COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

ESTADÍSTICA

COMPARACIÓN DE INTERVALOS DE CONFIANZA ASINTÓTICOS PARA EL PARÁMETRO BINOMIAL

JESUS RIVERA CORTEZ

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, ESTADO DE MÉXICO

2020

La presente tesis titulada: **Comparación de intervalos de confianza asintóticos para el parámetro Binomial**, realizada por el alumno: **Jesus Rivera Cortez**, bajo la dirección del Consejo Particular indicado, ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

SOCIOECONOMÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

ESTADÍSTICA

CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERO (A) ______________________
DR. DAVID ANTONIO SOTRES RAMOS

ASESOR (A) ______________________
DR. JAVIER SUÁREZ ESPINOSA

ASESOR (A) ______________________
DRA. OLGA VLADIMIROVNA PANTELEEVA

Montecillo, Texcoco, Estado de México, julio de 2020

COMPARACIÓN DE INTERVALOS DE CONFIANZA ASINTÓTICOS PARA EL PARÁMETRO BINOMIAL

Jesus Rivera Cortez, M.C.
Colegio de Postgraduados, 2020

RESUMEN

Se comparan las probabilidades de cobertura estimada y la longitud de los intervalos de confianza asintóticos para el parámetro binomial p de Chen, Wilson y Wald, asimismo se considera el intervalo de confianza “exacto” Clopper-Pearson. Las probabilidades de cobertura tienden a ser muy pequeñas para el intervalo de confianza de Wald y muy grandes para el intervalo Clopper-Pearson, por otro lado, el intervalo de Wilson (también llamado Intervalo de confianza Score) tiene el mejor desempeño ya que presenta probabilidades de cobertura cercanas a los niveles de confianza nominal aun para pequeños tamaños de muestra. El intervalo de Chen presenta un comportamiento similar al del intervalo de Score, sin embargo, este tiene una longitud más grande y presenta probabilidades de cobertura más conservadoras especialmente para tamaños de muestra pequeños. Basado en este análisis, se recomienda el intervalo de confianza de Score.

Palabras clave: Intervalo de confianza, parámetro Binomial, Aproximación normal.

APPROXIMATE CONFIDENCE INTERVALS FOR THE BINOMIAL PARAMETER

Jesus Rivera Cortez, M.C.

Colegio de Postgraduados, 2020

ABSTRACT

Coverage probabilities and the length of the approximate confidence intervals of Chen, Wilson and Wald for the binomial parameter p are compared. Also, the Clopper-Pearson “exact” Interval was considered. Coverage probabilities tend to be too large for the Clopper-Pearson interval and too small for the Wald interval, by contrast, Wilson’s interval (called Score confidence interval) had the best performance, since yields coverage probabilities close to nominal confidence levels, even for small sample sizes. Chen interval has similar behavior as the Score interval. However, Chen interval has a somewhat larger length and more nearly conservative coverage probabilities, especially for small sample sizes. Based on this analysis, Score interval is recommended.

Key words: Confidence interval, Binomial parameter, normal approximation

AGRADECIMIENTOS

Agradezco infinitamente al Colegio de Postgraduados y al posgrado SEI-ESTADÍSTICA por haberme permitido realizar mis estudios en tan noble institución.

A los profesores integrantes del núcleo académico de estadística del colegio de posgraduados por brindarme los conocimientos que se han convertido en parte fundamental de mi formación académica.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haber financiado mis estudios durante mi estancia en el colegio de posgraduados.

A los profesores que integran mi consejo particular, en especial, al Doctor David Antonio Sotres Ramos por el tiempo, conocimiento y apoyo brindado en la elaboración del presente trabajo de investigación.

A mi familia y amigos que desde siempre han sido cómplices, participes y colaboradores incondicionales no solo en el ámbito académico y económico, pero sobre todo emocional.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCION

Uno de los problemas más básicos de la inferencia estadística es obtener un intervalo de confianza para el parámetro p de la distribución Binomial. En años recientes, el tema se ha seguido investigando en la literatura estadística, ver, por ejemplo: Wang (2018), Lott & Reiter (2018), Jin et al (2017) y Schilling & Doi (2014). Existen diversos métodos para construir intervalos para la estimación del parámetro binomial p. En el presente trabajo se comparan varios intervalos de confianza aproximados para el parámetro binomial p. Existen dos alternativas para la construcción de intervalos para p: 1) Métodos aproximados (asintóticos) que consisten en aproximar la distribución binomial mediante la distribución normal usando el teorema de limite central para el estimador de p cuando el tamaño de muestra n es grande, y 2) utilizar métodos exactos cuando n es pequeña , como por ejemplo el método de Clopper-Pearson (1934), Blyth & Still (1983), o el Intervalos Bayesiano de Jeffreys, ver por ejemplo Brown, et al (2002).

Uno de los métodos aproximados más utilizados en la práctica y que ha adquirido especial aceptación es el intervalo de confianza de Wald. Sin embargo, como se verá más adelante, se ha demostrado que este intervalo tiene varias severas desventajas y un muy pobre desempeño, y por lo tanto no debe usarse en la práctica, ver por ejemplo Brown, et al (2002).

1.2 OBJETIVOS

El principal objetivo de este trabajo es comparar, mediante simulación, los intervalos aproximados (asintóticos) de Wald (Agresti,1996), Chen (1990), y Score (Agresti &Coull,1998) que son los métodos asintóticos con mejores propiedades reportadas en la literatura. Diversos autores entre los que destacan Agresti & Coull (1998), Brown et al (2001) y Chen (1990) han investigado las propiedades de dichos intervalos de confianza. Aunque en este trabajo también se incluyó al método exacto de Clopper-Pearson, solo se incluyó para confirmar que este intervalo es muy conservador, ya que su cobertura de probabilidad es mucho mayor al nivel nominal deseado. Para la comparación de los intervalos se tomaron en cuenta dos aspectos muy importantes: la cobertura de probabilidad frente al valor nominal requerido y la longitud promedio de los intervalos. La comparación se realizó mediante estudios de simulación en el ambiente de programación SAS y R. Nuestros resultados refuerzan algunas recomendaciones que diversos autores han aportado a la investigación de los intervalos considerados, además se establecen algunos criterios para su utilización. En este trabajo se emplean como sinónimos los términos: Cobertura de probabilidad estimada y Nivel de confianza estimado.

1.3 REVISIÓN DE LITERATURA

Chen (1990) propone un intervalo de confianza, reemplazando la proporción muestral p por el estimador $(X + \beta)/(n + 2\beta)$ para alguna β, de hecho, cuando $\beta = z_{\alpha}^{2}/2$ este intervalo tiene una cobertura de probabilidad casi igual al nivel de confianza nominal $1 - \alpha$, especialmente cuando α es pequeña, Chen recomienda el uso de este intervalo por sobre los otros intervalos de confianza aproximados ya que tiene mejores propiedades asintóticas.

Agresti A. y Coull B. (1998) concluyeron que el método de Score proporciona intervalos de confianza más cortos con cobertura de probabilidad usualmente más cerca al nivel de confianza nominal $1 - \alpha$ y por lo anterior, recomiendan el uso de este intervalo en la mayoría de las aplicaciones.

Brown et al (2002) compararon, mediante una expansión asintótica teórica, los intervalos de: (i) Score, (ii) Verosimilitud, (iii) Jeffreys, (iv) Wald y (v) Wald ajustado. Su primera recomendación enfática y definitiva es que el método de Wald NO debe usarse en la práctica pues los otros 3 primeros métodos mencionados son mejores por mucho y más seguros de usar. También prueban que el intervalo de Wald ajustado es el de mayor longitud y mayor longitud esperada, así como una cobertura cercana a ser conservadora. En contraste, los 3 primeros intervalos reportan un excelente comportamiento ya que su cobertura asintótica fluctúa alrededor del valor nominal. También estos 3 métodos reportan una longitud esperada muy similar. Estos cálculos analíticos soportan y complementan los resultados y recomendaciones de Brown et al (2001).

1.4 ORGANIZACIÓN

En el capítulo 2 se describen brevemente los intervalos de confianza estudiados en esta tesis: Wald, Chen, Score y Clopper-Pearson.

En el capítulo 3 y 4 se comparan estos intervalos y además se muestra el desempeño y los principales problemas que presentan cada uno de ellos. Esta comparación se realizó mediante estudios de simulación donde se analizó la cobertura de probabilidad y la longitud promedio de los intervalos, dos aspectos muy importantes a tomar en cuenta para evaluar el desempeño de los distintos métodos.

Por último, se presentan las conclusiones en base a los resultados obtenidos y además se proporcionan algunas recomendaciones para hacer una elección adecuada. Además, se presentan algunos criterios para el uso del intervalo dependiendo del tamaño de muestra n y el valor de p

CAPÍTULO 2. INTERVALOS DE CONFIANZA PARA UNA PROPORCIÓN

2.1 ASPECTOS PRELIMINARES

2.1.1 DISTRIBUCIÓN BERNOULLI

Es la distribución más simple de probabilidad y se aplica cuando un proceso aleatorio tiene exactamente dos resultados mutuamente excluyentes: éxito (E) y fracaso (F), de esta manera, las variables con distribución Bernoulli pueden tomar dos valores numéricos: 1 para la probabilidad de éxito p y 0 para la probabilidad de fracaso $1-p=q$ Por lo tanto, se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Bernoulli si la función de densidad discreta de X está dada por:

$$f_x(x) = f_x(x;p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & para\ x = 0{,}1 \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

Es decir

$$f_x(x) = \begin{cases} p\ si\ x = 1 \\ 1-p\ si\ x = 0 \\ 0\ de\ otra\ forma \end{cases}$$

Donde el parámetro p satisface $0 \leq p \leq 1$. y $1-p$ es usualmente denotado como q.
Si se realizan n ensayos Bernoulli independientes de tal manera que en cada repetición se cumple que $P(E) = p$ y $P(F) = 1-p$, entonces la variable aleatoria X, igual al número de éxitos en los n ensayos, es una variable que tiene distribución binomial.

2.1.2 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Binomial si la función de densidad de X está dada por:

$$f_x(x) = f_x(x;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} para\ x = 0,1,\dots,n \\ 0 \qquad de\ otro\ modo \end{cases}$$
$$= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{(0,1,\dots,n)}(x),$$

Donde los dos parámetros n y p satisface $0 \leq p \leq 1$ además, $q = 1 - p$

2.1.3 EL CONCEPTO DE INTERVALO DE CONFIANZA

Sea una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la distribución Bernoulli con parámetro p. Sean dos estadísticos $T_1 = t_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y $T_2 = t_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ con $T_1 \leq T_2$ para el cual se cumple que $p\{T_1 \leq p \leq T_2\} \geq 1 - \alpha$ donde el valor $\alpha \in (0,1)$ y además $1 - \alpha$ no depende de p, entonces el intervalo aleatorio $[T_1, T_1]$ es un intervalo $100(1-\alpha)\%$ para p con nivel de confianza $1 - \alpha$, T_1 y T_2 son llamados el límite inferior y el límite superior del intervalo, respectivamente, para p

2.2 INTERVALO DE CONFIANZA DE WALD

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución Bernoulli con parámetro p, sea $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ el número de éxitos en la muestra en donde $X \sim Bin(n, p)$ además sea $\hat{p} = \frac{X}{n}$ la proporción muestral de éxitos.

usando el teorema de limite central, no es difícil demostrar que:

$$P(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}) = 1 - \alpha$$

Así podemos obtener el intervalo de confianza aproximado Wald $100(1-\alpha)\%$ para p

$$I_{u,n} = [\hat{p} \pm (z_{\alpha/2}/n^{1/2})(\hat{p}\hat{q})^{1/2}]$$

Donde z_α es el cuantil $(1 - \alpha)$ de la distribución normal estándar, esto es,$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$

2.3 INTERVALO DE CONFIANZA CHEN.

Chen (1990) propuso el siguiente intervalo de confianza asintótico

$$\boldsymbol{I_{\beta,n}} = (X+\beta)(n+2\beta)^{-1} \pm (z_\alpha/n^{1/2})[(X+\beta)(n+2\beta)^{-1}(1-(X+\beta)(n+2\beta)^{-1})]^{1/2}$$

Chen probó que para cada $p \in (0,1)$ y $\alpha \in (0,1/2)$, $lim_{n\to\infty}\gamma\left(p, I_{\beta,n}\right) = 1-\alpha$ y que además este $\boldsymbol{I_{\beta,n}}$ es equivariante y simétrico respecto.

2.4 INTERVALO DE CONFIANZA CLOPPER-PEARSON

Cuando se desea evitar un intervalo aproximado, algunos recomiendan el uso del intervalo Clopper-Pearson (1934) u otros, ver por ejemplo Blyth and Still (1983).

Clounies-Ross (1958) dan algunas otras propiedades y modificaciones del intervalo de Clopper-Pearson.

Algunos autores también han llamado al intervalo de Clopper-Pearson como un procedimiento exacto debido a que este intervalo de confianza está basado en la inversión de la prueba binomial de colas iguales de la hipótesis $H_0: p = p_0$ en lugar de su aproximación normal. El límite inferior y superior son respectivamente las soluciones en p_0 a las ecuaciones

$$p(X \geq x) = \sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} {p_0}^k (1-p_0)^{n-k} = \alpha/2$$

y

$$p(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} {p_0}^k (1-p_0)^{n-k} = \alpha/2,$$

Excepto que el límite inferior es igual a 0 cuando $x = 0$ y el limite superior es igual a 1 cuando $x = n$, como dijimos este estimador garantiza tener una cobertura de probabilidad de al menos $1-\alpha$ para cada valor posible de p.

Cuando $x = 1,2, \ldots, n-1$ el intervalo de confianza es igual a

$$\left[1 + \frac{n-x+1}{xF_{2x,2(n-x+1),1-\alpha/2}}\right]^{-1} < p < \left[1 + \frac{n-x}{(x+1)F_{2(x+1),2(n-x),\alpha/2}}\right]^{-1}$$

Donde $F_{a,b,c}$ denota el cuantil $1-c$ de la distribución F con grados de libertad a y b.

El intervalo de Clopper-Pearson garantiza que la cobertura de probabilidad siempre sea igual o mayor que el nivel de confianza nominal, sin embargo, para cualquier p fija, la cobertura de probabilidad puede ser mucho más grande que $1-\alpha$ (a menos que n sea demasiado grande). Este intervalo es demasiado conservador, en este sentido su uso en general es ineficiente y por lo tanto poco práctico (Agresti & Coull 1998).

2.5 INTERVALO DE CONFIANZA SCORE

El intervalo de confianza de Score (Ver Agresti y Coull,1998) tiene la siguiente forma

$$\left(\hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\left[\hat{p}(1-\hat{p}) + z_{\alpha/2}^2/4n\right]/n}\right)/(1 + z_{\alpha/2}^2/n)$$

o

$$\frac{X + k^2/2}{n + k^2} \pm \frac{kn^{\frac{1}{2}}}{n + k^2}(\hat{p}\hat{q} + k^2/(4n))^{1/2}$$

Donde $\hat{p} = \frac{X}{n}$ y $k = z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$

CAPÍTULO 3. COMPARACIÓN DE LAS COBERTURAS DE PROBABILIDAD

3.1 COBERTURAS DE PROBABILIDAD ESTIMADAS POR SIMULACIÓN

Sea $\Gamma(p;I)$ la cobertura de probabilidad teórica del intervalo I para el parámetro binomial p. El valor simulado que estima a $\Gamma(p;I)$ es la frecuencia relativa ($\gamma(p;I)$) de la cobertura del intervalo I, y es el que se reporta en las tablas y gráficas en este capítulo. Para n ensayos simulados, el error estándar estimado
(SE) de la simulación es $SE=[\gamma(p;I)(1-\gamma(p;I))/m]^{1/2} \leq 1/(2m^{1/2})$
Las simulaciones se hicieron para los niveles de confianza más comúnmente usados: $0.95, 0.90$ y 0.80, y para los siguientes valores del parámetro Binomial: $p = 0.50, 0.40, 0.30, 0.20, 0.10, 0.050, 0.01$ y 0.001. Los tamaños de muestra empleados fueron: $n = 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 80$ y 100. En cada caso, se realizaron $40{,}000$ ensayos de simulación, por tanto $2 \times SE \leq 0.005$. Los resultados de las simulaciones se reportan en las Tablas 1, 2 y 3.

3.2 COMPARACIÓN DE LAS COBERTURAS DE PROBABILIDAD ESTIMADAS

En las Tablas 1,2 y 3, se reportan las coberturas de probabilidad estimadas de los intervalos de Wald, Chen, Score y Clopper-Pearson. Las cuales denotaremos como:$\gamma(p,I_W),\gamma(p,I_{Ch}),\gamma(p,I_S),\gamma(p,I_E)$ respectivamente
En las 3 tablas, para cada método y para cada n, se calculó: la cobertura promedio=$[\sum_{p=0.001}^{0.50}\gamma(p;I)]$/8, desv. media=$\sum_{p=0.001}^{0.50}|\gamma(p;I)-(1-\alpha)|/8$ y la diferencia entre la cobertura promedio y el nivel de confianza deseado $\left|[\sum_{p=0.001}^{0.50}\gamma(p;I)]/8-(1-\alpha)\right|$, para $1-\alpha=0.95, 0.90$ y 0.80
En las figuras 1, 2 y 3, se presentan las gráficas de la cobertura promedio =$[\sum_{p=0.001}^{0.50}\gamma(p;I)]/8$ vs el tamaño de muestra n, para $1-\alpha=0.95, 0.90$ y 0.80

Tabla 1 y Figura 1, con nivel nominal 0.95, Intervalo de Wald.
Se puede observar que la cobertura de probabilidad ($\gamma(p,I_W)$) para el intervalo de Wald es demasiado pequeña para los diferentes valores de p con diferentes tamaños de

muestra n, incluso cuando n es grande. Note por ejemplo que para valores $n < 15$ en general el valor de $\gamma(p, I_W)$ está muy alejado del nivel nominal aún para valores grandes de p. También cuando $n \geq 30$ y p es pequeña $(p \leq 0.20)$, $\gamma(p, I_W)$ se aleja considerablemente de 0.95, es decir, solo cuando $n \geq 30\ y\ p \geq 0.20$ el valor estimado es cercano al valor nominal. Sin embargo, note que en general la cobertura de probabilidad estimada promedio toma valores entre 0.489 y 0.7896 para los diferentes tamaños de muestra. En general el intervalo de confianza de Wald tiene un desempeño deficiente ya que presenta inconsistencias incluso para valores de p no cercanos a 0 o 1 y tamaños de muestra grandes, esto es, la cobertura de probabilidad estimada está muy alejada de $1 - \alpha = 0.95$. De hecho, nuestro estudio de simulación muestra que el promedio de cobertura de probabilidad está muy por debajo $1 - \alpha$ para diferentes $n's$. Además, para los 3 niveles de confianza y para todos los valores de n, Wald reporta la mayor distancia y variabilidad entre la cobertura promedio y el nivel nominal, ver las 2 últimas columnas de la tabla. Observe que en todas las figuras la cobertura estimada del intervalo de Wald está muy por debajo del nivel nominal. Estos resultados nos dicen que el intervalo de confianza de Wald tiene un comportamiento errático. Para Wald, se obtuvieron resultados similares para $1 - \alpha = 0.90$ y 0.80, ver tablas 3 y 4. En las figuras 3 y 4 se presenta el comportamiento de este intervalo.

Tabla 1 y Figura 1, con nivel nominal 0.95, Intervalo de Clopper-Pearson.

En contraste el intervalo de confianza Clopper-Pearson tiende a tener la cobertura estimada muy por arriba del nivel de confianza nominal, por ejemplo, para el nivel nominal 0.95, la cobertura promedio de este método es: $\bar{I} = 0.9929$ cuando $n = 5$, $\bar{I} = 0.9840$ cuando $n = 15$ y $\bar{I} = 0.9810$ cuando $n = 30$. En la Tabla 1, después de Wald, Clopper-Pearson tiene la mayor diferencia de

$|cobertura\ promedio - 0.95|$ para toda $n \geq 30$, y para $1 - \alpha = 0.90$ y 0.80, esta diferencia es la mayor para toda $n \geq 5$. En las 3 figuras, la cobertura promedio para Clopper-Pearson está muy arriba de la línea punteada que representa el nivel de confianza nominal, sobre todo para los niveles nominales 0.90 y 0.80.

Tabla 1 y Figura 1, con nivel nominal 0.95, Intervalo de Chen.

Por su parte, el intervalo de Chen funciona razonablemente bien cuando el tamaño de muestra $n \geq 20$. Sin embargo, observe que $\bar{I} = 0.9964$ cuando $n = 5$, $y\, \bar{I} = 0.9781$ cuando $n = 20$.

En la Tabla 1, después del intervalo Score, Chen tiene la menor diferencia de $|cobertura\, promedio - 0.95|$ para toda $n \geq 30$, y para $1 - \alpha = 0.90$ y 0.80, esta diferencia es la menor, con excepción de Score, para toda $n \geq 10$. Así mismo para $1 - \alpha = 0.95$ cuando $n \geq 30$, el intervalo de Chen presenta los menores valores de la desviación media, solo con excepción de Score, y para $1 - \alpha = 0.90$ y 0.80, la desviación media es la menor, solo con excepción de Score, para $n \geq 10$

En las 3 figuras, la cobertura promedio para Score está relativamente arriba de la línea punteada que representa el nivel de confianza nominal.

Tabla 1 y Figura 1, con nivel nominal 0.95, Intervalo Score.

Para el método de Score el promedio del nivel de confianza estimado es el más cercano al nivel de confianza nominal $1 - \alpha = 0.95$ incluso para n pequeña, por ejemplo, cuando $n = 5$, $\bar{I} = 0.9605$, en general el intervalo de Score muestra un comportamiento muy eficiente para diferentes tamaños de muestra y distintos valores de p. En las figuras $1, 2$ y 3 se presenta el comportamiento de este intervalo en términos de la cobertura de probabilidad para $1 - \alpha = 0.95, 0.90$ y 0.80 respectivamente. En las 3 figuras, la cobertura promedio para Score se ajusta muy bien a la línea punteada que representa el nivel de confianza nominal $1 - \alpha$. Además, para los niveles de confianza nominal $1 - \alpha = 0.95, 0.90$ y 0.80 el intervalo de Score reporta la mínima diferencia $|cobertura\, promedio - (1 - \alpha)|$ para toda $n \geq 5$, así mismo, el intervalo Score presenta la menor desviación media para toda $n \geq 5$ para los tres niveles de confianza, ver tablas 1,2 y 3.

Los intervalos de confianza de Chen y Score presentan los mejores resultados en términos de cobertura de probabilidad ya que el nivel de confianza estimado está muy cerca del nivel de confianza nominal, de estos dos, el intervalo que se acerca más al nivel de confianza nominal es el intervalo de confianza Score y es además el que reporta la menor distancia y variabilidad entre la cobertura promedio y el nivel nominal.

Cuadro 1. Cobertura de probabilidad estimada de intervalos de confianza para el parámetro p Binomial con nivel de confianza nominal 95%.

n \ p		0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.050	0.01	0.001	**Promedio**	**Desv. Media vs promedio**	**|promedio-0.95|**
5	$\gamma(Wald)$	0.9388	0.8337	0.8019	0.6612	0.4001	0.2233	0.0486	0.0053	0.4891	0.4609	0.4609
	$\gamma(Chen)$	1.0000	0.9900	0.9976	0.9933	0.9913	0.9987	1.0000	1.0000	0.9964	0.0464	0.0464
	$\gamma(Score)$	0.9388	0.9902	0.9686	0.9420	0.9201	0.9779	0.9514	0.9947	0.9605	0.0227	0.0105
	$\gamma(Exact)$	1.0000	0.9896	0.9976	0.9927	0.9913	0.9775	0.9992	0.9955	0.9929	0.0429	0.0429
10	$\gamma(Wald)$	0.8904	0.9014	0.8416	0.8880	0.6475	0.4033	0.0946	0.0098	0.5846	0.3654	0.3654
	$\gamma(Chen)$	0.9782	0.9818	0.9888	0.9932	0.9866	0.9874	1.0000	1.0000	0.9895	0.0395	0.0395
	$\gamma(Score)$	0.9786	0.9822	0.9260	0.9673	0.9300	0.9135	0.9053	0.9902	0.9491	0.0304	0.0009
	$\gamma(Exact)$	0.9790	0.9819	0.9892	0.9938	0.9938	0.9874	0.9963	0.9890	0.9888	0.0388	0.0388
15	$\gamma(Wald)$	0.8810	0.9397	0.9505	0.8150	0.7892	0.5391	0.1399	0.0153	0.6337	0.3164	0.3163
	$\gamma(Chen)$	0.9662	0.9852	0.9799	0.9817	0.9873	0.9949	0.9997	0.9999	0.9869	0.0368	0.0368
	$\gamma(Score)$	0.9649	0.9397	0.9156	0.9812	0.9437	0.9622	0.8601	0.9847	0.9440	0.0293	0.0060
	$\gamma(Exact)$	0.9655	0.9853	0.9796	0.9830	0.9883	0.9952	0.9902	0.9847	0.9840	0.0340	0.0340
20	$\gamma(Wald)$	0.9598	0.9296	0.9465	0.9229	0.8758	0.6350	0.1815	0.0189	0.6838	0.2687	0.2662
	$\gamma(Chen)$	0.9580	0.9631	0.9753	0.9566	0.9885	0.9845	0.9988	0.9999	0.9781	0.0281	0.0281
	$\gamma(Score)$	0.9598	0.9644	0.9749	0.9587	0.9550	0.9238	0.9834	0.9812	0.9627	0.0192	0.0126
	$\gamma(Exact)$	0.9582	0.9628	0.9748	0.9785	0.9884	0.9845	0.9835	0.9804	0.9764	0.0264	0.0264
30	$\gamma(Wald)$	0.9572	0.9346	0.9533	0.9487	0.8105	0.7828	0.2599	0.0309	0.7097	0.2429	0.2403
	$\gamma(Chen)$	0.9564	0.9617	0.9729	0.9638	0.9746	0.9846	0.9971	0.9997	0.9764	0.0263	0.0263
	$\gamma(Score)$	0.9572	0.9617	0.9314	0.9639	0.9737	0.9408	0.9631	0.9691	0.9576	0.0146	0.0076
	$\gamma(Exact)$	0.9568	0.9629	0.9748	0.9807	0.9922	0.9842	0.9971	0.9996	0.9810	0.0310	0.0310

Cuadro 2. Cobertura de probabilidad estimada de intervalos de confianza para el parámetro p Binomial con nivel de confianza nominal 95%. (continuación)

p / n		0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.050	0.01	0.001	Promedio	Desv. Media vs promedio	|promedio-0.95|
40	$\gamma(Wald)$	0.9197	0.9459	0.9316	0.9038	0.9160	0.8688	0.3292	0.0401	0.7319	0.2181	0.2181
	$\gamma(Chen)$	0.9610	0.9663	0.9447	0.9719	0.9859	0.9857	0.9931	1.0000	0.9761	0.0274	0.0261
	$\gamma(Score)$	0.9614	0.9665	0.9447	0.9271	0.9454	0.9534	0.9397	0.9599	0.9497	0.0105	0.0003
	$\gamma(Exact)$	0.9628	0.9660	0.9619	0.9727	0.9682	0.9868	0.9919	0.9993	0.9762	0.0262	0.0262
50	$\gamma(Wald)$	0.9362	0.9391	0.9342	0.9385	0.8788	0.9195	0.3958	0.0516	0.7492	0.2008	0.2008
	$\gamma(Chen)$	0.9678	0.9693	0.9573	0.9512	0.9690	0.9887	0.9858	1.0000	0.9736	0.0236	0.0236
	$\gamma(Score)$	0.9362	0.9391	0.9565	0.9508	0.9704	0.9616	0.9100	0.9484	0.9466	0.0132	0.0034
	$\gamma(Exact)$	0.9673	0.9693	0.9709	0.9672	0.9710	0.9882	0.9858	0.9989	0.9773	0.0273	0.0273
60	$\gamma(Wald)$	0.9485	0.9336	0.9516	0.9218	0.9428	0.8083	0.4479	0.0585	0.7516	0.1988	0.1984
	$\gamma(Chen)$	0.9495	0.9526	0.9659	0.9658	0.9509	0.9711	0.9970	1.0000	0.9691	0.0192	0.0191
	$\gamma(Score)$	0.9485	0.9535	0.9354	0.9660	0.9537	0.9709	0.9782	0.9415	0.9560	0.0121	0.0060
	$\gamma(Exact)$	0.9722	0.9637	0.9683	0.9671	0.9730	0.9903	0.9775	0.9983	0.9763	0.0263	0.0263
80	$\gamma(Wald)$	0.9429	0.9500	0.9499	0.9335	0.8988	0.9057	0.5508	0.0766	0.7760	0.1740	0.1740
	$\gamma(Chen)$	0.9428	0.9472	0.9635	0.9664	0.9623	0.9819	0.9914	0.9999	0.9694	0.0219	0.0194
	$\gamma(Score)$	0.9429	0.9500	0.9641	0.9649	0.9632	0.9373	0.9529	0.9234	0.9498	0.0114	0.0002
	$\gamma(Exact)$	0.9672	0.9595	0.9626	0.9655	0.9773	0.9662	0.9918	0.9970	0.9734	0.0234	0.0234
100	$\gamma(Wald)$	0.9415	0.9490	0.9502	0.9322	0.9333	0.8780	0.6359	0.0969	0.7896	0.1604	0.1604
	$\gamma(Chen)$	0.9435	0.9475	0.9627	0.9679	0.9708	0.9653	0.9823	0.9999	0.9675	0.0198	0.0175
	$\gamma(Score)$	0.9415	0.9490	0.9369	0.9393	0.9360	0.9652	0.9221	0.9032	0.9367	0.0172	0.0134
	$\gamma(Exact)$	0.9644	0.9588	0.9641	0.9668	0.9565	0.9823	0.9819	0.9961	0.9714	0.0213	0.0213

Nota: La simulación se realizó con 40,000 repeticiones para cada entrada de la tabla, p y n son los parámetros de la distribución Binomial

Cuadro 3. Cobertura de probabilidad estimada de intervalos de confianza para el parámetro p Binomial con nivel de confianza nominal 90%.

n \ p		**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.050**	**0.01**	**0.001**	**Promedio**	**Desv. Media vs promedio**	**|promedio-0.95|**
5	$\gamma(Wald)$	0.6251	0.8337	0.8019	0.6103	0.4001	0.2233	0.0475	0.0053	0.4434	0.4566	0.4566
	$\gamma(Chen)$	0.9391	0.9905	0.9702	0.9420	0.9911	0.9761	0.9987	1.0000	0.9759	0.0759	0.0759
	$\gamma(Score)$	0.9388	0.8337	0.9686	0.9420	0.9201	0.9779	0.9514	0.9947	0.9409	0.0575	0.0409
	$\gamma(Exact)$	0.9378	0.9902	0.9692	0.9931	0.9919	0.9774	0.9529	0.9949	0.9759	0.0759	0.0759
10	$\gamma(Wald)$	0.8904	0.9014	0.8051	0.8616	0.6357	0.3926	0.0946	0.0098	0.5739	0.3265	0.3261
	$\gamma(Chen)$	0.8892	0.9004	0.9261	0.9673	0.9871	0.9880	0.9955	0.9999	0.9567	0.0594	0.0567
	$\gamma(Score)$	0.8904	0.9014	0.9260	0.9673	0.9300	0.9135	0.9053	0.9902	0.9280	0.0304	0.0280
	$\gamma(Exact)$	0.9782	0.9411	0.9245	0.9686	0.9871	0.9887	0.9960	0.9900	0.9718	0.0718	0.0718
15	$\gamma(Wald)$	0.8810	0.8765	0.8219	0.8150	0.7785	0.5342	0.1396	0.0153	0.6077	0.2923	0.2923
	$\gamma(Chen)$	0.8804	0.9401	0.9131	0.9071	0.9455	0.9652	0.9902	1.0000	0.9427	0.0476	0.0427
	$\gamma(Score)$	0.8810	0.9397	0.9156	0.9027	0.9437	0.9622	0.8601	0.9847	0.9237	0.0384	0.0237
	$\gamma(Exact)$	0.9629	0.9386	0.9479	0.9476	0.9878	0.9640	0.9904	0.9849	0.9655	0.0655	0.0655
20	$\gamma(Wald)$	0.8860	0.8970	0.8437	0.9015	0.8671	0.6211	0.1807	0.0189	0.6520	0.2484	0.2480
	$\gamma(Chen)$	0.8843	0.8935	0.9149	0.9548	0.9570	0.9845	0.9822	0.9998	0.9464	0.0519	0.0464
	$\gamma(Score)$	0.8860	0.8970	0.9148	0.8469	0.9550	0.9238	0.8184	0.9812	0.9029	0.0408	0.0029
	$\gamma(Exact)$	0.9597	0.9629	0.9173	0.9577	0.9559	0.9842	0.9831	0.9801	0.9626	0.0626	0.0626
30	$\gamma(Wald)$	0.9028	0.8572	0.8852	0.8547	0.7925	0.7701	0.2599	0.0309	0.6692	0.2316	0.2309
	$\gamma(Chen)$	0.9002	0.9067	0.9301	0.8967	0.9740	0.9411	0.9644	0.9997	0.9391	0.0399	0.0391
	$\gamma(Score)$	0.9028	0.9068	0.9314	0.8955	0.8832	0.9408	0.9631	0.9691	0.9241	0.0294	0.0241
	$\gamma(Exact)$	0.9019	0.9097	0.9298	0.9306	0.9327	0.9829	0.9647	0.9698	0.9402	0.0402	0.0402

Cuadro 4. Cobertura de probabilidad estimada de intervalos de confianza para el parámetro p Binomial con nivel de confianza nominal 90%. (continuación)

n \ p		0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.050	0.01	0.001	**Promedio**	**Desv. Media vs promedio**	**|promedio-0.95|**
40	$\gamma(Wald)$	0.9197	0.8896	0.9141	0.8798	0.9061	0.8591	0.3284	0.0401	0.7171	0.1929	0.1829
	$\gamma(Chen)$	0.9229	0.9256	0.8794	0.9313	0.9452	0.9531	0.9932	0.9993	0.9437	0.0489	0.0437
	$\gamma(Score)$	0.9197	0.9254	0.8827	0.9271	0.9454	0.9534	0.9397	0.9599	0.9317	0.0360	0.0317
	$\gamma(Exact)$	0.9196	0.9277	0.9440	0.9303	0.9430	0.9509	0.9922	0.9608	0.9461	0.0461	0.0461
50	$\gamma(Wald)$	0.8828	0.8860	0.8736	0.8675	0.8641	0.9115	0.3942	0.0516	0.7164	0.1865	0.1836
	$\gamma(Chen)$	0.8830	0.8917	0.9119	0.8917	0.9077	0.9653	0.9873	0.9988	0.9297	0.0381	0.0297
	$\gamma(Score)$	0.8828	0.8860	0.9117	0.8912	0.9074	0.9616	0.9100	0.9484	0.9124	0.0224	0.0124
	$\gamma(Exact)$	0.9349	0.9407	0.9124	0.9203	0.9435	0.9614	0.9857	0.9523	0.9439	0.0439	0.0439
60	$\gamma(Wald)$	0.9085	0.8851	0.9075	0.8897	0.8269	0.8014	0.4535	0.0597	0.7165	0.1875	0.1835
	$\gamma(Chen)$	0.9067	0.9162	0.8826	0.9254	0.9522	0.9691	0.9765	0.9982	0.9409	0.0452	0.0409
	$\gamma(Score)$	0.9085	0.9153	0.8802	0.9267	0.8744	0.8721	0.8786	0.9403	0.8995	0.0232	0.0005
	$\gamma(Exact)$	0.9084	0.9148	0.9356	0.9262	0.9517	0.9239	0.9778	0.9984	0.9421	0.0421	0.0421
80	$\gamma(Wald)$	0.9096	0.8909	0.9090	0.9075	0.8844	0.8941	0.5521	0.0767	0.7530	0.1535	0.1470
	$\gamma(Chen)$	0.9050	0.9124	0.8862	0.9309	0.9116	0.9373	0.9549	0.9972	0.9294	0.0329	0.0294
	$\gamma(Score)$	0.9096	0.9170	0.8869	0.8795	0.9092	0.9357	0.9564	0.9233	0.9147	0.0231	0.0147
	$\gamma(Exact)$	0.9048	0.9126	0.9340	0.9336	0.9357	0.9357	0.9527	0.9971	0.9383	0.0383	0.0383
100	$\gamma(Wald)$	0.9112	0.8959	0.8715	0.8845	0.8653	0.8533	0.6337	0.0967	0.7515	0.1513	0.1485
	$\gamma(Chen)$	0.9096	0.9168	0.8994	0.8962	0.9364	0.8995	0.9816	0.9952	0.9293	0.0306	0.0293
	$\gamma(Score)$	0.9112	0.9178	0.8985	0.8963	0.8700	0.8981	0.9221	0.9032	0.9021	0.0114	0.0021
	$\gamma(Exact)$	0.9105	0.9195	0.9181	0.9190	0.9357	0.9335	0.9830	0.9950	0.9393	0.0393	0.0393

Nota: La simulación se realizó con 40,000 repeticiones para cada entrada de la tabla, p y n son los parámetros de la distribución Binomial

Cuadro 5. Cobertura de probabilidad estimada de intervalos de confianza para el parámetro p Binomial con nivel de confianza nominal 80%.

n \ p		0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.050	0.01	0.001	Promedio	Desv. Media vs promedio	|promedio-0.95|
5	$\gamma(Wald)$	0.6251	0.8337	0.6682	0.6103	0.3286	0.2026	0.0475	0.0053	0.4152	0.3933	0.3848
	$\gamma(Chen)$	0.9366	0.8358	0.9699	0.9419	0.9188	0.9765	0.9532	0.9943	0.9409	0.1409	0.1409
	$\gamma(Score)$	0.6251	0.8337	0.6682	0.9420	0.9201	0.7754	0.9514	0.9947	0.8388	0.1217	0.0388
	$\gamma(Exact)$	0.9363	0.8348	0.9693	0.9416	0.9205	0.9768	0.9509	0.9953	0.9407	0.1407	0.1407
10	$\gamma(Wald)$	0.6568	0.6663	0.8051	0.7751	0.5789	0.3926	0.0898	0.0098	0.4968	0.3045	0.3032
	$\gamma(Chen)$	0.8867	0.8983	0.9232	0.7726	0.9303	0.9126	0.9957	0.9893	0.9136	0.1204	0.1136
	$\gamma(Score)$	0.8904	0.6663	0.7033	0.7751	0.9300	0.9135	0.9053	0.9902	0.8468	0.1106	0.0467
	$\gamma(Exact)$	0.8893	0.9005	0.9242	0.9675	0.9297	0.9129	0.9032	0.9897	0.9271	0.1271	0.1271
15	$\gamma(Wald)$	0.6983	0.8158	0.7403	0.7717	0.7352	0.5018	0.1309	0.0151	0.5511	0.2528	0.2489
	$\gamma(Chen)$	0.8813	0.8151	0.7454	0.9033	0.9414	0.9650	0.9896	0.9851	0.9033	0.1169	0.1033
	$\gamma(Score)$	0.6983	0.8158	0.7403	0.6694	0.6081	0.8276	0.8601	0.9847	0.7755	0.0965	0.0245
	$\gamma(Exact)$	0.8813	0.8142	0.9127	0.9025	0.9452	0.9646	0.9903	0.9861	0.9246	0.1246	0.1246
20	$\gamma(Wald)$	0.7370	0.7502	0.7782	0.7090	0.8334	0.6211	0.1650	0.0187	0.5766	0.2318	0.2234
	$\gamma(Chen)$	0.7421	0.7474	0.7789	0.8470	0.7453	0.9236	0.9830	0.9809	0.8435	0.0901	0.0435
	$\gamma(Score)$	0.7370	0.7502	0.7782	0.8469	0.7445	0.9238	0.8184	0.9812	0.8225	0.0700	0.0225
	$\gamma(Exact)$	0.8856	0.8933	0.9156	0.8425	0.9572	0.9260	0.9827	0.9796	0.9228	0.1228	0.1228
30	$\gamma(Wald)$	0.8015	0.8075	0.7566	0.8184	0.7451	0.7268	0.2565	0.0305	0.6179	0.1890	0.1821
	$\gamma(Chen)$	0.8013	0.8079	0.8370	0.7464	0.8818	0.9390	0.9613	0.9687	0.8679	0.0813	0.0679
	$\gamma(Score)$	0.8015	0.8075	0.8398	0.7504	0.8832	0.9408	0.7399	0.9691	0.8415	0.0690	0.0415
	$\gamma(Exact)$	0.9027	0.8086	0.8402	0.8915	0.8853	0.9398	0.9633	0.9709	0.9003	0.1003	0.1003

Cuadro 6. Cobertura de probabilidad estimada de intervalos de confianza para el parámetro p Binomial con nivel de confianza nominal 80%. (continuación)

p / n		**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.050**	**0.01**	**0.001**	**Promedio**	**Desv. Media vs promedio**	**|promedio-0.95|**
40	$\gamma(Wald)$	0.7290	0.7962	0.7737	0.7472	0.7382	0.8258	0.3221	0.0394	0.6214	0.1850	0.1786
	$\gamma(Chen)$	0.8466	0.8533	0.7724	0.8385	0.8210	0.7311	0.9394	0.9604	0.8453	0.0695	0.0453
	$\gamma(Score)$	0.8469	0.7417	0.7737	0.8341	0.8217	0.7351	0.9397	0.9599	0.8316	0.0690	0.0316
	$\gamma(Exact)$	0.8462	0.8538	0.8819	0.8395	0.8214	0.9523	0.9380	0.9602	0.8866	0.0866	0.0866
50	$\gamma(Wald)$	0.7984	0.8031	0.7777	0.8369	0.8302	0.6853	0.3824	0.0505	0.6455	0.1720	0.1545
	$\gamma(Chen)$	0.8011	0.8080	0.8377	0.7845	0.7718	0.8198	0.9115	0.9510	0.8357	0.0466	0.0357
	$\gamma(Score)$	0.7984	0.8031	0.8380	0.7867	0.7666	0.8200	0.9100	0.9484	0.8339	0.0460	0.0339
	$\gamma(Exact)$	0.8784	0.8063	0.8375	0.8910	0.9093	0.8845	0.9104	0.9494	0.8833	0.0833	0.0833
60	$\gamma(Wald)$	0.7565	0.7640	0.7976	0.7984	0.7899	0.7325	0.4287	0.0591	0.6408	0.1592	0.1592
	$\gamma(Chen)$	0.8450	0.7634	0.7945	0.8548	0.8740	0.8760	0.8808	0.9428	0.8539	0.0644	0.0539
	$\gamma(Score)$	0.7565	0.7640	0.7976	0.7446	0.7208	0.8759	0.8774	0.9391	0.8095	0.0636	0.0095
	$\gamma(Exact)$	0.8455	0.8502	0.8395	0.8560	0.8738	0.8780	0.9783	0.9433	0.8831	0.0831	0.0831
80	$\gamma(Wald)$	0.7832	0.7878	0.7744	0.8342	0.7669	0.7253	0.5082	0.0774	0.6572	0.1514	0.1428
	$\gamma(Chen)$	0.7834	0.7906	0.8220	0.7929	0.8124	0.8064	0.9551	0.9256	0.8360	0.0443	0.0360
	$\gamma(Score)$	0.7832	0.7878	0.8229	0.7940	0.8109	0.8095	0.8095	0.9198	0.8172	0.0260	0.0172
	$\gamma(Exact)$	0.8577	0.8637	0.8224	0.8737	0.8558	0.8678	0.9531	0.9252	0.8774	0.0774	0.0774
100	$\gamma(Wald)$	0.8046	0.8134	0.8083	0.7818	0.8119	0.8180	0.6192	0.0927	0.6937	0.1203	0.1063
	$\gamma(Chen)$	0.8051	0.8127	0.7706	0.8335	0.7587	0.7547	0.9186	0.9955	0.8312	0.0602	0.0312
	$\gamma(Score)$	0.8046	0.8134	0.7716	0.8314	0.7619	0.7541	0.9221	0.9032	0.8203	0.0484	0.0203
	$\gamma(Exact)$	0.8091	0.8142	0.8421	0.8322	0.8717	0.9012	0.9198	0.9039	0.8618	0.0618	0.0618

Nota: La simulación se realizó con 40,000 repeticiones para cada entrada de la tabla, p y n son los parámetros de la distribución Binomial

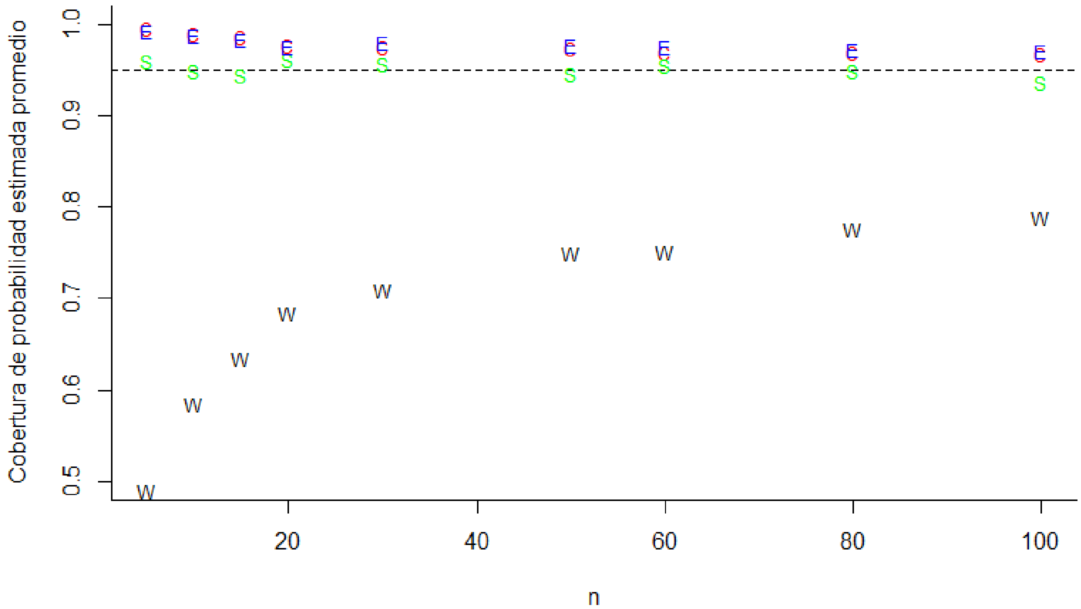

Figura 1. Cobertura de probabilidad estimada promedio de los intervalos de confianza para p Binomial con nivel nominal de 95%.

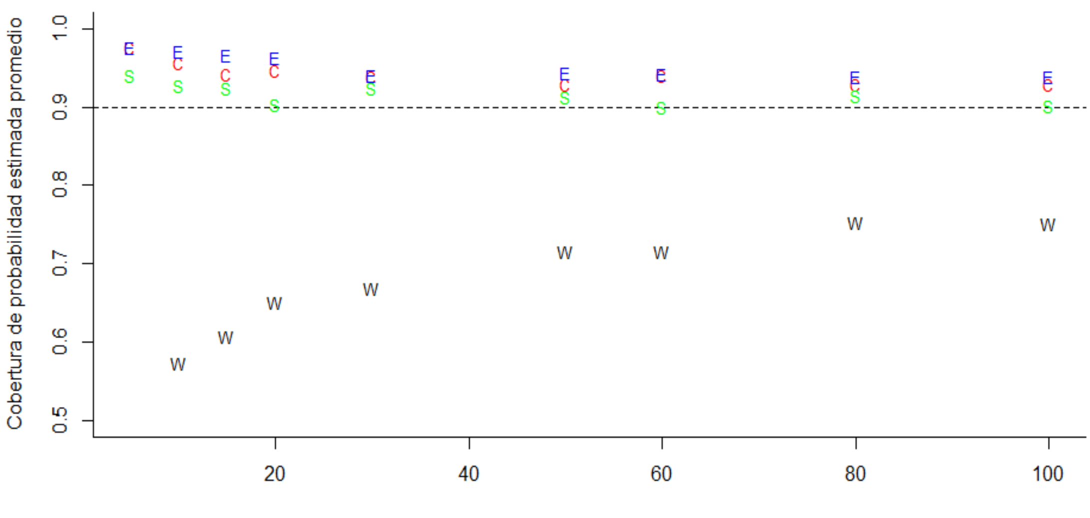

Figura 2. Cobertura de probabilidad estimada promedio de los intervalos de confianza para p Binomial con nivel nominal de 90%.

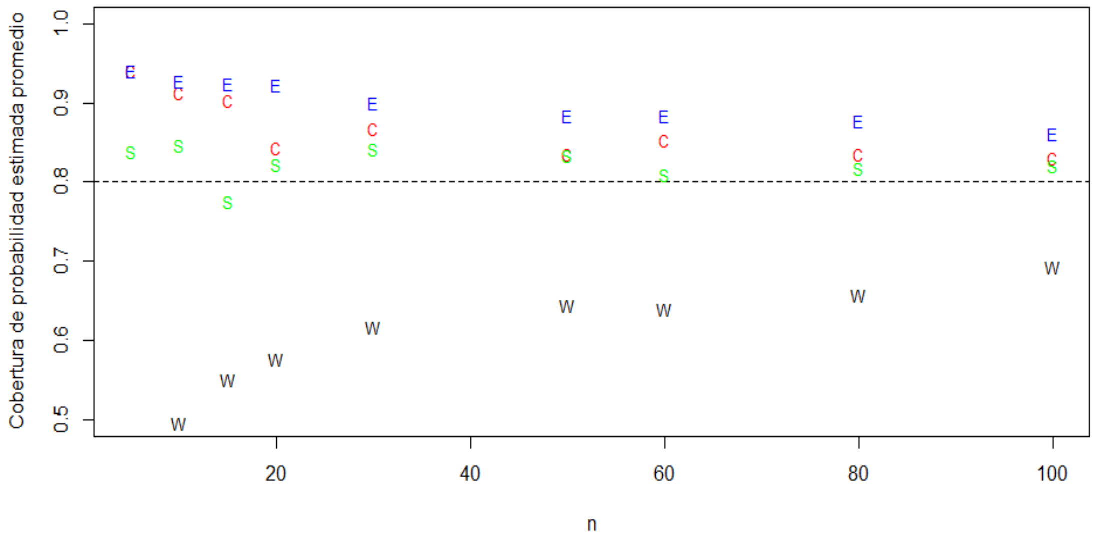

Figura 3. Cobertura de probabilidad estimada promedio de los intervalos de confianza para p Binomial con nivel nominal de 80%.

CAPÍTULO 4. DESEMPEÑO DE LOS INTERVALOS DE CONFIANZA EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD DEL INTERVALO

Es muy importante incluir en nuestro análisis el estudio de la longitud de los diferentes intervalos de confianza ya que dicha longitud nos ayuda a medir la exactitud de la estimación, se busca entonces que los intervalos tengan anchura pequeña ya que esto nos garantiza menor incertidumbre.

Las tablas 4, 5 y 6 muestran la longitud estimada, por simulación, de los 4 métodos Wald, Chen, Score y Clopper-Pearson, para diferentes tamaños de muestra $n = 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 100$ y para $p = 0.50, 0.40, 0.30, 0.20, 0.10, 0.050, 0.01, 0.001$ y niveles de confianza nominal $1 - \alpha = 0.95, 0.90$ y 0.80. Además, las 3 tablas contienen, para cada método y para cada n, la longitud estimada promedio y la desviación media vs promedio para cada uno de los métodos: Wald, Chen, Score y Clopper-Pearson.

Cuadro 7. Longitud estimada de intervalos de confianza para el parámetro p de la distribución Binomial con nivel de confianza nominal 95%

n \ p		0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.050	0.01	0.001	**Promedio**	**Desv media vs promedio**
5	$\gamma(Wald)$	0.7568	0.7300	0.6517	0.5088	0.2990	0.1610	0.0342	0.0037	0.3932	0.2687
	$\gamma(Chen)$	0.8473	0.8420	0.8275	0.8029	0.7682	0.7467	0.7277	0.7234	0.7857	0.0442
	$\gamma(Score)$	0.6185	0.6112	0.5901	0.5534	0.5023	0.4704	0.4420	0.4353	0.5279	0.0654
	$\gamma(Exact)$	0.7553	0.7460	0.7188	0.6712	0.6067	0.5664	0.5312	0.5226	0.6398	0.0830
10	$\gamma(Wald)$	0.5856	0.5718	0.5268	0.4384	0.2794	0.1619	0.0358	0.0036	0.3254	0.2052
	$\gamma(Chen)$	0.6029	0.5967	0.5773	0.5445	0.4956	0.4640	0.4361	0.4293	0.5183	0.0620
	$\gamma(Score)$	0.5066	0.4990	0.4754	0.4332	0.3689	0.3278	0.2882	0.2786	0.3972	0.0813
	$\gamma(Exact)$	0.5996	0.5900	0.5585	0.5045	0.4239	0.3704	0.3219	0.3098	0.4598	0.1033
15	$\gamma(Wald)$	0.4882	0.4776	0.4431	0.3779	0.2547	0.1546	0.0362	0.0039	0.2795	0.1672
	$\gamma(Chen)$	0.4951	0.4883	0.4687	0.4343	0.3817	0.3474	0.3150	0.3071	0.4047	0.0669
	$\gamma(Score)$	0.4390	0.4318	0.4087	0.3681	0.3030	0.2595	0.2159	0.2052	0.3289	0.0830
	$\gamma(Exact)$	0.5070	0.4984	0.4704	0.4206	0.3400	0.2853	0.2326	0.2195	0.3718	0.1024
20	$\gamma(Wald)$	0.4269	0.4179	0.3891	0.3345	0.2347	0.1452	0.0359	0.0036	0.2485	0.1436
	$\gamma(Chen)$	0.4302	0.4243	0.4050	0.3707	0.3185	0.2823	0.2481	0.2395	0.3398	0.0677
	$\gamma(Score)$	0.3927	0.3860	0.3645	0.3255	0.2635	0.2185	0.1739	0.1624	0.2859	0.0813
	$\gamma(Exact)$	0.4461	0.4382	0.4132	0.3669	0.2925	0.2379	0.1837	0.1701	0.3186	0.0975
30	$\gamma(Wald)$	0.3518	0.3445	0.3210	0.2789	0.2016	0.1323	0.0354	0.0040	0.2087	0.1154
	$\gamma(Chen)$	0.3530	0.3474	0.3296	0.2979	0.2474	0.2116	0.1759	0.1666	0.2662	0.0658
	$\gamma(Score)$	0.3319	0.3258	0.3066	0.2726	0.2152	0.1726	0.1272	0.1150	0.2333	0.0759
	$\gamma(Exact)$	0.3684	0.3617	0.3403	0.3020	0.2360	0.1860	0.1318	0.1173	0.2554	0.0876

Cuadro 8. Longitud estimada de intervalos de confianza para el parámetro p de la distribución Binomial con nivel de confianza nominal 95% (continuación)

n \ p		**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.050**	**0.01**	**0.001**	**Promedio**	**Desv media vs promedio**
40	$\gamma(Wald)$	0.3059	0.2996	0.2798	0.2426	0.1782	0.1210	0.0344	0.0039	0.1832	0.0988
	$\gamma(Chen)$	0.3066	0.3013	0.2851	0.2558	0.2079	0.1736	0.1375	0.1279	0.2245	0.0627
	$\gamma(Score)$	0.2926	0.2871	0.2699	0.2384	0.1861	0.1464	0.1015	0.0891	0.2014	0.0706
	$\gamma(Exact)$	0.3203	0.3143	0.2956	0.2614	0.2027	0.1568	0.1047	0.0899	0.2182	0.0797
50	$\gamma(Wald)$	0.2744	0.2687	0.2509	0.2184	0.1610	0.1117	0.0339	0.0040	0.1654	0.0877
	$\gamma(Chen)$	0.2748	0.2699	0.2547	0.2274	0.1825	0.1494	0.1138	0.1039	0.1971	0.0596
	$\gamma(Score)$	0.2646	0.2595	0.2437	0.2152	0.1664	0.1292	0.0855	0.0729	0.1796	0.0661
	$\gamma(Exact)$	0.2868	0.2813	0.2645	0.2332	0.1806	0.1382	0.0875	0.0728	0.1931	0.0733
60	$\gamma(Wald)$	0.2509	0.2457	0.2296	0.1996	0.1479	0.1038	0.0327	0.0038	0.1518	0.0797
	$\gamma(Chen)$	0.2512	0.2466	0.2325	0.2068	0.1644	0.1326	0.0976	0.0876	0.1774	0.0569
	$\gamma(Score)$	0.2434	0.2387	0.2241	0.1971	0.1519	0.1166	0.0743	0.0617	0.1635	0.0623
	$\gamma(Exact)$	0.2618	0.2569	0.2414	0.2128	0.1640	0.1247	0.0762	0.0614	0.1749	0.0683
80	$\gamma(Wald)$	0.2177	0.2133	0.1994	0.1736	0.1290	0.0916	0.0314	0.0038	0.1325	0.0685
	$\gamma(Chen)$	0.2179	0.2138	0.2011	0.1782	0.1398	0.1105	0.0767	0.0668	0.1506	0.0522
	$\gamma(Score)$	0.2128	0.2086	0.1957	0.1719	0.1315	0.0996	0.0600	0.0474	0.1409	0.0563
	$\gamma(Exact)$	0.2266	0.2222	0.2087	0.1838	0.1412	0.1064	0.0614	0.0469	0.1497	0.0607
100	$\gamma(Wald)$	0.1950	0.1910	0.1786	0.1555	0.1159	0.0829	0.0301	0.0038	0.1191	0.0609
	$\gamma(Chen)$	0.1951	0.1914	0.1799	0.1589	0.1237	0.0964	0.0639	0.0540	0.1329	0.0484
	$\gamma(Score)$	0.1914	0.1876	0.1759	0.1543	0.1177	0.0884	0.0510	0.0386	0.1256	0.0517
	$\gamma(Exact)$	0.2024	0.1985	0.1864	0.1641	0.1256	0.0944	0.0523	0.0380	0.1327	0.0551

Cuadro 9. Longitud estimada de los intervalos de confianza para el parámetro p de la distribución Binomial con nivel nominal 90%

n \ p		$\mathbf{0.50}$	$\mathbf{0.40}$	$\mathbf{0.30}$	$\mathbf{0.20}$	$\mathbf{0.10}$	$\mathbf{0.050}$	$\mathbf{0.01}$	$\mathbf{0.001}$	**Promedio**	**Desv media vs promedio**
5	$\gamma(Wald)$	0.6351	0.6126	0.5469	0.4270	0.2509	0.1351	0.0287	0.0031	0.3299	0.1502
	$\gamma(Chen)$	0.4914	0.4799	0.4421	0.3679	0.2345	0.1359	0.0301	0.0031	0.6322	0.0343
	$\gamma(Score)$	0.4097	0.4008	0.3718	0.3171	0.2138	0.1297	0.0304	0.0032	0.4522	0.0474
	$\gamma(Exact)$	0.3583	0.3507	0.3265	0.2808	0.1970	0.1218	0.0302	0.0030	0.5717	0.0569
10	$\gamma(Wald)$	0.2952	0.2891	0.2694	0.2340	0.1692	0.1110	0.0297	0.0033	0.2731	0.1115
	$\gamma(Chen)$	0.2303	0.2255	0.2105	0.1833	0.1351	0.0937	0.0284	0.0034	0.4154	0.0432
	$\gamma(Score)$	0.1637	0.1603	0.1499	0.1305	0.0973	0.0695	0.0253	0.0032	0.3334	0.0539
	$\gamma(Exact)$	0.0735	0.0720	0.0673	0.0587	0.0440	0.0319	0.0142	0.0028	0.4020	0.0643
15	$\gamma(Wald)$	0.0520	0.0509	0.0476	0.0416	0.0312	0.0226	0.0102	0.0025	0.2346	0.0892
	$\gamma(Chen)$	0.7025	0.6971	0.6804	0.6523	0.6118	0.5873	0.5656	0.5603	0.3250	0.0443
	$\gamma(Score)$	0.5033	0.4972	0.4773	0.4430	0.3924	0.3594	0.3289	0.3217	0.2742	0.0524
	$\gamma(Exact)$	0.4141	0.4081	0.3891	0.3555	0.3030	0.2683	0.2350	0.2266	0.3220	0.0610
20	$\gamma(Wald)$	0.3605	0.3546	0.3367	0.3044	0.2539	0.2185	0.1838	0.1751	0.2085	0.0759
	$\gamma(Chen)$	0.2960	0.2909	0.2747	0.2458	0.1990	0.1649	0.1301	0.1206	0.2734	0.0432
	$\gamma(Score)$	0.2305	0.2262	0.2129	0.1888	0.1486	0.1181	0.0841	0.0747	0.2377	0.0498
	$\gamma(Exact)$	0.1637	0.1605	0.1507	0.1326	0.1020	0.0778	0.0481	0.0387	0.2744	0.0567
30	$\gamma(Wald)$	0.0735	0.0720	0.0674	0.0589	0.0444	0.0326	0.0162	0.0088	0.1751	0.0605
	$\gamma(Chen)$	0.0520	0.0509	0.0477	0.0416	0.0313	0.0229	0.0109	0.0049	0.2153	0.0403
	$\gamma(Score)$	0.5498	0.5420	0.5194	0.4800	0.4248	0.3902	0.3593	0.3520	0.1938	0.0448
	$\gamma(Exact)$	0.4420	0.4347	0.4117	0.3703	0.3061	0.2644	0.2239	0.2140	0.2189	0.0495

Cuadro 10. Longitud estimada de los intervalos de confianza para el parámetro p de la distribución Binomial con nivel nominal 90% (continuación)

p / n		0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.050	0.01	0.001	**Promedio**	**Desv media vs promedio**
40	$\gamma(Wald)$	0.2568	0.2514	0.2348	0.2036	0.1495	0.1015	0.0289	0.0033	0.1537	0.0517
	$\gamma(Chen)$	0.2572	0.2526	0.2380	0.2120	0.1683	0.1364	0.1015	0.0922	0.1823	0.0375
	$\gamma(Score)$	0.2487	0.2439	0.2289	0.2011	0.1548	0.1187	0.0767	0.0648	0.1672	0.0408
	$\gamma(Exact)$	0.2747	0.2696	0.2537	0.2242	0.1744	0.1342	0.0871	0.0737	0.1865	0.0443
50	$\gamma(Wald)$	0.3794	0.3726	0.3511	0.3129	0.2507	0.2082	0.1649	0.1541	0.1388	0.0460
	$\gamma(Chen)$	0.3373	0.3312	0.3117	0.2760	0.2182	0.1753	0.1318	0.1204	0.1605	0.0350
	$\gamma(Score)$	0.2831	0.2778	0.2607	0.2305	0.1786	0.1392	0.0960	0.0842	0.1492	0.0377
	$\gamma(Exact)$	0.2244	0.2200	0.2063	0.1814	0.1386	0.1053	0.0649	0.0529	0.1647	0.0404
60	$\gamma(Wald)$	0.2106	0.2062	0.1926	0.1676	0.1241	0.0871	0.0279	0.0033	0.1274	0.0420
	$\gamma(Chen)$	0.2107	0.2067	0.1944	0.1720	0.1345	0.1055	0.0725	0.0629	0.1449	0.0330
	$\gamma(Score)$	0.2060	0.2020	0.1893	0.1661	0.1266	0.0955	0.0567	0.0446	0.1359	0.0352
	$\gamma(Exact)$	0.2234	0.2192	0.2061	0.1819	0.1405	0.1067	0.0637	0.0503	0.1490	0.0374
80	$\gamma(Wald)$	0.1827	0.1790	0.1673	0.1456	0.1084	0.0768	0.0264	0.0032	0.1112	0.0363
	$\gamma(Chen)$	0.1828	0.1793	0.1685	0.1484	0.1148	0.0888	0.0573	0.0478	0.1235	0.0297
	$\gamma(Score)$	0.1798	0.1762	0.1651	0.1446	0.1100	0.0818	0.0460	0.0342	0.1172	0.0314
	$\gamma(Exact)$	0.1928	0.1892	0.1777	0.1567	0.1205	0.0908	0.0516	0.0383	0.1272	0.0330
100	$\gamma(Wald)$	0.1615	0.1583	0.1483	0.1298	0.0984	0.0730	0.0395	0.0278	0.1000	0.0325
	$\gamma(Chen)$	0.0733	0.0718	0.0672	0.0587	0.0441	0.0322	0.0152	0.0068	0.1093	0.0273
	$\gamma(Score)$	0.0519	0.0509	0.0476	0.0415	0.0312	0.0227	0.0105	0.0041	0.1046	0.0286
	$\gamma(Exact)$	0.6892	0.6795	0.6521	0.6054	0.5383	0.4975	0.4601	0.4518	0.1127	0.0298

Cuadro 11. Longitud estimada de los intervalos de confianza para el parámetro p de la distribución Binomial con nivel nominal 80%

n \ p		**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.050**	**0.01**	**0.001**	**promedio**	**Desv media vs promedio**
5	$\gamma(Wald)$	0.4948	0.4773	0.4261	0.3327	0.1955	0.1053	0.0224	0.0024	0.2571	0.1757
	$\gamma(Chen)$	0.5372	0.5321	0.5125	0.4818	0.4372	0.4091	0.3838	0.3780	0.4589	0.0569
	$\gamma(Score)$	0.4544	0.4464	0.4232	0.3824	0.3249	0.2885	0.2559	0.2482	0.3530	0.0736
	$\gamma(Exact)$	0.6003	0.5912	0.5647	0.5199	0.4542	0.4146	0.3787	0.3701	0.4867	0.0823
10	$\gamma(Wald)$	0.3829	0.3739	0.3445	0.2866	0.1827	0.1059	0.0234	0.0024	0.2128	0.1342
	$\gamma(Chen)$	0.3895	0.3833	0.3644	0.3311	0.2804	0.2476	0.2164	0.2085	0.3026	0.0644
	$\gamma(Score)$	0.3582	0.3515	0.3306	0.2923	0.2317	0.1916	0.1519	0.1422	0.2562	0.0769
	$\gamma(Exact)$	0.4462	0.4384	0.4151	0.3721	0.3056	0.2603	0.2175	0.2069	0.3328	0.0852
15	$\gamma(Wald)$	0.3192	0.3123	0.2897	0.2471	0.1666	0.1011	0.0237	0.0025	0.1828	0.1093
	$\gamma(Chen)$	0.3215	0.3159	0.2989	0.2682	0.2193	0.1858	0.1526	0.1442	0.2383	0.0628
	$\gamma(Score)$	0.3042	0.2984	0.2798	0.2463	0.1904	0.1512	0.1103	0.0999	0.2101	0.0721
	$\gamma(Exact)$	0.3664	0.3597	0.3402	0.3035	0.2425	0.1988	0.1549	0.1435	0.2637	0.0787
20	$\gamma(Wald)$	0.2791	0.2733	0.2544	0.2187	0.1535	0.0949	0.0235	0.0024	0.1625	0.0939
	$\gamma(Chen)$	0.2802	0.2752	0.2595	0.2314	0.1855	0.1529	0.1190	0.1105	0.2018	0.0598
	$\gamma(Score)$	0.2689	0.2637	0.2472	0.2169	0.1665	0.1280	0.0878	0.0771	0.1820	0.0672
	$\gamma(Exact)$	0.3167	0.3112	0.2937	0.2611	0.2066	0.1652	0.1217	0.1101	0.2233	0.0724
30	$\gamma(Wald)$	0.2300	0.2252	0.2099	0.1823	0.1318	0.0865	0.0232	0.0026	0.1364	0.0754
	$\gamma(Chen)$	0.2305	0.2261	0.2125	0.1883	0.1477	0.1173	0.0843	0.0754	0.1603	0.0541
	$\gamma(Score)$	0.2242	0.2198	0.2057	0.1807	0.1372	0.1031	0.0642	0.0532	0.1485	0.0591
	$\gamma(Exact)$	0.2568	0.2522	0.2378	0.2111	0.1653	0.1290	0.0871	0.0753	0.1768	0.0626

Cuadro 12. Longitud estimada de los intervalos de confianza para el parámetro p de la distribución Binomial con nivel nominal 80%. (continuación)

n \ p		0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.050	0.01	0.001	promedio	Desv media vs promedio
40	$\gamma(Wald)$	0.2000	0.1959	0.1829	0.1586	0.1165	0.0791	0.0225	0.0026	0.1198	0.0646
	$\gamma(Chen)$	0.2003	0.1965	0.1844	0.1626	0.1263	0.0981	0.0664	0.0574	0.1365	0.0495
	$\gamma(Score)$	0.1962	0.1923	0.1801	0.1575	0.1193	0.0888	0.0517	0.0408	0.1283	0.0532
	$\gamma(Exact)$	0.2209	0.2170	0.2044	0.1814	0.1413	0.1086	0.0692	0.0574	0.1500	0.0559
50	$\gamma(Wald)$	0.1794	0.1757	0.1640	0.1428	0.1052	0.0730	0.0221	0.0026	0.1081	0.0574
	$\gamma(Chen)$	0.1795	0.1760	0.1653	0.1454	0.1121	0.0860	0.0554	0.0464	0.1208	0.0458
	$\gamma(Score)$	0.1766	0.1730	0.1620	0.1419	0.1071	0.0793	0.0441	0.0332	0.1147	0.0487
	$\gamma(Exact)$	0.1965	0.1929	0.1816	0.1609	0.1252	0.0954	0.0582	0.0464	0.1321	0.0508
60	$\gamma(Wald)$	0.1641	0.1607	0.1501	0.1308	0.0968	0.0677	0.0215	0.0026	0.0993	0.0521
	$\gamma(Chen)$	0.1641	0.1609	0.1510	0.1328	0.1018	0.0776	0.0480	0.0390	0.1094	0.0428
	$\gamma(Score)$	0.1619	0.1587	0.1485	0.1301	0.0981	0.0722	0.0389	0.0280	0.1045	0.0453
	$\gamma(Exact)$	0.1785	0.1752	0.1649	0.1459	0.1132	0.0862	0.0507	0.0390	0.1192	0.0469
80	$\gamma(Wald)$	0.1424	0.1394	0.1303	0.1136	0.0844	0.0601	0.0206	0.0026	0.0867	0.0448
	$\gamma(Chen)$	0.1424	0.1396	0.1309	0.1148	0.0876	0.0660	0.0386	0.0296	0.0937	0.0382
	$\gamma(Score)$	0.1410	0.1381	0.1293	0.1131	0.0851	0.0626	0.0321	0.0215	0.0904	0.0400
	$\gamma(Exact)$	0.1535	0.1506	0.1416	0.1252	0.0967	0.0734	0.0412	0.0298	0.1015	0.0412
100	$\gamma(Wald)$	0.1275	0.1249	0.1168	0.1017	0.0758	0.0542	0.0197	0.0025	0.0779	0.0398
	$\gamma(Chen)$	0.1275	0.1250	0.1171	0.1027	0.0780	0.0583	0.0327	0.0240	0.0832	0.0349
	$\gamma(Score)$	0.1265	0.1239	0.1160	0.1014	0.0764	0.0559	0.0279	0.0175	0.0807	0.0363
	$\gamma(Exact)$	0.1365	0.1340	0.1259	0.1111	0.0857	0.0647	0.0353	0.0242	0.0897	0.0372

Observe que en las tablas 4, 5 y 6, para los 3 niveles de confianza, la longitud promedio de Wald es especialmente pequeña para $n \leq 20$, en comparación con la longitud promedio de los otros métodos. Sin embargo, como ya vimos, para estos valores de $n \leq 20$, Wald tiene una cobertura de probabilidad inaceptablemente alejada del nivel nominal. Por otro lado, la longitud promedio estimada de Chen y de Clopper-Pearson es demasiado grande para $n \leq 20$, a medida que n aumenta, entonces la longitud de estos intervalos es comparable con la de los otros métodos.

Para el intervalo de Score se observa en las diferentes tablas que estos tienen una longitud menor en comparación a la longitud estimada de los intervalos de confianza Chen y Wald. En general, la longitud estimada promedio del intervalo Score es pequeña, los valores de la longitud de Score están solo por arriba de los valores de la longitud del intervalo de Wald.

En contraste al analizar las longitudes del intervalo de confianza Clopper-Pearson se observa que la anchura promedio estimada de este intervalo es la más grande.

Las gráficas $4,\ 5$ y 6 anexadas abajo para $1-\alpha = 95\%,\ 90\%$ y 80% respectivamente, muestran la longitud promedio estimada para los cuatro diferentes métodos. En cada una de las figuras se puede apreciar que a medida que el tamaño de muestra aumenta $n \geq 30$, entonces la longitud promedio estimada es aproximadamente igual en todos los métodos.

De acuerdo con lo anterior, el intervalo de confianza de Wald y Score presentan las longitudes estimadas promedio más pequeñas en comparación con el método de Chen y el método de Clopper-Pearson, de hecho, este último presenta una longitud estimada promedio mayor en los diferentes niveles de confianza nominal.

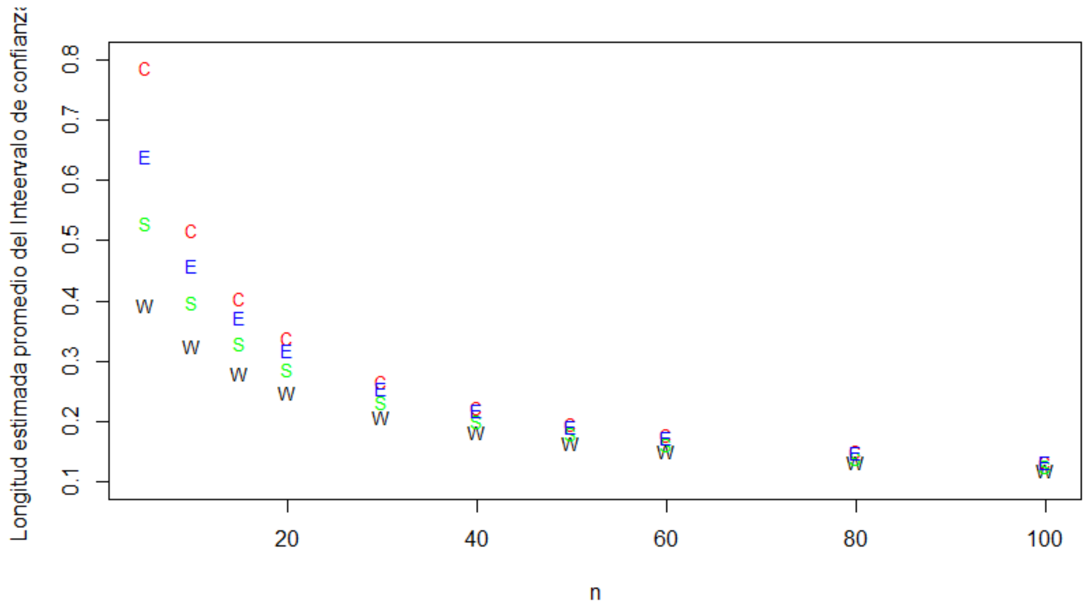

Figura 4. Longitud estimada promedio de los intervalos de confianza para el parámetro p Binomial con nivel nominal de 95%.

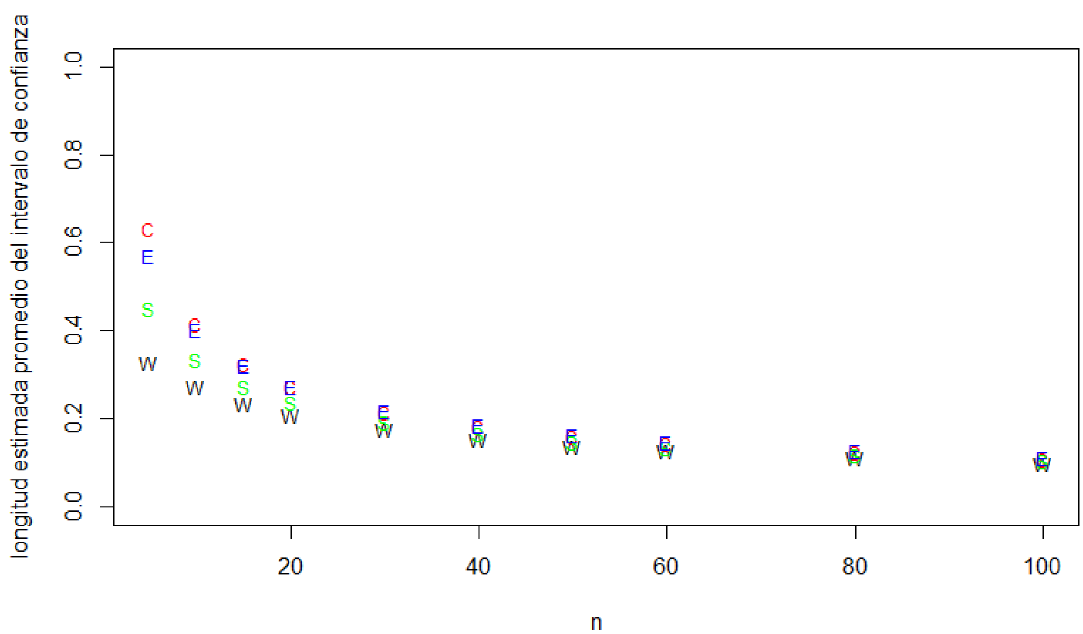

Figura 5. Longitud estimada promedio de los intervalos de confianza para el parámetro p Binomial con nivel nominal de 90%.

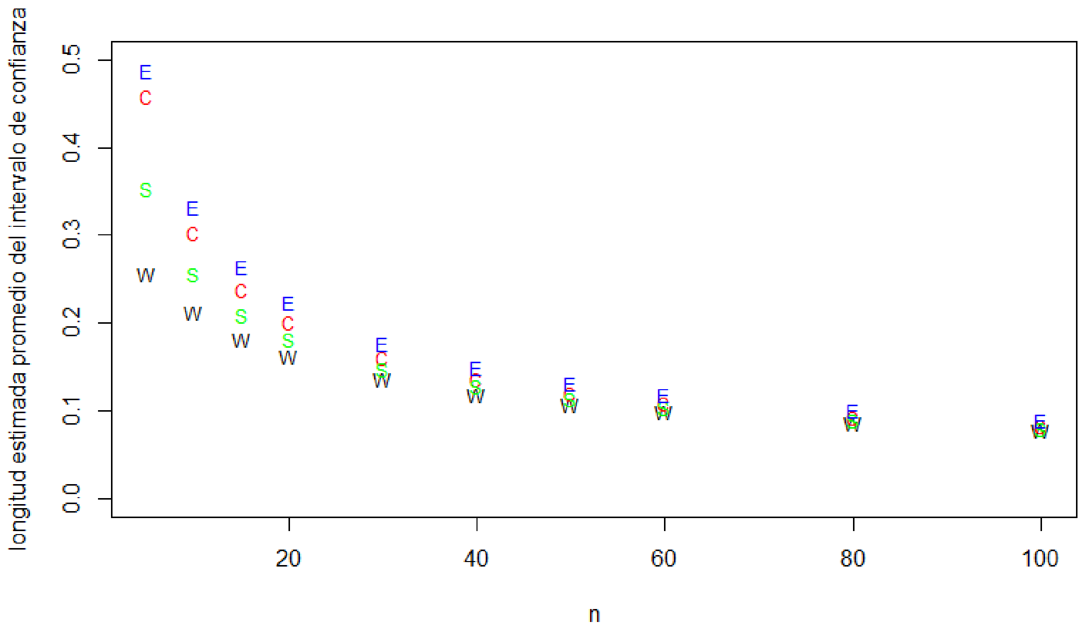

Figura 6. Longitud estimada promedio de los intervalos de confianza para el parámetro p Binomial con nivel nominal de 95%

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Con el análisis anterior y las comparaciones realizadas de los intervalos de confianza asintóticos para el parámetro Binomial, se refuerzan algunas de las recomendaciones que ya algunos autores han aportado a la investigación de los intervalos de confianza para el parámetro Binomial.

El intervalo de Clopper-Pearson tiene una cobertura de probabilidad acotada por abajo por el nivel nominal, pero su típica cobertura de probabilidad es mucho mayor que el nivel nominal. Además, su longitud es consistentemente mayor a la de los otros 3 métodos.

En general para el intervalo de Wald, se obtienen coberturas estimadas alejadas y por debajo del nivel de confianza, incluso para tamaños de muestra grandes y para valores de p no cercanos a 0 o 1. Para todos los niveles de confianza estimados, $0.95, 0.90$ y 0.80, la cobertura promedio de Wald está muy por debajo del nivel nominal. Estos resultados nos dicen que el intervalo de Wald tiene un comportamiento errático y NO se recomienda usarlo en la práctica.

El intervalo de Chen tiene varias propiedades importantes y es sencillo de calcular. Sin embargo, para $5 \leq n \leq 20$ y sobre todo para los niveles 0.90 y 0.80, su cobertura de probabilidad está muy por arriba del nivel nominal. A partir de $n \geq 50$, Chen tiene muy buen desempeño tanto en cobertura de probabilidad y también en su longitud.

El intervalo Score tiene varias propiedades importantes y es sencillo de calcular. Solo para valores muy pequeños de p $(p \leq 0.05)$ y valores pequeños de n $(n \leq 20)$, la cobertura de Score se aleja del valor nominal. A partir de $n \geq 30$ y $p \geq 0.10$, Score tiene muy buen desempeño tanto en cobertura de probabilidad y también en su longitud.

Por tanto, de los 4 métodos comparados, los intervalos de Score y de Chen resultaron ser los mejores métodos. Ambos reportan un nivel de confianza estimado muy cercano al valor nominal. Aunque Score es el que tiene un nivel estimado más cercano al nivel nominal de confianza.

CAPÍTULO 6. LITERATURA CITADA

Agresti, A. and Coull, B. A. (1998). “Aproximate is better than “exact” for interval estimation of binomial proportions”, Amer. Statist. 52.

Blyth, C. R. and Still, H.A. (1983), “Binomial Confidence Intervals”, Journal of the American Statistical Association, 78, 108-116.

Brown, L.D., CAI, T. and DASGUPTA, A. (2000). “Confidence intervals for a Binomial proportion and asymptotic expansions”, Ann. Statist to appear.

Casella, G. y Berger, R. L. (2002). Statistical inference. Wadsworth & Brooks/cole, Belmont, CA.

Chen, H. (1990) “The Accuracy of Approximate Intervals for a Binomial Parameter”, Journal of the American Statistical Association, 85.

Jin, S., Thulin, M. & Larsson, R. (2017), “Approximate bayesianity of frequentist confidence intervals for a binomial proportion”, The Am. Stat, 71, 106-111

Lott, A. y Reiter, J. P. (2018), “Wilson Confidence Intervals for Binomial Proportions with Multiple Imputation for Missing Data”, The American Statistician,74:2, 109-115

Mood, A. M, Graybill, F.A. y Boes, D.C. (1974). Introduction to the theory of statistics, Third Edition. McGraw-Hill Kogasakua, Ltd: Tokyo.

Santner, T.J. (1998). “A note on teaching binomial confidence intervals”. Teaching Statistics, 20, 20-23.

Schilling, M. and Doi, J. (2014), "A Coverage Probability Approach to Finding an Optimal Binomial Confidence Procedure," The American Statistician, 68, 133-145.

Wang, W. (2006), “Smallest Confidence Intervals for One Binomial Proportion,” Journal of Statistical Planning and Inference, 136, 4293–4306.

Wang, W. (2018) “A “Paradox” in Confidence Interval Construction Using Sufficient Statistics”, The American Statistician, 72:4, 315-320.