
Logística	77	77	80
Gumbel	11	10	11
Cauchy	100	97	100
Normal	67	71	73
Gamma(2.5,1)	21	20	100
Gamma(4,1)	11	10	99
Gamma(6,1)	12	11	97
Gamma(12,1)	21	21	95
NormCont(.2,2)	79	79	79
Beta(2,3)	49	54	86
Beta(3,3)	73	82	57
Stable(1.5,0)	92	92	89
Stable(1.5,.5)	77	76	98
Student(6)	79	79	79
Student(12)	73	74	75
Lognorm(0,1)	98	96	100
Weibull(2,1)	16	15	95
Weibull(3,1)	49	54	77
Uniforme	88	92	56

Tabla 4.6: Potencia de las pruebas para exponencialidad ($n=20$, $\alpha=0.10$)

Alternativa	R_E	I_n	AD
Exponencial	9	10	10
Logística	90	100	79
Gumbel	98	100	33
Cauchy	97	100	93
Normal	87	100	75
Gamma(2.5)	33	29	12
Gamma(4)	49	65	26
Gamma(6)	58	93	38
Gamma(12)	69	100	50
NormCont(.2,2)	89	100	79
Beta(2,3)	62	66	42
Beta(3,3)	81	96	67
Stable(1.5,0)	93	100	83
Stable(1.5,.5)	81	99	66
Student(6)	90	100	81
Student(12)	88	100	79
Lognorm(0,1)	13	28	21
Weibull(2)	57	58	33
Weibull(3)	82	98	66
Uniforme	61	71	44

Capítulo 5

Pruebas para distribuciones estables multivariadas: el caso de la normal multivariada

En este capítulo se propone una prueba para normalidad multivariada (NMV) basada en la prueba de Shapiro y Wilk (1965) para normalidad univariada la cual se revisa en la Sección 4.4.1. La prueba propuesta se presenta en la Sección 5.1. En la Sección 5.2 se revisan las pruebas para NMV de Mardia (1970), Henze y Zirkler (1990), Mudholkar, Srivastava y Lin (1995) y Srivastava y Hui (1987). La Sección 5.4 contiene una comparación de la potencia de la prueba propuesta con las potencias de las pruebas revisadas en la Sección 5.2.

5.1 Una prueba para normalidad multivariada

Se dice que el vector aleatorio \mathbf{X} definido en \mathfrak{R}^p tiene distribución normal p -variada con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ la cual se denota como $\mathbf{N}^p(\mu, \Sigma)$ si su función de densidad está dada por:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{p/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) \right\}.$$

Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria p -variada de tamaño $n > p \geq 1$. En esta sección se propone una prueba para la hipótesis:

$$H_0 : \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n \text{ tienen distribución } \mathbf{N}^p(\mu, \Sigma), \text{ con } \mu \text{ y } \Sigma \text{ desconocidos.}$$

Sea $\mathbf{0}$ el vector de ceros de orden p y sea \mathbf{I} la matriz identidad de orden $p \times p$. La propuesta se basa en la siguiente proposición la cual establece una caracterización bien conocida de la distribución NMV.

Proposición: $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}^p(\mu, \Sigma)$ si y sólo si $\mathbf{Z} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{X} - \mu) \sim \mathbf{N}^p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Sean $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} el vector de medias y la matriz de covarianzas muestrales. Es decir,

$$\bar{\mathbf{X}} = n^{-1} \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \text{ y } \mathbf{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})'$$

Sea $\mathbf{S}^{-1/2}$ la matriz raíz cuadrada definida positiva simétrica de \mathbf{S}^{-1} , la matriz inversa de \mathbf{S} .

Cuando $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ es una muestra aleatoria de la distribución $\mathbf{N}^p(\mu, \Sigma)$, se espera que los vectores aleatorios

$$\mathbf{Z}_j^* = \mathbf{S}^{-1/2}(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1)$$

tengan distribución cercana a la $\mathbf{N}^p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Por lo tanto, se espera que las coordenadas de \mathbf{Z}_j^* , denotadas como Z_{1j}, \dots, Z_{pj} , sean aproximadamente independientes con distribución normal estándar univariada.

Para probar la hipótesis nula de normalidad multivariada se propone la estadística de prueba

$$W^* = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p W_{Z_i}, \quad (5.2)$$

donde W_{Z_i} es la estadística de Shapiro-Wilk evaluada en la i -ésima coordenada de las observaciones transformadas Z_{i1}, \dots, Z_{in} , $i = 1, \dots, p$.

Bajo H_0 , se espera que W^* sea cercana a uno ya que también se espera que cada W_{Z_i} , $i = 1, \dots, p$, sea cercana a uno.

Se rechaza H_0 con un tamaño de prueba α si $W^* < c_{\alpha;n,p}$, donde la constante crítica $c_{\alpha;n,p}$ satisface la ecuación:

$$\alpha = P \{ W^* < c_{\alpha;n,p} \mid H_0 \text{ es verdadera} \}.$$

La distribución de W^* bajo H_0 no depende de los parámetros desconocidos (μ, Σ) ya que es una función de las observaciones estandarizadas (Henze y Zirkler, 1990).

Note que cuando $p = 1$, (5.1) es igual a (4.9). Así, por la Observación 1 de la Subsección 4.4.1, (5.2) es igual a (4.6). Es decir, en el caso de dimensión uno, W^* se reduce a la estadística de Shapiro-Wilk.

5.1.1 Distribución de la estadística de prueba

Debido a que, bajo la hipótesis de normalidad univariada, la cola superior de la distribución de $\log(1 - W)$, donde W es la estadística de Shapiro-Wilk, se puede aproximar con una distribución normal con parámetros μ_n y σ_n^2 , dados en (4.7) y (4.8), y debido a que W^* es un promedio de estadísticas de Shapiro-Wilk cuya distribución empírica es semejante a la de W , la cola superior de la distribución de $W_1^* = \log(1 - W^*)$ también se puede aproximar por una distribución normal con parámetros μ_1 y σ_1^2 , donde

$$\sigma_1^2 = \log \left\{ \frac{p-1}{p} + \frac{e^{2(\mu_n + \sigma_n^2)}}{pe^{2\mu_n + \sigma_n^2}} \right\}$$

y

$$\mu_1 = \mu_n + \frac{1}{2}\sigma_n^2 - \frac{1}{2}\sigma_1^2.$$

(Ver Apéndice C.)

Por lo tanto, la constante crítica para la prueba W^* resulta ser

$$c_{\alpha;n,p} = 1 - \exp \{ \mu_1 + \sigma_1 \Phi^{-1}(1 - \alpha) \}. \quad (5.3)$$

donde $\Phi^{-1}(x)$ denota la inversa de la función de distribución normal estándar.

En las Figuras 5.1 y 5.2 se observa que la distribución normal aproxima bien la cola derecha de la distribución empírica de W_1^* cuando $(n, p) = (20, 5)$ y $(50, 5)$.

5.2 Otras pruebas para normalidad multivariada

En esta sección se revisan las pruebas de Mardia (1970) y la clase de pruebas propuestas por Henze y Zirkler (1990). Las primeras son de interés porque son clásicas en el problema de probar NMV y las de Henze y Zirkler porque han sido recomendadas por varios autores como pruebas formales para NMV (ver Capítulo 3). Asimismo se revisan dos pruebas basadas en la prueba de Shapiro-Wilk, una es la prueba de Mudholkar, Srivastava y Lin (1995) que usa la estadística de Fisher para combinar pruebas independientes y la otra es la prueba de Srivastava y Hui (1987).

5.2.1 Pruebas de Mardia

La prueba MS de Mardia (1970) está basada en la estadística:

$$b_{1, p} = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \left[(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}) \right]^3.$$

Bajo H_0 , $\frac{1}{6}nb_{1, p} \stackrel{a}{\sim} \chi_{p(p+1)(p+2)/6}^2$. Esta prueba rechaza H_0 para valores grandes de $b_{1, p}$.

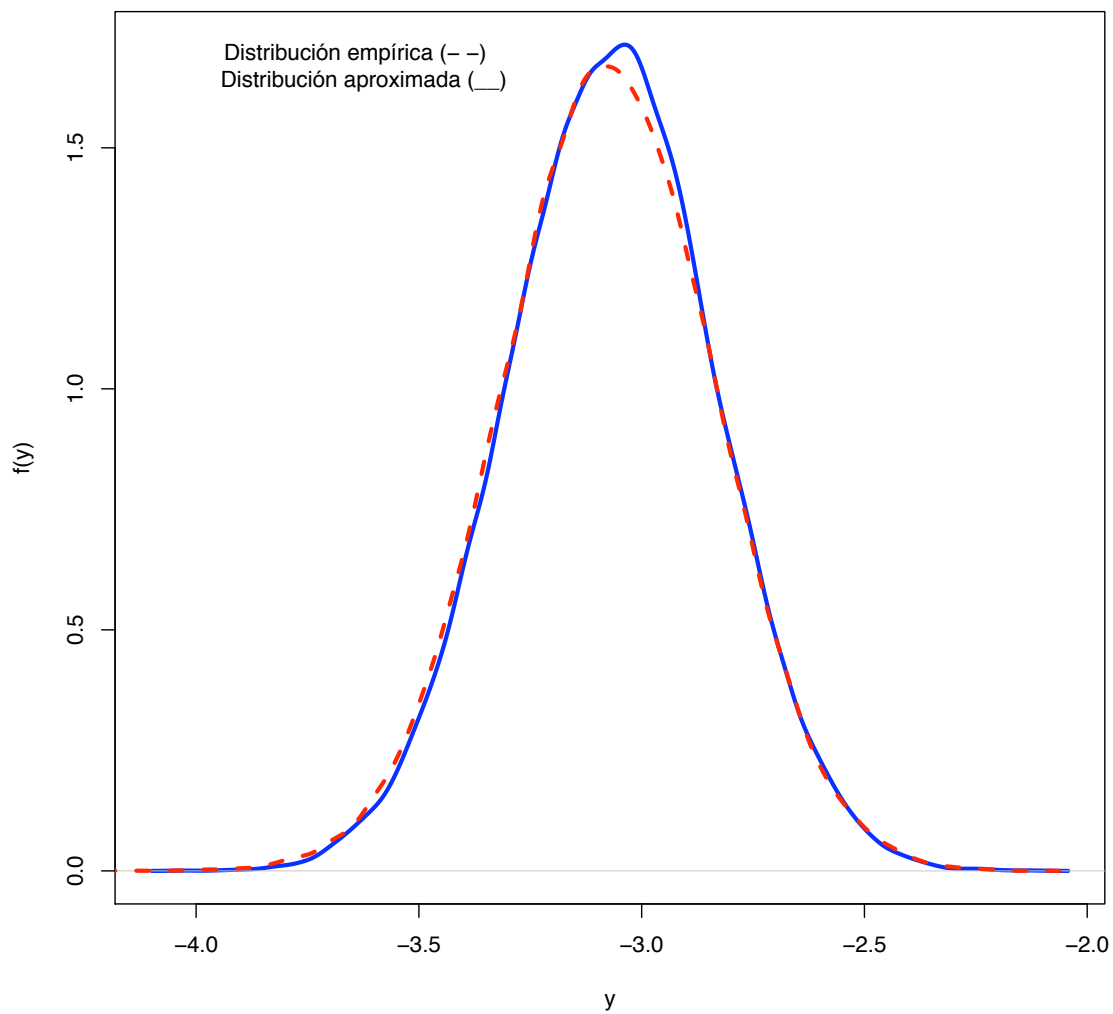
La prueba MK de Mardia (1970) usa el siguiente estimador de la curtosis multivariada como estadística de prueba

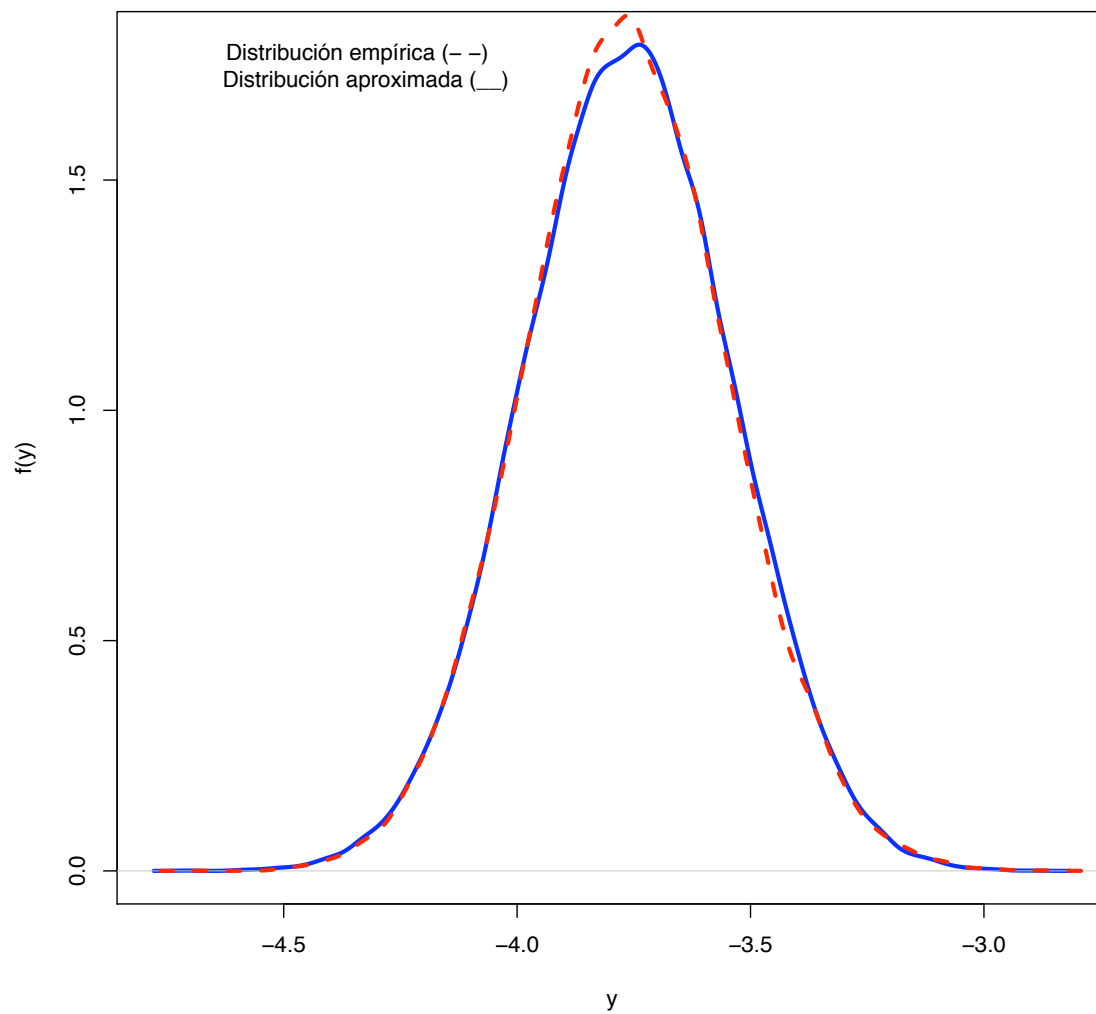
$$b_{2, p} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}) \right]^2.$$

Bajo H_0 ,

$$\sqrt{n} (b_{2, p} - p(p+2)(n-1)/(n+1)) \stackrel{a}{\sim} N(0, 8p(p+2)).$$

Se rechaza H_0 para valores pequeños y grandes de $b_{2, p}$.

Figura 5.1: Distribución de W_1^* para $(n, p) = (20, 5)$

Figura 5.2: Distribución de W_1^* para $(n, p) = (50, 5)$

5.2.2 Prueba de Henze y Zirkler

Henze y Zirkler (1990) presentan una clase de pruebas invariantes y consistentes para NMV. La estadística de prueba es

$$T_\beta = n \left(4I(\mathbf{S} \text{ singular}) + D_{n,\beta} I(\mathbf{S} \text{ no singular}) \right),$$

donde I es la función indicadora y

$$D_{n,\beta} = \int_{\mathbf{R}^p} \left| \psi_n(\mathbf{t}) - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{t}\|^2 \right\} \right|^2 \phi_\beta(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

donde $\psi_n(\mathbf{t})$ es la función característica empírica de las \mathbf{Z}_j^* s dada por

$$\psi_n(\mathbf{t}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp \{ i\mathbf{t}'\mathbf{Z}_j^* \}, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{R}^p$$

y

$$\phi_\beta(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi\beta^2)^{p/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta^2} \|\mathbf{t}\|^2 \right\}, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{R}^p.$$

El parámetro β se escoge arbitrariamente y para cada valor de este se tiene una prueba diferente.

$D_{n,\beta}$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_{n,\beta} &= \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2} \|\mathbf{Z}_j^* - \mathbf{Z}_k^*\|^2 \right\} + \frac{1}{(1 + 2\beta^2)^{p/2}} \\ &\quad - \frac{2}{n(1 + \beta^2)^{p/2}} \sum_{j=1}^n \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2(1 + \beta^2)^{p/2}} \|\mathbf{Z}_j^*\|^{*2} \right\} \end{aligned}$$

Esta prueba rechaza H_0 para valores grandes de T_β . Henze y Zirkler presentan algunos percentiles empíricos de la distribución de T_β para muestras de tamaño $n = 20, 30, 50$, dimensiones $p = 2, 3, 5$ y parámetro $\beta = 0.5, 1, 3$ y $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n(2p+1)}{4} \right)^{1/(p+4)}$. También aproximan la distribución de T_β con una distribución lognormal.

5.2.3 Prueba de Mudholkar, Srivastava y Lin

Aquí se describe la prueba W_F para NMV de Mudholkar, Srivastava y Lin (1995) quienes proponen 7 pruebas más. Se escogió W_F por ser la que tiene mejores propiedades de

potencia entre las 8 pruebas propuestas, de acuerdo con los resultados del estudio de simulación realizado en el mismo trabajo. El procedimiento de prueba es el siguiente.

Sea $\mathbf{X}_{(i)}$ la i -ésima fila de la matriz de datos. Sean $b_{i,k}$, $i = 2, 3, \dots, p$, $k = 1, 2, \dots, i - 1$, los coeficientes de la regresión de $\mathbf{X}_{(i)}$ sobre $\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{X}_{(2)}, \dots, \mathbf{X}_{(i-1)}$ y sea $\mathbf{e}_{(i)}$ el i -ésimo vector de residuales, $i = 1, \dots, p$. Es bien conocido que $\mathbf{e}_{(i)}$ es independiente de $\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{X}_{(2)}, \dots, \mathbf{X}_{(i-1)}$, $i = 1, \dots, p$, y que sus componentes tienen distribución normal univariada. Además, cualquier función de $\mathbf{e}_{(i)}$ también es independiente de $\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{X}_{(2)}, \dots, \mathbf{X}_{(i-1)}$, en particular lo es la estadística W de Shapiro-Wilk evaluada en $\mathbf{e}_{(i)}$.

Considere la transformación: $\mathbf{Y}_{(1)} = \mathbf{X}_{(1)}$, $\mathbf{Y}_{(2)} = \mathbf{X}_{(2)} - b_{2,1}\mathbf{X}_{(1)}$, \dots ,
 $\mathbf{Y}_{(p)} = \mathbf{X}_{(p)} - b_{p,p-1}\mathbf{X}_{(p-1)} - \dots - b_{p,2}\mathbf{X}_{(2)} - b_{p,1}\mathbf{X}_{(1)}$.

Note que $\mathbf{Y}_{(i)}$ difiere de $\mathbf{e}_{(i)}$ sólo por una constante. Entonces, la estadística W evaluada en $\mathbf{Y}_{(i)}$ es igual a W evaluada en $\mathbf{e}_{(i)}$ y también es independiente de $\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{X}_{(2)}, \dots, \mathbf{X}_{(i-1)}$.

Sean P_1, P_2, \dots, P_p los valores $-p$ que resultan de aplicar la prueba de Shapiro-Wilk a los vectores $\mathbf{Y}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(2)}, \dots, \mathbf{Y}_{(p)}$. La estadística W aplicada a $\mathbf{Y}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(2)}, \dots, \mathbf{Y}_{(p)}$ y los valores $-p$ correspondientes P_1, P_2, \dots, P_p son aproximadamente independientes.

La estadística de prueba W_F que proponen Mudholkar, Srivastava y Lin para NMV es la estadística de Fisher para combinar pruebas independientes la cual está dada por

$$W_F = -2 \sum_{i=1}^p \log P_i.$$

Bajo H_0 , W_F tiene distribución Ji-cuadrada con $2p$ grados de libertad (χ_{2p}^2). Se rechaza la hipótesis de NMV para valores grandes de W_F .

5.2.4 Prueba de Srivastava y Hui

Sea $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_p)$ una matriz ortogonal de dimensión $p \times p$ tal que $\mathbf{H}'\mathbf{S}\mathbf{H} = \mathbf{D}$ donde $\mathbf{D} = \text{diag} \{d_1, \dots, d_p\}$. El i -ésimo componente principal cuando la matriz de covarianzas Σ se estima con \mathbf{S} es

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{h}_i' \mathbf{X}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Sea W_i la estadística de Shapiro-Wilk evaluada en \mathbf{Y}_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Sea

$$G(W_i) = \gamma + \delta \log \left\{ \frac{W_i - \epsilon}{1 - W_i} \right\}$$

donde γ , δ y ϵ se encuentran en la Tabla 1 de Shapiro y Wilk (1968) para muestras de tamaño $n \leq 50$. Para $n > 50$ estos valores se pueden obtener con los resultados de Shapiro y Francia (1972) y Royston (1982).

Srivastava y Hui (1987) proponen la siguiente estadística de prueba para probar NMV

$$M_1 = -2 \sum_{i=1}^p \log \Phi(G(W_i)).$$

Bajo H_0 , M_1 tiene distribución aproximada χ_{2p}^2 . Valores grandes de M_1 indican no normalidad.

5.3 Estudio comparativo

En esta sección se presenta una comparación de la potencia de las pruebas W^* , MS y MK de Mardia, T_5 de Henze y Zirkler, W_F de Mudholkar, Srivastava y Lin y M_1 de Srivastava y Hui.

5.3.1 Simulación de Monte Carlo

La potencia de las pruebas se estimó usando simulación de Monte Carlo. Se simularon 5000 muestras pseudo aleatorias de tamaño $n = 20, 50$ de dimensión $p = 2, 5$ de cada distribución alternativa. Se eligió un tamaño de prueba $\alpha = 0.05$.

Para realizar el estudio comparativo se consideraron distribuciones alternativas p -variadas con marginales independientes con distribución f , denotadas como f^p , donde f es alguna de las distribuciones siguientes: Gumbel, lognormal, sum-estable, Cauchy estándar, t de Student y beta, cuyas funciones de densidad se describen en la Sección 4.5.1, y las distribuciones:

1. Doble exponencial: $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|/2}$, $x \in \mathfrak{R}$.

$$2. \text{ Gama}(\alpha, \beta): f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0, \alpha > 0 \text{ y } \beta > 0.$$

$$3. \chi_v^2: f(x) = \frac{1}{\Gamma(p/2) 2^{p/2}} x^{p/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0 \text{ y } p = 1, 2, \dots$$

las cuales se denotan como Gumbel, $\text{LN}(\alpha, \beta)$, $\text{S-Stab}(\alpha, \beta)$, Cauchy, t_k , $\text{B}(\alpha, \beta)$, $\text{Dexp}(\alpha, \beta)$, $\text{G}(\alpha, \beta)$, χ_v^2 , respectivamente.

Se incluyeron alternativas de la forma $f_1^{p-k} \times f_2^k$, la cual denota una distribución p -variada con $p - k$ marginales con distribución f_1 y k marginales con distribución f_2 , $k = 1, 2$. También se consideraron las siguientes distribuciones alternativas:

4. Esférica con generador g , denotada como $\text{SPH}(g)$, ver Johnson (1987).

5. Pearson tipo II ($\text{PSII}_p(a)$): $f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(p/2 + a + 1)}{\Gamma(a + 1)(\pi^{p/2})} (1 - \|\mathbf{x}\|^2)^a$, $0 < \|\mathbf{x}\|^2 < 1$, $a > -1$.

6. Pearson tipo VII ($\text{PSVII}_p(a)$): $f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a - p/2)(\pi^{p/2})} (1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{-a}$, $a > p/2$.

7. Mezcla de las distribuciones normales p -variadas $\mathbf{N}^p(\mathbf{0}, \mathbf{R}_1)$ y $\mathbf{N}^p(\mu, \mathbf{R}_2)$ donde $\mu = \mu(1, 1, \dots, 1)'$, $\mu \in \Re$, y

$$R_i = \begin{bmatrix} 1 & r_i & \dots & r_i \\ r_i & 1 & \dots & r_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_i & r_i & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2$$

con parámetro de mezcla igual a k , denotada como $\text{NMIX}(k, \mu, r_1, r_2)$.

5.3.2 Discusión de resultados

Las Tablas 5.1 a 5.4 contienen los porcentajes de rechazos de las pruebas para normalidad.

Las pruebas W^* , MS, MK, $T_{.5}$ y M_1 , en general, conservan el tamaño de prueba fijado ($\alpha = 0.05$) y en algunos casos las pruebas M_1 , MS y MK son muy conservadoras.

La prueba W_F no conserva el tamaño de prueba. Como puede verse en las Tablas 5.2 y 5.4, existen casos en los que el tamaño estimado es 8 y 10 veces el tamaño fijado. Por lo tanto, dado que W_F no es una prueba de tamaño $\alpha = 0.05$, su potencia no es

comparable con las potencias del resto de las pruebas.

Ninguna de las pruebas en estudio es uniformemente más potente; sin embargo, los resultados permiten hacer algunas observaciones generales respecto al comportamiento de la potencia de las pruebas.

Bajo las alternativas con marginales independientes se observa lo siguiente:

En las cuatro combinaciones de (n, p) consideradas, la prueba W^* es más potente que las pruebas $T_{.5}$, MS y MK. Se observa lo mismo cuando se comparan W^* y M_1 , excepto porque en el caso $(n, p) = (20, 2)$ estas pruebas tienen un comportamiento muy parecido.

Al comparar la Tabla 1 con la 3 y la 2 con la 4, se observa que las potencias de las pruebas MS, MK y M_1 disminuyen cuando aumenta la dimensión, mientras que las potencias de W^* y $T_{.5}$ siempre aumentan.

Contra alternativas esféricas, las pruebas son muy sensibles ante un incremento en la dimensión y son sensibles ante un incremento en el tamaño de muestra principalmente en dimensión 5. Ninguna de las pruebas es uniformemente más potente que las demás.

Contra las mezclas de distribuciones normales se observa lo siguiente:

Las pruebas MS, MK y W^* no detectan las mezclas de distribuciones normales con marginales independientes consideradas. La prueba M_1 es la mejor contra estas alternativas y su potencia aumenta cuando el parámetro de mezcla crece.

Todas las pruebas son sensibles ante mezclas de distribuciones normales con marginales dependientes. Las pruebas $T_{.5}$ y M_1 son las más potentes en este caso.

Bajo todas las alternativas se nota que las potencias de las pruebas aumentan cuando el tamaño de muestra aumenta.

Tabla 5.1: Potencia de las pruebas para NMV en % (p=2, n=20, $\alpha=0.05$)

Alternativa	$T_{0.5}$	MS	MK	M_1	W_F	W^*
$N(0,1)^2$	5	3	1	5	5	5
$N(100,.0001)*N(100,10)^4$	5	2	1	6	7	5
$Dexp^2$	33	26	24	30	36	37
$Logistic^2$	15	10	8	12	14	14
$Cauchy^2$	95	91	93	96	98	98
t_2^2	67	60	61	67	69	70
t_5^2	26	21	18	23	26	26
$S-stab(1.5,0)^2$	66	60	59	64	67	67
$S-stab(1.75,0)^2$	39	35	32	37	39	39
$B(1,1)^2$	1	0	0	10	24	28
$B(1,2)^2$	15	4	1	20	40	42
$Gumbel^2$	40	28	14	33	42	44
Exp^2	87	70	37	80	95	96
$G(5,1)^2$	29	18	8	25	31	32
$(\chi_5^2)^2$	50	33	15	46	59	61
$(\chi_{15}^2)^2$	21	13	6	19	23	24
$LN(0,.5)^2$	63	48	26	55	68	70
$S-stab(1.5,.5)^2$	70	64	60	68	71	72
$S-stab(1.5,1)^2$	77	70	57	74	77	79
$N(0,1)*S-stab(1.5,0)$	43	38	33	45	42	45
$N(0,1)*Gumbel$	22	14	7	21	21	23
$N(0,1)*Exp$	55	38	18	47	59	69
$N(0,1)*\chi_5^2$	27	17	8	35	28	34
$N(0,1)*LN(0,.5)$	37	25	13	29	38	40
$N(0,1)*t_2$	44	37	33	47	44	47
$N(0,1)*B(1,1)$	3	1	0	9	10	10
$N(0,1)*B(1,2)$	9	2	1	16	16	16
$SPH(Exp)$	70	58	64	68	64	63
$SPH(G(5,1))$	4	2	1	6	6	6
$SPH(B(1,1))$	3	1	1	5	4	4
$SPH(B(1,2))$	17	10	10	17	17	19
$PSII(0)$	1	0	0	12	9	8
$PSII(1)$	1	0	0	4	4	4
$PSVII(2)$	72	66	66	68	62	61
$PSVII(3)$	40	33	30	31	28	27
$PSVII(5)$	17	13	10	13	12	12
$NMIX(.5,2,0,0)$	4	1	0	8	4	4
$NMIX(.75,2,0,0)$	10	4	1	14	7	5
$NMIX(.5,2,0.9,0)$	23	20	7	21	20	21
$NMIX(.75,2,0,.5)$	11	6	2	19	7	4
$NMIX(.75,2,.9,0)$	47	41	23	26	28	41
$NMIX(.75,2,0,.9)$	16	13	3	26	11	5

Tabla 5.2: Potencia de las pruebas para NMV en % (p=2, n=50, $\alpha=0.05$)

Alternativa	$T_{0.5}$	MS	MK	M_1	W_F	W^*
$N(0,1)^2$	5	4	2	2	5	5
$N(100,.0001)*N(100,10)^4$	5	4	3	2	50	5
Dexp ²	59	48	68	48	70	71
Logistic ²	26	23	29	14	28	29
t_2^2	95	89	97	NA	98	97
t_5^2	46	43	52	35	52	51
S-stab(1.5,0) ²	94	89	96	NA	96	96
S-stab(1.75,0) ²	67	66	72	NA	71	71
$B(1,1)^2$	3	0	27	21	92	94
$B(2,2)^2$	1	0	2	4	21	22
$B(1,2)^2$	61	21	1	39	96	97
Weibull(2) ²	46	34	8	25	59	60
Gumbel ²	85	80	46	63	88	89
Exp(1) ²	100	100	83	97	100	100
$G(5,1)^2$	73	64	25	46	79	80
$(\chi_5^2)^2$	96	91	47	78	98	99
$(\chi_{15}^2)^2$	56	48	19	31	59	60
LN(0,.5) ²	98	96	70	87	99	99
S-stab(1.75,.5)	94	89	96	NA	95	95
$N(0,1)*S\text{-stab}(1.5,0)$	74	67	74	NA	77	78
$N(0,1)*t_2$	76	66	75	NA	80	82
$N(0,1)*t_5$	26	24	25	21	29	32
$N(0,1)*B(1,1)$	4	1	1	25	44	47
$N(0,1)*\text{Gumbel}$	55	49	23	43	57	58
$N(0,1)*\text{Exp}$	96	91	51	77	99	100
$N(0,1)*\chi_5^2$	69	59	24	71	76	80
$N(0,1)*B(1,2)$	28	10	1	41	58	61
SPH(Exp)	96	81	98	95	97	97
SPH(G(5,1))	5	4	2	4	9	10
SPH(B(1,1))	1	0	0	2	5	6
SPH(B(1,2))	23	11	28	21	32	32
PSII(0)	3	0	52	29	48	49
PSII(1)	1	0	5	2	6	11
PSVII(2)	97	92	98	NA	95	96
PSVII(3)	68	62	76	57	61	61
PSVII(5)	30	31	38	21	26	27
NMIX(.5,2,0,0)	4	2	1	9	5	4
NMIX(.75,2,0,0)	23	10	2	20	11	7
NMIX(.5,2,0.9,0)	69	76	17	45	45	53
NMIX(.75,2,0,.5)	30	27	4	32	11	4
NMIX(.75,2,.9,0)	90	90	65	58	67	87
NMIX(.75,2,0,.9)	49	60	6	49	20	6

Tabla 5.3: Potencia de las pruebas para NMV en % (p=5, n=20, $\alpha=0.05$)

Alternativa	$T_{0.5}$	MS	MK	M_1	W_F	W^*
$N(0,1)^5$	5	1	0	5	5	5
$N(100,.0001)*N(100,10)^4$	5	1	0	6	7	5
$Dexp^5$	38	22	15	27	47	52
$Logistic^5$	14	5	2	11	17	19
$Cauchy^5$	100	99	99	100	100	100
t_2^5	85	75	69	80	89	92
t_5^5	29	16	9	23	34	38
$S-stab(1.5,0)^5$	84	76	69	83	87	91
$S-stab(1.75,0)^5$	53	41	31	51	57	61
$B(1,1)^5$	1	0	0	5	25	34
$B(2,2)^5$	1	0	0	4	5	6
$B(1,2)^5$	11	1	0	9	46	56
$Gumbel^5$	42	17	7	30	56	63
$Weibull(2)^5$	12	2	1	11	23	29
Exp^5	91	63	32	70	99	100
$G(5,1)^5$	27	8	2	20	42	50
$(\chi_5^2)^5$	52	21	7	36	75	82
$(\chi_{15}^2)^5$	18	4	1	15	28	33
$LN(0,.5)^5$	68	39	18	54	85	91
$S-stab(1.5,0.5)^5$	85	75	67	82	88	91
$S-stab(1.5,1)^5$	90	80	65	86	94	96
$N(0,1)^4*S-stab(1.5,0)$	27	17	9	38	24	37
$N(0,1)^4*\chi_5^2$	12	3	1	24	13	23
$N(0,1)^4*Gumbel$	11	3	1	16	14	10
$N(0,1)^4*Exp$	23	7	2	18	23	42
$N(0,1)^3*S-stab(1.5,0)^2$	47	36	23	56	44	60
$N(0,1)^3*(\chi_5^2)^2$	20	6	2	33	23	43
$N(0,1)^3*Gumbel^2$	17	5	1	20	17	28
$N(0,1)^3*Exp^2$	45	17	6	30	49	76
$SPH(Exp)$	99	97	98	95	86	82
$SPH(G(5,1))$	30	15	9	18	12	12
$SPH(B(1,1))$	63	41	48	31	30	30
$SPH(B(1,2))$	90	77	82	66	56	54
$PSVII(5)$	50	34	25	39	23	20
$PSVII(10)$	15	5	2	11	8	8
$NMIX(.5,2,0,0)$	4	0	0	21	4	5
$NMIX(.75,2,0,0)$	10	1	0	32	7	5
$NMIX(.5,2,.9,0)$	84	55	39	53	29	45
$NMIX(.75,2,0,.5)$	11	2	0	38	7	5
$NMIX(.75,2,.9,0)$	91	76	64	54	36	49
$NMIX(.75,2,0,.9)$	37	16	4	55	15	16

Tabla 5.4: Potencia de las pruebas para NMV en % (p=5, n=50, $\alpha=0.05$)

Alternativa	$T_{0.5}$	MS	MK	M_1	W_F	W^*
$N(0,1)^5$	5	4	2	1	5	5
$N(100,.0001)*N(100,10)^4$	6	4	2	1	42	5
Dexp ⁵	74	68	81	38	91	93
Logistic ⁵	28	30	31	10	40	42
t_5^5	58	61	64	34	73	75
S-stab(1.5,0) ⁵	100	99	100	NA	100	100
S-stab(1.75,0) ⁵	89	89	91	NA	93	94
$B(1,1)^5$	2	0	39	1	99	100
$B(2,2)^5$	1	0	5	1	30	38
$B(1,2)^5$	55	5	1	8	100	100
Weibull(2) ⁵	46	27	5	10	84	88
Gumbel ⁵	93	87	54	50	99	99
$G(5,1)^5$	80	68	28	30	96	98
$(\chi_5^2)^5$	98	95	56	63	100	100
$(\chi_{15}^2)^5$	61	47	18	17	83	86
$LN(0,.5)^5$	100	99	84	84	100	100
S-stab(1.75,0.5) ⁵	89	90	89	NA	94	94
$N(0,1)^4*S-Stab(1.5,0)$	60	59	55	NA	67	71
$N(0,1)^4*t_5$	16	16	12	12	20	23
$N(0,1)^4*B(1,1)$	4	2	1	4	16	19
$N(0,1)^4*Gumbel$	27	21	9	20	34	41
$N(0,1)^4*Exp$	68	55	24	25	85	94
$N(0,1)^4*\chi_5^2$	33	25	10	45	48	61
$N(0,1)^4*LN(0,.5)$	46	38	18	25	59	66
$N(0,1)^3*S-Stab(1.5,0)^2$	85	82	84	NA	91	93
$N(0,1)^3 * t_5^2$	27	27	24	19	37	40
$N(0,1)^3*B(1,1)^2$	4	1	1	4	38	48
$N(0,1)^3*Gumbel^2$	51	42	19	32	67	75
$N(0,1)^3*Exp^2$	96	89	50	27	100	100
$N(0,1)^3*(\chi_5^2)^2$	65	51	20	61	85	93
$N(0,1)^3*LN(0,.5)^2$	80	71	38	49	92	95
SPH($G(5,1)$)	60	57	69	21	29	28
SPH($B(1,1)$)	88	59	93	46	65	66
SPH($B(1,2)$)	100	98	100	93	97	96
PSVII(5)	88	87	92	63	62	60
PSVII(10)	28	30	30	10	14	15
NMIX(.5,2,0,0)	6	2	1	38	5	5
NMIX(.75,2,0,0)	26	7	1	67	9	5
NMIX(.5,2,.9,0)	100	100	94	95	83	91
NMIX(.75,2,0,.5)	31	25	2	76	10	6
NMIX(.75,2,.9,0)	100	100	100	96	95	98
NMIX(.75,2,0,.9)	91	89	20	94	37	39

Capítulo 6

Discusión y conclusiones

6.1 Discusión de resultados

El hecho de que el tamaño estimado de la prueba W^* sea menor o igual que el tamaño de prueba fijado en todos los casos estudiados, indica que es adecuada la aproximación usada para calcular las constantes críticas $c_{\alpha;n,p}$ dadas en (5.3).

Las distribuciones aproximadas de las estadísticas MS y MK bajo la hipótesis de normalidad multivariada no hacen un buen ajuste de las distribuciones de MS y MK ya que en varios casos el tamaño estimado de estas pruebas es muy pequeño.

La distribución aproximada bajo normalidad multivariada de la estadística de Srivastava y Hui, M_1 , da un buen ajuste con muestras de tamaño 20 pero no con muestras de tamaño 50.

Mudholkar, Srivastava y Lin (1995) estudian el tamaño de la prueba W_F considerando únicamente el caso en que los elementos de la diagonal de la matriz de varianzas y covarianzas son iguales a uno y todos los elementos fuera de la diagonal son iguales a 0.5. En estas condiciones encuentran que W_F conserva el tamaño. Sin embargo, en este trabajo se consideraron otras matrices de varianzas y covarianzas y se

obtuvo que la prueba W_F no preserva el tamaño (Tablas 5.1-5.4). Estos resultados concuerdan con los de Mecklin y Mundfrom (2005) quienes recomiendan no usar la prueba W_F de Mudholkar, Srivastava y Lin por esta razón. Otra desventaja de la prueba W_F es que depende del orden de las coordenadas de la matriz de datos.

En un trabajo preliminar se estudió la potencia de una prueba para normalidad multivariada basada en la estadística $M = \min_{1 \leq i \leq p} \{W_{Z_i}\}$, donde W_{Z_i} es la estadística de Shapiro-Wilk evaluada en la i -ésima coordenada de las observaciones transformadas usando (5.1), la cual rechaza la hipótesis de normalidad multivariada si M es menor que una constante crítica. Se encontró que M es más potente, en general, que las pruebas MS, MK, $T_{.5}$ y M_1 y menos potente que la prueba W^* , en general.

En dicho trabajo preliminar también se consideró una prueba para normalidad multivariada basada en la estadística $V = \frac{\sum_{i=1}^p \tilde{\sigma}_i^2}{\sum_{i=1}^p s_i^2}$ donde $\tilde{\sigma}_i^2$ es el numerador de la estadística de Shapiro-Wilk evaluado en la i -ésima coordenada de la matriz de datos y s_i^2 es n veces la varianza muestral de dicha coordenada, $i = 1, 2, \dots, p$. Se rechaza normalidad multivariada si V es pequeña ya que por construcción se espera que V tome valores cerca de uno por la izquierda. Por medio de simulación, se obtuvo la potencia de esta prueba y se observó que en general es igual de potente que la prueba $T_{.5}$ de Henze-Zirkler y que es mucho más potente que $T_{.5}$ contra mezclas de distribuciones normales.

6.2 Conclusiones

Con base en la propiedad de estabilidad de las distribuciones sum, max y min-estables se propone un método estadístico para probar bondad de ajuste de las distribuciones de esta clase con parámetros de localidad y escala desconocidos.

De los estudios de simulación realizados, se tiene evidencia de que el método propuesto genera pruebas de bondad de ajuste con buena potencia para las distribuciones normal y Gumbel. La potencia de la prueba para normalidad es mayor o igual que la potencia de la prueba de Shapiro-Wilk en la mayoría de los casos estudiados. La prueba

para la distribución Gumbel es mucho más potente que las pruebas de Anderson-Darling y Epps contra alternativas asimétricas.

Se propone una generalización de la prueba de Shapiro-Wilk para probar normalidad multivariada (W^*) que es fácil de implementar porque únicamente involucra una estandarización de los datos y no requiere la obtención empírica de valores críticos.

Los resultados de un estudio de simulación muestran que la prueba W^* tiene buena potencia y en muchos casos es más potente que las pruebas de Mardia y Henze-Zirkler la cual es la prueba que recomiendan Farrell, Sahbian-Barrera y Naczki (2007), Mecklin y Mundfrom (2005) y Thode (2002), entre otros, para probar normalidad multivariada.

Los resultados también indican que la prueba W^* es consistente porque la potencia aumenta en todos los casos estudiados cuando se incrementa el tamaño de muestra.

La prueba W^* es, en efecto, una generalización de la prueba W de Shapiro-Wilk para el caso multivariado ya que W^* coincide con la estadística W en dimensión uno.

El Anexo D contiene programas en lenguaje R para calcular las pruebas R_N y W^* . El programa para R_N se puede usar para calcular las estadísticas R_G y R_E después de hacer las modificaciones apropiadas.

Bibliografía

- [1] Ahmad, I.A. and Mugdadi, A.R. (2003). Testing normality using kernel methods. *Journal of Nonparametric Statistics*, **15** (3): 273-288.
- [2] Anderson, T.W. and Darling, D.A. (1952). Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 193-212.
- [3] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1992). **A first course in order statistics**. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Bontemps, C. and Meddahi, N. (2005). Testing normality: a GMM approach. *Journal of Econometrics*, **124** (1): 149-186.
- [5] Cabaña, A. and Cabaña, E.M. (2003). Tests of normality based on transformed empirical processes. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **5** (3): 309-335.
- [6] Csörgö, S. (1989). Consistency of some tests for multivariate normality. *Metrika*, **36**, 107-116.
- [7] D'Agostino, R.B. and Stephens, M.A. (1986). **Goodness of fit techniques**. New York: Marcel Dekker.
- [8] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. Italy: Springer-Verlag.

- [9] Epps, T. W. (2005). Tests for location-scale families based on the empirical characteristic function. *Metrika*, **62**, 99-114.
- [10] Farrell, P. J., Sahbian-Barrera, M. and Naczek, K. (2007). On tests for multivariate normality and associated simulation studies. *Journal of Statistical Computation and Simulation* (Por aparecer).
- [11] Gan, F. F. and Koehler, K. J. (1990). Goodness of Fit Tests Based on P-P Probability Plots. *Technometrics*, **32**, 289-303.
- [12] Henze, N. and Zirkler, B. (1990). A class of invariant consistent tests for multivariate normality. *Communications in Statistics.- Theory and Methods*, **19** (10): 3595-3617.
- [13] Henze, N. (2002). Invariant tests for multivariate normality: a critical review. *Statistical Papers*, **43**, 467-506.
- [14] Henze, N. and Meintanis, S.G. Recent and classical tests for exponentiality: a partial review with comparisons. *Metrika*, **61** (1): 29-45.
- [15] Hwu, T.J.; Han, C.P. and Rogers, K.J. (2002). The combination test for multivariate normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **72** (5): 379-390.
- [16] Johnson, M. E. (1987). **Multivariate statistical simulation**. New York: John Wiley & Sons.
- [17] Kinnison, R. (1989). Correlation coefficient goodness of fit test for the Extreme Value distribution. *American Statistician*, **43**, 98-100.
- [18] Looney, S. (1995). How to use tests for univariate normality to assess multivariate normality. *The American Statistician*, **39**, 75-79.
- [19] Mardia, K.V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, **57**, 519-530.

- [20] Mecklin, C.J. and Mundfrom, D.J. (2004). An appraisal and bibliography of tests for multivariate normality. *International Statistical Review*, **72** (1): 1319-1331.
- [21] Mecklin, C.J. and Mundfrom, D.J. (2005). A Monte Carlo comparison of the Type I and Type II error rates of tests of multivariate normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **75** (2): 93-107.
- [22] Mudholkar, G., Srivastava, D. and Lin, C. (1995). Some p-variate adaptations of the Shapiro-Wilk test of normality. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **24** (4): 953-985.
- [23] Nolan, J. (2007). **Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data**. Boston: Birkhäuser. (Por aparecer). Capítulo 1 en línea en academic2.american.edu/~jpnolan.
- [24] Reiss, D.R. and Thomas, M. (2001). **Statistical analysis of extreme values**. 2nd Ed. Berlin: Birkhäuser.
- [25] Resnick, S.I. (1987). **Extreme values, regular variation and point processes**. New York: Springer.
- [26] Romeu, J.L. and Ozturk, A. (1993). A comparative study of goodness of fit tests for multivariate normality. *Journal of Multivariate Analysis*, **46**, 309-334.
- [27] Royston, J.P. (1982). An extension of Shapiro and Wilk W test for normality to large samples. *Applied Statistics*, **31** (2): 115-124.
- [28] Royston, P. (1992). Approximating the Shapiro-Wilk W test for non-normality. *Statistics and Computing*, **2** 117-119.
- [29] Royston, P. (1995). Remark on algorithm AS 181: the W -test for normality. *Applied Statistics*, **44** (4): 547-551.

- [30] Seier, E. (2002). Comparison of tests for univariate normality. Disponible en <http://interstat.statjournals.net/index.php>.
- [31] Shapiro, S.S. and Francia, R.S. (1972). An approximate analysis of variance test for normality. *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 215-216.
- [32] Shapiro, S.S. and Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality: complete samples. *Biometrika*, **52**, No. 3/4, 591-611.
- [33] Shapiro, S.S. and Wilk, M. B. (1968). Approximations for the null distribution of the W statistic. *Technometrics*, **10** (4): 861-866.
- [34] Srivastava, M.S. and Hui, T.K. (1987). On assessing multivariate normality based on Shapiro-Wilk W statistic. *Statistics and Probability Letters*, **2**, 263-267.
- [35] Srivastava, D.K. and Mudholkar, G.S. (2003). Goodness of fit tests for univariate and multivariate normal models. **Handbook of Statistics 22: Statistics in Industry**, Edited by Khattree, R. and Rao, C.R., Elsevier, North Holland, p. 869-906.
- [36] Stephens, M.A. (1977). Goodness of Fit for the Extreme Value Distribution, *Biometrika*, **64**, 583-588.
- [37] Sürücü, B. (2006). Goodness-of-fit tests for multivariate distributions. *Communications in Statistics.- Theory and Methods*, **35** (7): 1319-1331.
- [38] Székely, G.J. and Rizzo, M.L. (2005). A new test for multivariate normality. *Journal of Multivariate Analysis*, **93** (1): 58-80.
- [39] Thode, H. C. (2002). **Testing for normality**. New York: Marcel Dekker, Inc.

Apéndice A

Goodness of fit tests for

location-scale stable distributions

Apéndice B

A generalization of Shapiro-Wilk's test for multivariate normality

Apéndice C

Distribución de W^*

Debido a que bajo normalidad multivariada W^* es un promedio de p estadísticas aproximadamente independientes W_i de Shapiro-Wilk, donde $\log(1 - W_i)$ tiene una distribución aproximadamente normal (μ_n, σ_n^2) (Royston, 1992), se tiene que

$$\mu^* \equiv E\{W^*\} = E\{W_i\} = 1 - e^{\mu_n + \sigma_n^2/2}$$

y

$$\sigma^{2*} \equiv Var\{W^*\} = \frac{1}{p} Var\{W_i\} = \frac{1}{p} \left[e^{2(\mu_n + \sigma_n^2)} - e^{2\mu_n + \sigma_n^2} \right]$$

donde μ_n y σ_n están dados en (4.7) y (4.8).

Sea $W_1^* = \log(1 - W^*)$. Note que

$$E\{e^{W_1^*}\} = E\{1 - W^*\} = 1 - E\{W^*\} = 1 - \mu^* \quad (\text{C.1})$$

y

$$E\{e^{2W_1^*}\} = E\{(1 - W^*)^2\} = (1 - \mu^*)^2 + \sigma^{2*}. \quad (\text{C.2})$$

Por otro lado, suponiendo que W_1^* tiene distribución normal con parámetros μ_1 y σ_1^2 , se tiene que

$$E\{e^{W_1^*}\} = e^{\mu_1 + \sigma_1^2/2} \quad (\text{C.3})$$

y

$$E\{e^{2W_1^*}\} = e^{2\mu_1 + \sigma_1^2}. \quad (\text{C.4})$$

Entonces, de (C.1) - (C.4), se obtiene el sistema de ecuaciones

$$e^{\mu_1 + \sigma_1^2/2} = 1 - \mu^*,$$

$$e^{2\mu_1 + \sigma_1^2} = (1 - \mu^*)^2 + \sigma^{2*}.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$\sigma_1^2 = \log \left\{ \frac{p-1}{p} + \frac{e^{2(\mu_n + \sigma_n^2)}}{pe^{2\mu_n + \sigma_n^2}} \right\}$$

y

$$\mu_1 = \mu_n + \frac{1}{2}\sigma_n^2 - \frac{1}{2}\sigma_1^2.$$

Apéndice D

Programas en lenguaje R

D.1 Programa para calcular la prueba R_N

La siguiente función calcula el valor de la estadística R_N de la prueba para normalidad univariada.

```
rn.test <- function(x)
{
  n <- length(x)
  nz <- NA
  nz <- n*(n-1)/2
  z <- rep(NA,nz)
  k <- 0
  for(j in 1:(n-1))
  {
    for(i in (j+1):n)
    {
      k <- k+1
```

```
      z[k] <- - (x[i]+x[j])
    }
  }
  FnZ <- - rep(NA,nz)
  FnZ <- - seq(1,nz,1)/nz
  y <- - rep(NA,nz)
  y <- - qnorm(FnZ)
  r <- - rep(NA,1)
  r <- - cor(sort(z)[1:(nz-1)],y[1:(nz-1)])
  return(r)
}
```

Uso: `rn.test(x)`, donde `x` es un vector de observaciones.

D.2 Programa para calcular la prueba W^*

La siguiente función calcula el valor $-p$ de la prueba W^* para normalidad multivariada con base en una matriz de dimensión $n \times p$.

```
wast.test <- function(y)
{
  n <- nrow(y)
  p <- ncol(y)
  Sinv <- solve(((n-1)/n)*var(y))
  media <- rep(NA,p)
  media <- matrix(rep(apply(y,2,mean),rep(n,p)),ncol=p)
  val <- rep(NA,p)
  val <- eigen(Sinv)$values
  vec <- matrix(rep(NA,p*p),nrow=p)
  vec <- as.matrix(eigen(Sinv)$vectors)
  raiz <- matrix(rep(0,p*p),nrow=p)
  for(k in 1:p)
  {
    raiz <- sqrt(val[k])*vec[,k]%*%t(vec[,k])+raiz
  }
  z <- t(raiz%*%t(y-media))
  w <- rep(NA,p)
  wp <- rep(NA,p)
  for(k in 1:p)
  {
    w[k] <- shapiro.test(z[,k])$statistic
  }
  wast <- mean(w)
  wast2 <- log(1-wast)
```



```

y <- -log(n)
m <- -1.5861-.31082*y-0.083751*y**2+.0038915*y**3
s <- exp(-.4803-.082676*y+.0030302*y**2)
s2 <- s**2
ma <- 1-exp(m+s2/2)
s2a <- (exp(2*(m+s2))-exp(2*m+s2))/p
sigma2 <- log(1+s2a/(1-ma)**2)
mu <- m+s2/2-sigma2/2
p.value <- pnorm(wast2,mean=mu,sd=sqrt(sigma2),lower.tail=FALSE)
return(p.value)
}

```

Uso: `wast.test(X)`, donde X es una matriz de dimensión $n \times p$.