



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN
EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

POSTGRADO EN SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA

**UNA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE
PARA SERIES DE TIEMPO**

ENRIQUE RIVERA CASTILLO

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MÉXICO
2017

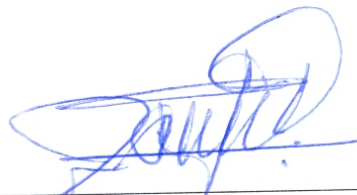
CARTA DE CONSENTIMIENTO DE USO DE LOS DERECHOS DE AUTOR Y DE LAS REGALIAS COMERCIALES DE PRODUCTOS DE INVESTIGACIÓN

En adición al beneficio ético, moral y académico que he obtenido durante mis estudios en el Colegio de Postgraduados, el que suscribe **Enrique Rivera Castillo**, alumno de esta Institución, estoy de acuerdo en ser participe de las regalías económicas y/o académicas, de procedencia nacional e internacional, que se deriven del trabajo de investigación que realicé en esta Institución, bajo la dirección del Profesor **Dr. José A. Villaseñor Alva**, por lo que otorgo los derechos de autor de mi tesis **Una prueba de bondad de ajuste para series de tiempo**, y de los productos de dicha investigación al Colegio de Postgraduado. Las patentes y secretos industriales que se puedan derivar serán registrados a nombre del Colegio de Postgraduados y las regalías económicas que se deriven serán distribuidas entre la Institución, El Consejero o Director de Tesis y el que suscribe, de acuerdo a las negociaciones entre las tres partes, por ello me comprometo a no realizar ninguna acción que dañe el proceso de explotación comercial de dichos productos a favor de esta Institución.

Montecillo, Mpio. de Texcoco, Edo. de México, a 24 de julio de 2017



Firma del
Alumno (a)



Vo. Bo. del Consejero o Director de Tesis

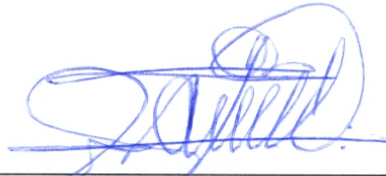
La presente tesis titulada: **Una prueba de bondad de ajuste para series de tiempo**, realizada por el alumno: **Enrique Rivera Castillo**, bajo la dirección del Consejo Particular indicado ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS

SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA ESTADÍSTICA

CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERO



Dr. José A. Villaseñor Alva

ASESORA



Dra. Elizabeth González Estrada

ASESOR



Dr. Sergio Pérez Elizalde

ASESOR



Dr. Gabriel A. Rodríguez Yam

ASESOR



Dr. Gerardo H. Terrazas González

Montecillo, Texcoco, Estado de México, julio de 2017

UNA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE PARA SERIES DE TIEMPO

Enrique Rivera Castillo, Dr.

Colegio de Postgraduados, 2017

RESUMEN

En este trabajo se propone una prueba de ajuste para procesos gaussianos $ARMA(p,q)$, la cual está basada en una transformación de los datos observados en el tiempo y en una extensión de la prueba de Shapiro-Wilk para probar normalidad. Se implementa un estudio de simulación Monte Carlo para analizar las propiedades estadísticas de la prueba. Los resultados revelan que la prueba propuesta tiene un mejor desempeño, en algunos casos, que las pruebas de portmanteau reportadas en la literatura.

Asimismo, se presenta como trabajo complementario dos pruebas de ajuste cuyo estadístico de prueba corresponde a una razón de estimadores de la varianza, estas pruebas fueron diseñadas desde el análisis en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia respectivamente. Sus propiedades se sustentan mediante un estudio de simulación Monte Carlo.

Palabras clave: Prueba de bondad de ajuste, modelos de covarianza estacionaria, modelos $ARMA(p,q)$, simulación Monte Carlo.

A TIME SERIES GOODNESS OF FIT TEST

Enrique Rivera Castillo, Dr.

Colegio de Postgraduados, 2017

ABSTRACT

In this work a test of fit for Gaussian ARMA(p,q) processes is proposed, its statistic is based on a transformation of observed data in time and an extension of the Shapiro-Wilk test for normality. A Monte Carlo procedure to analyze the statistical properties of the test is implemented. Results reveal that the proposed test has better performance than other portmanteau tests reported.

As previous work, there are also present two tests based on a variance estimators ratio, those tests were built under both, time and frequency domain. Their advantages and limitations are concluded from a Monte Carlo simulation study.

Key words: Goodness of fit, covariance stationary models, ARMA(p,q) models, Monte Carlo simulation.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de posgrado.

Al Colegio de Postgraduados, por haberme recibido como estudiante y a su cuerpo docente por dirigir atinadamente mi formación académica.

DEDICATORIA

A mi madre, hermanos e hijo.

CONTENIDO

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	3
1.1.1. Objetivo general	3
1.1.2. Objetivos particulares	3
2. Fundamentos teóricos	4
2.1. Series de tiempo de covarianza estacionaria	4
2.1.1. Tipos de estacionariedad	4
2.2. Funciones de autocovarianza y autocorrelación	6
2.2.1. Algunas propiedades de la función de autocovarianza	7
2.2.2. La relación de la función de autocorrelación y la densidad espectral	7
2.2.3. Función de covarianza muestral	8
2.3. Procesos autorregresivos de orden p	9
2.3.1. Condiciones de estacionariedad de los procesos autorregresivos	10
2.3.2. Autocovarianza de los procesos autorregresivos	12
2.4. Procesos de promedios móviles de orden q	14
2.4.1. Propiedades del proceso MA(1)	14

CONTENIDO

2.4.2.	Propiedades de los procesos $MA(q)$	15
2.5.	Procesos $ARMA(p,q)$	17
2.5.1.	Condiciones de estacionariedad de un proceso $ARMA(p,q)$	17
2.5.2.	Autocovarianza de un proceso $ARMA(p,q)$	18
2.6.	Función de densidad espectral	18
2.6.1.	Densidad espectral de un proceso gaussiano de ruido blanco	21
2.6.2.	Densidad espectral de un proceso $AR(1)$	21
2.6.3.	Función de densidad espectral de un proceso $AR(2)$ y $AR(p)$	23
2.7.	El periodograma	25
2.8.	Pruebas de hipótesis	26
2.8.1.	Pruebas de bondad de ajuste	27
3.	Pruebas de Bondad de Ajuste para series de covarianza estacionaria	28
3.1.	Pruebas de bondad de ajuste para series de tiempo	28
3.2.	Pruebas en el dominio del tiempo	29
3.2.1.	Prueba de Box y Pierce	29
3.2.2.	Prueba de Ljung y Box	30
3.2.3.	Prueba de McLeod–Li	31
3.2.4.	Prueba de Monti	32
3.2.5.	Prueba de Peña–Rodríguez	32
3.2.6.	Modificación de Lin y McLeod	33
3.2.7.	Prueba de varianza generalizada G_v	34
3.3.	Pruebas en el dominio de la frecuencia	35

CONTENIDO

3.3.1. Prueba de Anderson	35
3.3.2. Prueba con base en residuales	36
3.3.3. Prueba de razón de verosimilitud generalizada	37
3.3.4. Prueba de Paparoditis	39
4. Pruebas de bondad de ajuste basadas en una razón de varianzas	41
4.1. Una prueba propuesta en el dominio de la frecuencia	41
4.2. Prueba para un proceso AR(1)	43
4.2.1. Distribución del estadístico de prueba	43
4.2.2. Tamaño estimado de la prueba	45
4.2.3. Potencia estimada de la prueba	48
4.2.4. Consideraciones respecto de la prueba R_n	50
4.3. Prueba con base en la razón de la varianza de los residuales	51
4.3.1. Distribución del estadístico de prueba	51
4.3.2. Potencia estimada de la prueba	52
5. Prueba de ajuste para procesos gaussianos ARMA(p,q)	55
5.1. Materiales y métodos	55
5.1.1. La transformación de los datos	56
5.1.2. Prueba de Shapiro-Wilk para normalidad	58
5.2. El estadístico de prueba	59
5.2.1. Aproximación de las constantes críticas	60
5.3. Prueba de ajuste para un proceso AR(1)	60
5.3.1. Resultados	61

CONTENIDO

5.3.2. Potencia estimada de la prueba	64
5.4. Prueba de ajuste para un proceso AR(2)	69
5.4.1. Resultados	70
5.4.2. Potencia estimada de la prueba	71
5.5. Una aplicación: registros diarios de precipitación pluvial	76
6. Conclusiones	81

LISTA DE TABLAS

4.1. Tamaño estimado de la prueba R_n bajo H_0 con $\alpha = 0.05$, para diferentes tamaños de muestra n , $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, $k = 1000$ réplicas Monte Carlo, $m = 2000$ remuestreos y diferentes valores para el coeficiente autorregresivo ϕ	47
4.2. Potencia estimada de la prueba R_n contra un proceso AR(2) como alternativa con $\alpha = 0.05$, $k = 100$ réplicas Monte Carlo y $M = 1000$ muestras bootstrap, $n = 200, 300$ y 500 , $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, y diferentes valores para los coeficientes ϕ_1 y ϕ_2	49
4.3. Tamaño estimado de la prueba U_n frente a un proceso AR(2) como alternativa y tamaño de prueba $\alpha = 0.05$, para diferentes tamaños de muestra $n = 100, 250$ y 500 ; $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, $\phi_1 = 0.1$ y diferentes valores para el coeficiente autorregresivo ϕ_2	53
5.1. Constantes críticas para la prueba W_n , considerando diferentes tamaños de muestra n y diferentes tamaños de prueba α	61
5.2. Constantes críticas aproximadas para W_n bajo H_0 , con diferentes valores de ϕ , tamaño de muestra $n = 50$ y diferentes tamaños de prueba α	62
5.3. Constantes críticas aproximadas de W_n bajo H_0 con diferentes valores de ϕ , con tamaño de muestra $n = 150$ y diferentes tamaños de prueba α	63
5.4. Potencia estimada de las pruebas W_n , Q_{LB} y Gv versus procesos AR(2) con diferentes valores de ϕ_2 y $\phi_1 = 0.1$, para diferentes tamaños de muestra y $\alpha = 0.05$	66
5.5. Potencia estimada de las pruebas W_n y Gv versus procesos AR(2) para diferentes valores de ϕ_2 y $\phi_1 = 0.1$, $n = 50$ y ε_t distribuido T con 3, 5 y 7 grados de libertad, Laplace(0, 1), Laplace(0, 4) y Gumbel(0, 4).	67

LISTA DE TABLAS

5.6. Potencia estimada de las pruebas W_n y Gv versus procesos AR(2) para diferentes valores de ϕ_2 y $\phi_1 = 0.1$, $n = 250$ y ε_t distribuido T con 3, 5 y 7 grados de libertad, Laplace(0, 1), Laplace(0, 4) y Gumbel(0, 4). . .	68
5.7. Constantes críticas para W_n para un proceso AR(2) bajo H_0 , considerando diferentes tamaños de muestra n y diferentes tamaños de prueba α	70
5.8. Constantes críticas aproximadas de W_n bajo H_0 con $\phi_1 = 0.1$, diferentes valores de ϕ_2 , con tamaño de muestra $n = 250$ y diferentes tamaños de prueba α	70
5.9. Potencia estimada de las pruebas W_n y Gv versus procesos ARMA(1,1) para diferentes valores de θ_1 y $\phi_1 = 0.1$, ε_t distribuidos T con 3 grados de libertad, diferentes tamaños de muestra y $\alpha = 0.05$	73
5.10. Potencia estimada de la prueba W_n versus procesos MA(1,1) con ε_t distribuido T con 4 grados de libertad y Laplace(0,4), para diferentes valores de $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 \in [-1, 1]$, diferentes tamaños de muestra y $\alpha = 0.05$	74
5.11. Potencia estimada de la prueba Gv versus procesos MA(1,1) con ε_t distribuido T con 4 grados de libertad y Laplace(0,4), para diferentes valores de $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 \in [-1, 1]$, diferentes tamaños de muestra y $\alpha = 0.05$	75
5.12. Constantes críticas para W_n bajo H_0 con tamaño de muestra $n = 100$ y diferentes tamaños de prueba α	78

LISTA DE FIGURAS

2.1.	Densidad espectral de un proceso AR(1) con coeficiente autorregresivo $\phi = 0.9$ y $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$	22
2.2.	Densidad espectral de un proceso AR(2) con coeficiente autorregresivo $\phi_1 = 0.5$ y $\phi_2 = -0.4$ y con errores $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$	24
4.1.	Densidad de R_n bajo H_0 con $\phi = 0.8$, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, tamaño de muestra $n = 200$ y $m = 1000$ muestras bootstrap.	45
4.2.	Potencia estimada de la prueba R_n contra un proceso AR(2) como alternativa con $\alpha = 0.05$, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, $n = 500$, , diferentes valores de los coeficientes de autorregresión ϕ_1 y ϕ_2	50
4.3.	Función de densidad del estadístico U_n bajo H_0 con $\phi_1 = 0.85$, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ y $m = 5000$	54
5.1.	Función de densidad de W_n bajo H_0 , con diferentes valores de ϕ y tamaño de muestra $n = 50$	62
5.2.	Función de densidad de W_n bajo H_0 , con diferentes valores de ϕ y tamaño de muestra $n = 150$	63
5.3.	Función de densidad del estadístico W_n bajo H_0 para $n = 250$ observaciones de un proceso AR(2) con coeficientes de regresión $\phi_1 = 0.1$ y $\phi_2 = -0.07, -0.65$ y 0.65 respectivamente.	71
5.4.	Registros diarios de precipitación pluvial registrados en el periodo junio–septiembre de 2008, con una diferencia.	77
5.5.	Función de autocorrelaciones de los residuales del proceso ajustado.	79

LISTA DE FIGURAS

5.6. Función de autocorrelaciones parciales de los residuales del proceso ajustado.	79
5.7. Función de autocorrelaciones parciales de los residuales del proceso ajustado.	80
5.8. Gráfica Q-Q norm de los residuales del proceso ajustado.	80

Capítulo 1

Introducción

Existe una gran variedad de fenómenos físicos, naturales, financieros, económicos, entre otros que, por su naturaleza, hacen factible la colección de conjuntos de datos los cuales se caracterizan por haber sido observados en diferentes momentos en el tiempo. El tratamiento de dichos datos, al mantener una estructura de dependencia temporal, requiere la implementación de la metodología conocida como el análisis estadístico de series de tiempo.

En términos generales, una *serie de tiempo* se define como una sucesión ordenada de observaciones x_t con $t \in T$ las cuales a su vez evolucionan en el tiempo T de acuerdo con las leyes probabilísticas (Guerrero, 2003). En este sentido cada una de las observaciones x_t proviene o es una realización de cierta variable aleatoria X_t perteneciente a un proceso estocástico determinado.

Por lo general, el análisis estadístico de una serie de tiempo involucra tres etapas importantes: *identificación*, *estimación* y *diagnóstico*, de las cuales se obtiene como resultado un modelo que describe al conjunto de datos observados y que puede ser empleado principalmente con fines predictivos (Box y Jenkins, 1970). De ahí que la forma de determinar cuál es el modelo más apropiado para describir un conjunto de observaciones en el tiempo, es una tarea de relevancia.

Para determinar si un modelo describe apropiadamente la estructura de correlación de un conjunto de datos observados en el tiempo, se han propuesto tanto criterios de naturaleza determinística como pruebas de bondad de ajuste. Dentro de los criterios deterministas está el criterio de información de Akaike (*AIC*), que se define en términos de la *log verosimilitud* y el número de parámetros del modelo propuesto, o en su caso, puede utilizarse como criterio de decisión la versión bayesiana conocida como el

1. Introducción

criterio de información bayesiana (*BIC*).

En lo que respecta a las pruebas de bondad de ajuste, estas han sido formuladas con base en las propiedades estadísticas de los residuales del modelo ajustado o con base en la estructura de dependencia que caracterizan al modelo propuesto.

La estructura de dependencia de una serie de tiempo está bien definida en términos de la función de autocovarianza o de la función de autocorrelación, estas dos funciones tienen una representación equivalente en términos del análisis espectral de una serie de tiempo. En este sentido, en este trabajo de investigación se indagó sobre dicha relación con la finalidad de proponer una prueba de ajuste para modelos ARMA(p,q), cuyo estadístico de prueba corresponde a una razón de varianzas. Por otro lado, se considera la estructura de dependencia de un modelo propuesto bajo la hipótesis nula y se utiliza para transformar al conjunto original de observaciones $\{X_t\}$ de modo que, como resultado de esa transformación se tenga un conjunto de datos independientes y normalmente distribuidos.

El presente documento se ha organizado de la siguiente manera. En el segundo capítulo se muestran las características de estos modelos de series de tiempo. En el capítulo tercero se presenta una revisión de la literatura de las pruebas de bondad de ajuste reportadas en los dos diferentes tipos de análisis: en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, sus características y ventajas respecto a otras pruebas previamente propuestas. En el cuarto capítulo se argumentan y describen las pruebas propuestas a partir de una razón de estimadores de la varianza, asimismo en este capítulo se muestran el tamaño y potencia de las pruebas con base en simulación Monte Carlo. En el quinto capítulo, se presenta una prueba basada en una transformación de los datos con base en la estructura de correlación de un modelo propuesto bajo H_0 y en una modificación del estadístico de Shapiro-Wilk para normalidad, se analizan las propiedades de la prueba mediante un estudio de simulación Monte Carlo y se discuten sus ventajas respecto de otras pruebas reportadas en la literatura. Finalmente se concluye sobre este trabajo de investigación y se da la pauta para un trabajo futuro.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

Proponer una prueba de bondad de ajuste para series de tiempo de covarianza estacionaria con base en su estructura de correlación y las propiedades estadísticas de los residuales del modelo ajustado.

1.1.2. Objetivos particulares

- Realizar una revisión del estado del arte de las pruebas de bondad de ajuste propuestas bajo el análisis del dominio del tiempo y de la frecuencia respectivamente.
- Proponer una prueba de ajuste para procesos ARMA(p,q) de series de tiempo de covarianza estacionaria.
- Implementar un algoritmo de simulación Monte Carlo para estudiar las propiedades estadísticas de la prueba propuesta.
- Presentar un comparativo de la prueba propuesta respecto de otras pruebas reportadas en la literatura.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Las pruebas de bondad de ajuste para un modelo paramétrico de series de tiempo, en su mayoría, están sustentadas en los supuestos de covarianza estacionaria y la distribución normal de los errores, incluso la metodología de [Box y Jenkins \(1970\)](#) utiliza estos supuestos para la construcción de los procesos ARMA(p,q). Las pruebas que se proponen en este trabajo utilizan, de alguna forma, el ajuste de un proceso lineal a un conjunto de datos. En consecuencia, se describen algunos de los fundamentos teóricos de este tipo de procesos y de las pruebas de bondad de ajuste.

2.1. Series de tiempo de covarianza estacionaria

El análisis estadístico de series de tiempo se enfoca a problemas en los cuales las observaciones han sido registradas en intervalos regulares en el tiempo y consecuentemente entre dichas observaciones existe una estructura de correlación que los determina. Una forma de describir una serie de tiempo es mediante la descomposición de los cuatro elementos que la forman: tendencia, componente estacional, variaciones cíclicas y fluctuaciones aleatorias o sistemáticas.

2.1.1. Tipos de estacionariedad

El análisis de series de tiempo propuesto por [Box y Jenkins \(1970\)](#) es aplicable a aquellos modelos que son estacionarios ([Pankratz, 2009](#)). Considerando el hecho de que una serie de tiempo es una colección o un conjunto de variables aleatorias indexadas en el tiempo, si se da el caso de que dicho conjunto contiene solamente un elemento, entonces se estará haciendo referencia a un proceso estocástico con una sola variable aleatoria de la cual se pueden conocer todas sus características y propiedades proba-

2.1. Series de tiempo de covarianza estacionaria

bilísticas a partir de su función de distribución. En cambio, para procesos estocásticos con más de una variable aleatoria se requiere considerar la función de distribución conjunta misma que, para un conjunto finito de n variables $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ indexadas por $t \in T$, se define de la forma siguiente:

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = P\{\omega : X(t_1, \omega) \leq x_{t_1}, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_{t_n}\}$$

Con base en lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1 *Una serie de tiempo se dice que es estacionaria en el sentido estricto o estrictamente estacionaria si se cumple que:*

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = F_{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$$

La igualdad anterior se debe cumplir para todos los posibles conjuntos de índices t_1, t_2, \dots, t_n y $t_{1+h}, t_{2+h}, \dots, t_{n+h}$ en el conjunto de índices y todas las observaciones $\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}\}$ en el rango de la variable aleatoria X_t .

En otras palabras, si una serie de tiempo es *estrictamente estacionaria*, la función de distribución de la variable aleatoria es la misma en cada uno de los puntos del conjunto indexado, más aún, la función de distribución conjunta depende únicamente de la distancia entre los elementos del conjunto de índices y no de sus valores actuales.

En la mayoría de las aplicaciones, la forma de la distribución no es conocida, por lo que se requiere determinar sus dos primeros momentos dando lugar a las series de tiempo conocidas como series *débilmente estacionarias* o series *estacionarias de segundo orden* (Shumway y Stoffer, 2010).

Definición 2.2 *Se dice que una serie de tiempo es estacionaria de segundo orden o débilmente estacionaria si cumple con dos características importantes:*

1. $E[X_t]$ es constante para toda $t \in T$.
2. La matriz de covarianza de $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ es la misma que la matriz de covarianza de $\{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}\}$ para todo conjunto finito no vacío de índices $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ y para toda h tales que $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{1+h}, t_{2+h}, \dots, t_{n+h}$ están contenidos en el conjunto de índices.

2.2. Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Ya que $E[X_t]$ se considera constante, es conveniente igualarlo a cero. Por otro lado, la matriz de covarianza, por definición, es una función únicamente de la distancia entre las observaciones, lo cual quiere decir que la covarianza de X_{t+h} y X_t depende únicamente de la distancia h y considerando $E[X_t] = 0$, se puede expresar mediante la siguiente igualdad:

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E[X_t X_{t+h}] = \gamma_X(h) \quad (2.1)$$

A $\gamma_X(h)$ se le conoce como la *autocovarianza* de $\{X_t\}$, consecuentemente a las series de tiempo que cumplen con la definición 2.2 se les conoce también como series de *covarianza estacionaria* (Shumway y Stoffer, 2010).

2.2. Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Cuando se trabaja con un número finito de variables aleatorias, es útil calcular la matriz de covarianzas con la finalidad de conocer la existencia de dependencia entre dichas variables. En una serie de tiempo $\{X_t\}$ con $t \in T$, al estar correlacionada, se utiliza el concepto de función de *autocovarianza* para indagar el proceso a partir del cual ha sido generada.

Definición 2.3 Si $\{X_t\}, t \in T$ es un proceso con varianza finita, entonces la función de autocovarianza $\gamma_X(\cdot)$ de $\{X_t\}$ se define como:

$$\gamma_X(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - EX_r)(X_s - EX_s)], \quad (2.2)$$

con r, s en T .

Para comparar las propiedades básicas de una serie de tiempo, es útil contar con una función que no esté influenciada por sus unidades de medida, con esta finalidad se establece la función de autocorrelación, que se expresa de la forma siguiente:

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(t, t+h)}{\sqrt{\gamma_X(t+h, t+h)\gamma_X(t, t)}} = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \quad (2.3)$$

2.2. Funciones de autocovarianza y autocorrelación

2.2.1. Algunas propiedades de la función de autocovarianza

Con base en 2.3, la función de autocorrelación es la función de autocovarianza normalizada a 1 cuando $h = 0$. Para el caso particular de una serie de tiempo estacionaria se cumple que la función de covarianza es *semidefinida positiva*, es decir:

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n a_j X_{t_j} \right) &= E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k X_{t_j} X_{t_k} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma_X(t_j - t_k) \end{aligned}$$

Otra propiedad importante de la función de covarianza es que, para una serie de covarianza estacionaria, se trata de una *función par*. Esto quiere decir que $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$, de forma tal que si se establece $t_0 = t_1 - h$, entonces:

$$\gamma_X(h) = E[X_{t_0} X_{t_0+h}] = E[X_{t_1-h} X_{t_1}] = \gamma_X(-h)$$

2.2.2. La relación de la función de autocorrelación y la densidad espectral

En el estudio de distribuciones, es importante conocer la función característica que se define de la siguiente manera:

$$\varphi(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixh} dG(x)$$

Siendo ésta una integral de Lebesgue-Stieltjes, en la que se cumple la siguiente relación de equivalencia:

$$e^{ixh} = \cos xh + i \operatorname{sen} xh$$

y $\varphi(h)$ satisface lo siguiente:

1. $\varphi(0) = 1$
2. $|\varphi(h)| \leq 1$ para toda $h \in (-\infty, \infty)$

2.2. Funciones de autocovarianza y autocorrelación

3. $\varphi(h)$ es uniformemente continua en $(-\infty, \infty)$

Se cumple que una función continua $\rho(h)$ con $\rho(0) = 1$ es una función característica si y sólo si es semidefinida positiva: En este sentido, se cumple que la función de correlación de una serie de tiempo estacionaria $\{X_t\}$ con $T = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ es representable de la forma (Fuller, 1976):

$$\rho(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixh} dG(x)$$

en donde $G(x)$ es una función de distribución cuya derivada se conoce como función de densidad espectral, la cual se detallará posteriormente.

2.2.3. Función de covarianza muestral

En situaciones prácticas, usualmente se desconoce el proceso a partir del cual se ha generado una serie de tiempo, y se cuenta solamente con un conjunto de observaciones $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Para establecer el grado de dependencia que existe entre las observaciones y poder determinar el proceso que los representa, se utiliza la función de autocovarianza (ACV) o, en su caso, la función de autocorrelación (ACF) (Brockwell y Davis, 1991).

La función de autocovarianza muestral se estima a partir de la siguiente expresión:

$$\hat{\gamma}_X(h) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_t - \bar{x})(x_{t+|h|} - \bar{x}), \quad -n < h < n \quad (2.4)$$

donde \bar{x} representa la media muestral de las observaciones.

Habiendo definido la función de covarianza muestral, la función de autocorrelación muestral se estima de forma directa, mediante la expresión:

$$\hat{\rho}_X(h) = \frac{\hat{\gamma}_X(h)}{\hat{\gamma}_X(0)}$$

Como se ha mencionado, la ACF juega un papel muy importante en la elección del modelo adecuado a partir de los datos observados $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Aunque, por

2.3. Procesos autorregresivos de orden p

lo general no es posible calcular la distribución de la estadística $\hat{\rho}_X(h)$ se puede aproximar a una distribución normal si el tamaño de muestra es grande.

Proposición 2.1. *Si X_t es i.i.d. con cuarto momento finito, entonces para n grande, la ACF muestral $\hat{\rho}_X(h)$ para $h = 1, \dots, H$, es aproximadamente normal centrada con desviación típica dada por:*

$$\sigma_{\hat{\rho}_X(h)} = \frac{1}{\sqrt{H}},$$

con H un valor arbitrario fijo. Con base en este resultado, se formula un método para establecer si los valores de $\hat{\rho}_X(h)$ son significativos, esto es determinando si sus valores pertenecen o no al intervalo $\pm 2/\sqrt{N}$. De esta forma, si la sucesión se distribuye como ruido blanco, entonces, aproximadamente el 0.95% de su ACF muestral debe caer dentro de dicho intervalo de confianza.

2.3. Procesos autorregresivos de orden p

El fundamento de los procesos autorregresivos de orden p , es que los valores actuales de una serie $\{X_t\}$ dependen fuertemente de los p valores previos denominados como: $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$, como se muestra a continuación:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

donde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son constantes ($\phi_p \neq 0$) y ε_t se distribuye como ruido blanco con media 0 y varianza σ^2 . La expresión 2.5 se puede expresar en términos de su operador autorregresivo de modo que se tiene:

$$\phi(B)X_t = \varepsilon_t$$

donde el operador de retardo se define como $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$. El valor de p determina el orden de dicho proceso. En aplicaciones prácticas, con fines interpretativos, es muy común que se utilicen los procesos autorregresivos de primer y segundo orden.

2.3. Procesos autorregresivos de orden p

2.3.1. Condiciones de estacionariedad de los procesos autorregresivos

Un proceso AR(p) es estacionario si las raíces de la ecuación característica:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

están fuera del círculo unitario o bien si el inverso de las raíces de $\phi(B)$ estén dentro del círculo unitario. Con esta condición se garantiza que el proceso $\phi_p(z)x_t = \varepsilon_t$ pueda escribirse de la forma $x_t = \phi_p(z)^{-1}\varepsilon_t$. Las condiciones de estacionariedad para los procesos AR(p), son las siguientes:

AR(1)

Un proceso autorregresivo de primer orden o AR(1) se define de la forma siguiente:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.6}$$

siendo su ecuación característica

$$1 - \phi(z) = 0$$

Un proceso de este tipo es estacionario si todas sus raíces permanecen fuera del círculo unitario incluyendo aquellas con valores complejos. Claramente, una de las raíces de la ecuación característica es $z = \frac{1}{\phi}$ y para que dicha raíz permanezca fuera del círculo unitario entonces se debe cumplir que $|z| > 1$ y de forma equivalente $|\phi| < 1$. Si una raíz es menor o igual que uno se le nombra como raíz unitaria, entonces si al menos se tiene una raíz unitaria o si alguna de las raíces se ubica en el intervalo $(-1, 1)$, se dice que el proceso es no estacionario.

AR(2)

Un proceso autorregresivo de segundo orden es de la forma:

2.3. Procesos autorregresivos de orden p

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t, \quad (2.7)$$

para que este proceso sea estacionario, las raíces de la función característica:

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 \quad (2.8)$$

deben ser mayores que uno, esto sucede si los determinantes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\phi_2 \\ -\phi_2 & 1 \end{vmatrix}$$

y

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\phi_2 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & 1 & 0 & -\phi_2 \\ -\phi_2 & 0 & 1 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

son ambos positivos. D_1 es positivo si y sólo si $1 - \phi_2^2 > 0 \Leftrightarrow |\phi_2| < 1$ y D_2 será positivo si y sólo si la siguiente expresión es mayor que 0:

$$\begin{aligned} (1 + \phi_2) [(1 - \phi_1^2 - \phi_2)(1 - \phi_2^2)\phi_1^2\phi_2(1 + \phi_2)] &> 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \phi_1^2 - \phi_2)(1 - \phi_2^2) &> \phi_1^2\phi_2(1 + \phi_2) \\ \Leftrightarrow \phi_1 < \pm(1 - \phi_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

factorizando $\phi^3 - \phi_2^2 - \phi_2 + 1 = (1 + \phi_2)(1 - \phi_2)^2$ se obtienen las condiciones de estacionariedad a partir de 2.8 y 2.9 esto es $|\phi_2| < 1$, $\phi_2 + \phi_1 < 1$ y $\phi_2 - \phi_1 < 1$ (Marmol, 1995).

Las condiciones de estacionariedad no son fácilmente establecidas para un proceso AR(p) con $p > 2$, por tal razón se plantea una condición general de estacionariedad necesaria pero no suficiente (Pankratz, 2009).

$$\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p < 1$$

2.3. Procesos autorregresivos de orden p

2.3.2. Autocovarianza de los procesos autorregresivos

Autocovarianza de un proceso AR(1)

La covarianza de un proceso estacionario de segundo orden depende solamente del número de retrasos o lags considerado, de modo que para un proceso AR(1) se tiene la siguiente expresión:

$$\gamma_X(h) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h}))] \quad (2.10)$$

Sin embargo, por la condición de covarianza estacionaria $E[X_t] = E[X_{t-h}] = 0$, entonces la igualdad 2.10 se puede expresar como:

$$\gamma_X(h) = E[X_t X_{t-h}]$$

Si $h = 0$, entonces se tiene la varianza del proceso.

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= E[X_t X_t] = E[\phi X_{t-1} + \varepsilon_t]^2 \\ &= E[\phi^2 X_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + 2\phi X_{t-1} \varepsilon_t] \\ &= \phi^2 E[X_{t-1}^2] + E[\varepsilon_t^2] + 2\phi E[X_{t-1} \varepsilon_t] \\ &= \phi^2 \gamma_X(0) + \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{despejando se obtiene:} \end{aligned}$$

$$\gamma_X(0) = \frac{1}{1 - \phi^2} \sigma_\varepsilon^2$$

La autocovarianza de orden 1 se calcula de manera similar:

$$\begin{aligned} \gamma_X(1) &= E[X_t X_{t-1}] \\ &= E[(\phi X_{t-1} + \varepsilon_t) X_{t-1}] \\ &= \phi E[X_{t-1} X_{t-1}] + E[\varepsilon_t X_{t-1}] \\ &= \phi \gamma_X(0) \end{aligned}$$

2.3. Procesos autorregresivos de orden p

La autocovarianza de orden 2 se determina de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= E[X_t X_{t-2}] \\ &= E[(\phi X_{t-1} + \varepsilon_t) X_{t-2}] \\ &= \phi E[X_{t-1} X_{t-2}] + E[\varepsilon_t X_{t-2}] \\ &= \phi \gamma_X(1) = \phi(\phi \gamma_X(0)) = \phi^2 \gamma_X(0)\end{aligned}$$

De modo que, en términos generales:

$$\gamma_X(h) = \phi^h \gamma_X(0) \quad (2.11)$$

Autocovarianza de un proceso AR(2)

Para un proceso autorregresivo de segundo orden definido en 2.7, asumiendo que es estacionario, la varianza se expresa de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_X(0) &= E[X_t X_t] \\ &= E[(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t) X_t] \\ &= \phi_1 E[X_{t-1} X_t] + \phi_2 E[X_{t-2} X_t] + E[\varepsilon_t X_t] \\ &= \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(2) + \sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

La autocovarianza de primer orden está dada de la forma:

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= E[X_t X_{t-1}] \\ &= E[(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t) X_{t-1}] \\ &= \phi_1 E[X_{t-1} X_{t-1}] + \phi_2 E[X_{t-2} X_{t-1}] + E[\varepsilon_t X_{t-1}] \\ &= \phi_1 \gamma_X(0) + \phi_2 \gamma_X(1)\end{aligned}$$

La autocovarianza de segundo orden está dada de la forma:

$$\begin{aligned}\gamma_X(2) &= E[X_t X_{t-2}] \\ &= E[(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t) X_{t-2}] \\ &= \phi_1 E[X_{t-1} X_{t-2}] + \phi_2 E[X_{t-2} X_{t-2}] + E[\varepsilon_t X_{t-2}] \\ &= \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(0)\end{aligned}$$

De este modo, en términos generales:

2.4. Procesos de promedios móviles de orden q

$$\gamma_X(h) = \phi_1 \gamma_X(h-1) + \phi_2 \gamma_X(h-2)$$

Autocovarianza de un proceso AR(p)

Siguiendo un razonamiento similar al de los procesos AR(1) y AR(2), para calcular la autocovarianza de un proceso AR(p), se tiene que:

$$\gamma_X(0) = \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(2) + \dots + \phi_p \gamma_X(p) + \sigma_\varepsilon^2$$

y

$$\gamma_X(j) = \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(2) + \dots + \phi_p \gamma_X(j-p)$$

para $j = 1, \dots, p$

2.4. Procesos de promedios móviles de orden q

Dado un proceso ARMA(p, q) con $p = 0$, se tiene un modelo de promedios móviles conocido como MA(q), su representación general es la que se muestra a continuación:

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.12)$$

En este modelo se cumple que ε_t se comporta como un proceso de ruido blanco.

2.4.1. Propiedades del proceso MA(1)

Como en el caso de los procesos autorregresivos, se plantea en primer lugar un proceso de promedios móviles de primer orden, el cual se representa de la forma siguiente:

$$X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \quad (2.13)$$

La condición de covarianza estacionaria se debe cumplir tanto en media como en

2.4. Procesos de promedios móviles de orden q

varianza, en el caso de la estacionariedad en media se debe cumplir que $E[X_t]$ no sea una función del tiempo y que además $E[X_t]$ debe ser finita y determinada, en este caso de 2.13, se tiene:

$$E[X_t] = E[\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}]$$

y se cumple que $E[\varepsilon_t] = 0$.

La varianza de este proceso se determina de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_X(0) &= E[X_t X_t] \\ &= E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})^2] \\ &= E[\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + 0 + \theta^2\sigma_\varepsilon^2 \\ &= (1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

La autocovarianza de orden 1, se obtiene como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= E[X_t X_{t-1}] \\ &= E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})] \\ &= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-1}^2 + \theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \theta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + 0 + \theta^2\sigma_\varepsilon^2 \\ &= \theta\sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

Las autocovarianzas de orden superior a 1 son todas iguales a 0, de modo que:

$$\gamma_X(j) = E[X_t X_{t-j}] = E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-j})(\varepsilon_{t-j} + \theta\varepsilon_{t-j-1})] = 0 \quad \forall j > 1$$

De lo anterior, se concluye que como las autocovarianzas no están en función del tiempo, un proceso MA(1) es de covarianza estacionaria independientemente del valor de θ .

2.4.2. Propiedades de los procesos MA(q)

Con base en las características de los procesos definidos en 2.12, la media de un proceso MA(q) se define de la forma siguiente:

2.4. Procesos de promedios móviles de orden q

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q}] \\ &= E[\varepsilon_t] + \theta_1E[\varepsilon_{t-1}] + \dots + \theta_qE[\varepsilon_q] = 0 \end{aligned}$$

Considerando que los errores ε_t no están correlacionados, la varianza está dada de la forma:

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= E[X_tX_t] \\ &= E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q})^2] \\ &= \sigma\varepsilon^2 + \theta_1\sigma\varepsilon^2 + \dots + \theta_q\sigma\varepsilon^2 \\ &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma\varepsilon^2 \end{aligned}$$

La autocovarianza para un proceso de orden $j = 1, \dots, q$, se obtiene como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \gamma_X(j) &= E[X_tX_{t-j}] \\ &= E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-j} + \theta_1\varepsilon_{t-j-1} + \theta_2\varepsilon_{t-j-2} + \dots \\ &\quad + \theta_q\varepsilon_{t-j-q})] \\ &= E[\theta_j\varepsilon_{t-j}^2 + \theta_{j+1}\theta_1\varepsilon_{t-j-1}^2 + \theta_{j-2}\theta_2\varepsilon_{t-j-2}^2 + \dots + \theta_q\theta_{q-j}\varepsilon_{t-q}^2], \end{aligned}$$

en donde se han eliminado aquellos términos cuyo valor esperado es 0. Observe que para $j > q$, no existen errores ε con subíndices comunes en la definición de $\gamma_X(h)$, por lo que el valor esperado es 0. Entonces:

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} (\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \theta_{j+2}\theta_2 + \dots + \theta_q\theta_{q-j})\sigma_\varepsilon^2 & \text{para } j = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{para } j > q. \end{cases}$$

Lo anterior quiere decir que un proceso MA(q) es de covarianza estacionaria independientemente de los valores de θ_j .

Con base en lo anterior, la función de autocovarianza para un proceso MA(2) es de la forma:

2.5. Procesos ARMA(p,q)

$$\begin{aligned}\gamma_X(0) &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_X(1) &= (\theta_1 + \theta_2\theta_1)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_X(2) &= \theta_2\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_X(3) &= \gamma_X(4) = \dots = 0.\end{aligned}$$

2.5. Procesos ARMA(p,q)

La estructura de dependencia de un proceso MA(q) se trunca después de un cierto periodo, en tanto que para un proceso AR(p) decae geoméricamente dependiendo de los coeficientes autorregresivos. En este sentido en un proceso ARMA(p,q), al estar compuesto de una parte autorregresiva y una parte de promedios móviles, se pueden deducir sus propiedades a partir de las de los procesos AR(p) y MA(q).

Un proceso ARMA(p,q), se expresa de la forma:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_2 X_{t-2} + \dots + \theta_q X_{t-q} \quad (2.14)$$

Con ε_t siendo un proceso de ruido blanco.

2.5.1. Condiciones de estacionariedad de un proceso AR-MA(p,q)

El proceso 2.14 puede expresarse mediante un polinomio en términos del operador de retraso, de modo que se tiene:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)X_t = (1 - \theta_1 B + \phi_2 \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q)\varepsilon_t.$$

Es de interés conocer cuándo las raíces del polinomio $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) = 0$ se ubican fuera del círculo unitario. Para esto, se define un polinomio de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\psi(B) &= (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)^{-1}(1 - \theta_1 B + \phi_2 \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) \\ &= \phi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots\end{aligned}$$

2.6. Función de densidad espectral

con $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j| < \infty$. Entonces:

$$X_t = \psi(B)\varepsilon_t \quad (2.15)$$

El proceso ARMA(p,q) representado de la forma 5.2 puede ser visto como un proceso MA(∞) con coeficiente $\psi(B)$ absolutamente sumable. Con base en lo anterior, la condición de covarianza de un proceso ARMA(p,q) depende fuertemente de los parámetros autorregresivos $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ en el sentido de que las raíces del polinomio $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) = 0$ se ubiquen fuera del círculo unitario.

2.5.2. Autocovarianza de un proceso ARMA(p,q)

Considerando el proceso definido en la expresión 2.14, para hallar la autocovarianza dado que $j > 0$, multiplicamos por X_{t-j} la expresión 2.14 y se calcula el valor esperado, resultando:

$$\begin{aligned} \gamma_X(j) &= E[Y_t Y_{t-j}] \\ &= \phi_1 E[X_{t-1} X_{t-j}] + \phi_2 E[X_{t-2} X_{t-j}] + \dots + \phi_p E[X_{t-p} X_{t-j}] \\ &\quad + E[X_{t-j} \varepsilon_t] + \theta_1 E[X_{t-j} \varepsilon_{t-1}] + \theta_2 E[X_{t-j} \varepsilon_{t-2}] + \dots + \theta_q E[X_{t-j} \varepsilon_{t-q}] \quad (2.16) \\ &= \phi_1 \gamma_X(j-1) + \phi_2 \gamma_X(j-2) + \dots + \phi_p \gamma_{j-p} \\ &\quad + E[X_{t-j} \varepsilon_t] + \theta_1 E[X_{t-j} \varepsilon_{t-1}] + \theta_2 E[X_{t-j} \varepsilon_{t-2}] + \dots + \theta_q E[X_{t-j} \varepsilon_{t-q}] \end{aligned}$$

Sin embargo, se ha mostrado que $(E[X_{t-j} \varepsilon_t] + \theta_1 E[X_{t-j} \varepsilon_{t-1}] + \theta_2 E[X_{t-j} \varepsilon_{t-2}] + \dots + \theta_q E[X_{t-j} \varepsilon_{t-q}]) = 0$ cuando $j > q$, entonces 2.16 indica que después de q retrasos, la función de autocovarianza sigue la p -ésima ecuación de diferencia gobernada por los coeficientes autorregresivos y la dificultad de hallar dicha función radica en la complejidad de los retrasos 1 a q . Para mayores detalles, referirse a [Brockwell y Davis \(1991\)](#).

2.6. Función de densidad espectral

La función de densidad espectral $f_X(\omega)$ depende fuertemente de las propiedades probabilísticas de un proceso particular y lo describe adecuadamente ([McKelvey, 2002](#)). Esta función de densidad es la transformada de Fourier de la función de autocovarianza establecida en la expresión 2.2 o con la función de autocorrelación ([Kay y](#)

2.6. Función de densidad espectral

Marple Jr, 1981). La función de densidad espectral y la función de autocovarianza están relacionadas de acuerdo con el teorema siguiente.

Teorema 2.1 Sea $\{X_t\}$ un proceso estacionario con parámetros continuos con media cero, con función de densidad espectral $f_{0X}(\omega)$, la cual existe para toda ω , y con función de autocovarianza $\gamma_X(h)$, entonces $f_{0X}(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\gamma_X(h)$.

$$f_{0X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega h} \gamma_X(h) dh \quad (2.17)$$

Demostración, ver Priestley (1981).

Como $\gamma_X(h)$ es una función continua, entonces es posible expresarla como la transformada inversa de Fourier de $f_{0X}(\omega)$, por lo que cobra sentido la igualdad:

$$\gamma_X(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega h} f_{0X}(\omega) d\omega \quad (2.18)$$

Para un proceso con observaciones que toman valores en el conjunto de los números reales, se ha mencionado que $\gamma_X(h)$ es una función par (Fuller, 1976) y considerando la igualdad de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, entonces la parte compleja de dicha igualdad se puede eliminar por lo que la ecuación 2.17 es equivalente a la expresión:

$$f_{0X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega h \gamma_X(h) dh$$

La función $f_{0X}(\omega)$, al derivarse de una función par, es también una función par, por lo tanto la expresión 2.18 es equivalente a:

$$\gamma_X(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega h f_{0X}(\omega) d\omega \quad (2.19)$$

Retomando la expresión 2.3, se tienen la función de densidad espectral normalizada $f_X(\omega)$ en términos de la función de autocorrelación $\rho_X(h)$ utilizando la igualdad:

$$f_X(\omega) = f_{0X}(\omega) / \sigma_X^2 \quad (2.20)$$

Misma que se interpreta de la forma siguiente (Priestley, 1981): *La densidad espectral*

2.6. Función de densidad espectral

normalizada es el promedio –sobre todas las realizaciones– de la proporción de la potencia total a partir de las frecuencias con componentes entre ω , $\omega + d\omega$, y se expresa como:

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega h} \rho_X(h) dh \quad (2.21)$$

La función de autocorrelación tiene propiedades estadísticas análogas a las de la función característica de una función de distribución ([Christiano y Vigfusson, 2003](#)). Es por esta razón que la función de distribución asociada a la función de autocorrelación provee una representación alternativa para datos provenientes de una serie de tiempo. Con base en lo anterior, en el dominio de la frecuencia, es de relevancia el teorema siguiente:

Teorema 2.2 *Sea una función de correlación $\rho_X(h)$ de una serie de tiempo estacionaria absolutamente sumable. Entonces, existe una función continua $f_X(\omega)$ tal que se cumplen las propiedades siguientes:*

1. $\rho_X(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\omega) \cos \omega h d\omega$.
2. $f_X(\omega) \geq 0$.
3. $\int_{-\pi}^{\pi} f_X(\omega) d\omega = 1$.
4. $f_X(\omega)$ es una función par.

Demostración, ver [Fuller \(1976\)](#).

Con base en la propiedad 1 del teorema 2.2 y considerando que la función de correlación de una serie de tiempo es análoga a la función característica de una función de distribución, se puede expresar como una integral de Lebesgue-Stieltjes:

$$\rho_X(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega h} f_X(\omega) d\omega$$

Con la característica de que si integramos $f_X(\omega)$ se obtiene una función de distribución estadística, que en este caso se conoce como espectro integrado normalizado, y se define de la forma siguiente:

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f_X(\theta) d\theta$$

2.6. Función de densidad espectral

Las funciones $f_{0X}(\omega)$ y $f_X(\omega)$ poseen características muy similares, sin embargo por su interpretación es más común que se utilice $f_X(\omega)$ en aplicaciones prácticas.

2.6.1. Densidad espectral de un proceso gaussiano de ruido blanco

Un proceso gaussiano de ruido blanco se define de la forma siguiente:

$$X_t \sim N(0, \sigma_w^2)$$

Cuya función de autocovarianza está definida de la forma siguiente:

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

En cuyo caso la densidad espectral se representa de la forma siguiente:

$$f_{0X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_X(h) \cos \omega h = \frac{\sigma^2}{\pi}$$

Lo cual indica que se trata de una función constante o que no presenta variación alguna para todo el conjunto de frecuencias.

2.6.2. Densidad espectral de un proceso $AR(1)$

Para un proceso autorregresivo de primer orden definido en la expresión 2.6, se cumple que (Priestley, 1981):

2.6. Función de densidad espectral

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \phi^r \cos r\omega \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} R \left\{ 1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} (\phi e^{i\omega})^r \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + R \left(\frac{\phi e^{i\omega}}{1 - \phi e^{i\omega}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \phi^2}{1 - 2\phi \cos(\omega) + \phi^2} \end{aligned}$$

De modo que su densidad espectral normalizada es:

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - 2\phi \cos(\omega) + \phi^2}$$

Esta función de densidad espectral es como se muestra en la Figura 2.1.

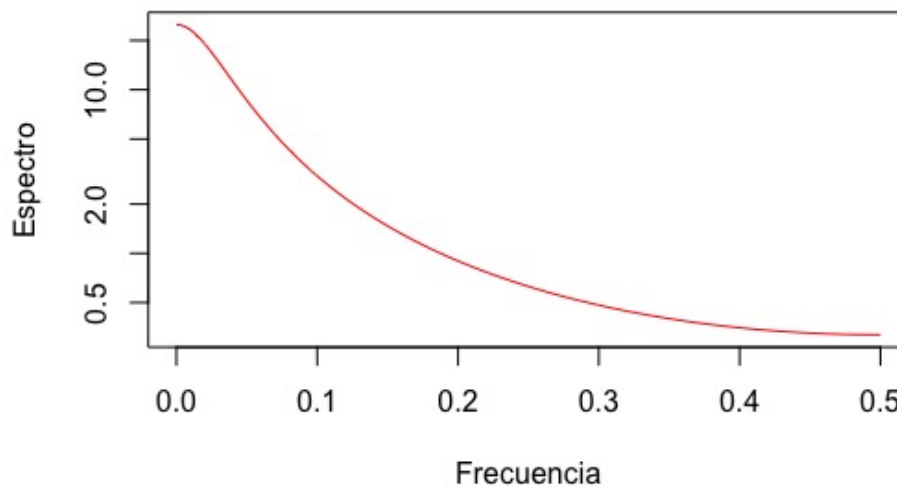


Figura 2.1: Densidad espectral de un proceso AR(1) con coeficiente autorregresivo $\phi = 0.9$ y $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

2.6. Función de densidad espectral

2.6.3. Función de densidad espectral de un proceso AR(2) y AR(p)

Para un proceso autorregresivo de segundo orden definido en 2.7, la función de densidad espectral estandarizada se calcula a partir de su función de autocorrelación:

$$\rho_X(h) = \frac{(1 - a_1^2)a_1^{|h|+1} - (1 - a_1^2)a_2^{|h|+1}}{(a_1 - a_2)(1 + a_1a_2)}$$

En donde a_1 y a_2 son las raíces del polinomio $a^2 + \phi_1a + \phi_2$. Sustituyendo este valor en 2.19 se obtiene:

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - a_2^2)a_1^{r+1} - (1 - a_1^2)a_2^{r+1}}{(a_1 - a_2)(1 + a_1a_2)} \right) \cos\omega h \right\}$$

Considerando que $(a_1 + a_2) = -\phi_1$ y $a_1a_2 = \phi_2$, y reduciendo términos se obtiene la función de densidad espectral en términos de la autocorrelación:

$$f_X(\omega) = \frac{(1 - \phi_2) [(1 + \phi_2)^2 - \phi_1^2]}{2\phi(1 + \phi_2) [(1 - \phi_2^2)^2 + \phi_1^2 + 2\phi_1(1 + \phi_2)\cos\omega + 4\phi_2\cos^2\omega]}$$

O considerando la función de autocovarianza, se expresa de la forma:

$$f_{0X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{[(1 - \phi_2^2)^2 + \phi_1^2 + 2\phi_1(1 + \phi_2)\cos\omega + 4\phi_2\cos^2\omega]}$$

La gráfica de la función de densidad espectral de un proceso AR(2), es como se muestra en la Figura 2.2.

En términos generales, para un proceso autorregresivo de orden p , definido en la expresión 2.5, su función de densidad espectral normalizada o en términos de la función de correlación es de la forma:

$$f_{0X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{|1 + \phi_1e^{-i\omega} + \dots + \phi_ke^{-ip\omega}|^2} \quad (2.22)$$

Los detalles se encuentran en Fuller (1976) o Priestley (1981).

2.6. Función de densidad espectral

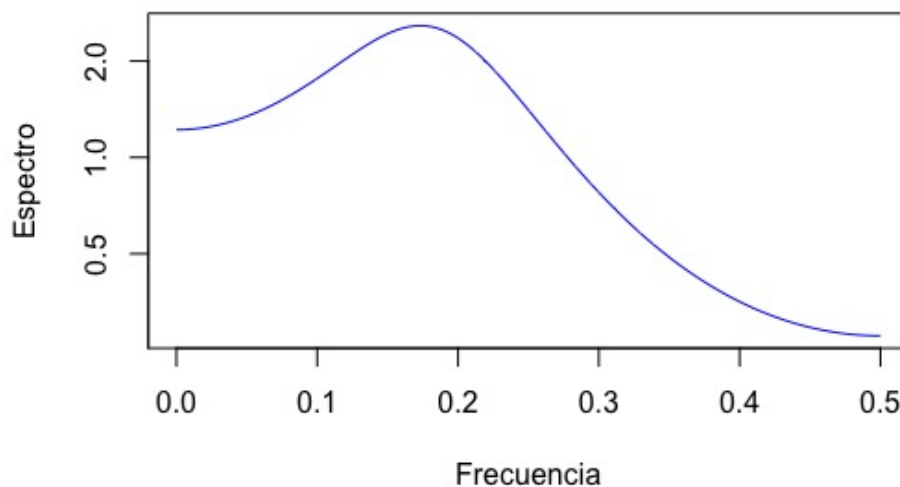


Figura 2.2: Densidad espectral de un proceso AR(2) con coeficiente autorregresivo $\phi_1 = 0.5$ y $\phi_2 = -0.4$ y con errores $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

Densidad espectral de un proceso de promedios móviles MA(q)

Un proceso de promedios móviles se define, en términos generales, de la forma 2.12. Con base en el hecho de que en dicho modelo $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ y la secuencia de coeficientes θ_j es absolutamente sumable, se llega a la densidad espectral en términos de la función de autocovarianza mediante la siguiente expresión (Fuller, 1976).

$$f_{0X} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{h=-q}^q \gamma_X(h) e^{-i\omega h} \right] \quad (2.23)$$

En la expresión 2.23 se sustituye el valor de la función de autocovarianza $\gamma_X(h)$ y se obtiene la ecuación que se muestra a continuación:

$$f_{0X}(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 1 + \theta_1 e^{-i\omega} + \dots + \theta_q e^{-iq\omega} \right|^2 \quad (2.24)$$

2.7. El periodograma

Densidad espectral de un proceso ARMA(p,q)

El proceso ARMA(p,q) incluye tanto a un proceso autorregresivo como a un proceso de promedios móviles, y se define de la forma 2.14, o de forma equivalente como $\phi(B)X_t\theta(B)\varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. La función de densidad espectral se obtiene a partir de la conjunción de la densidad espectral de un proceso autorregresivo y de uno de promedios móviles y se expresa como la forma resumida de 2.22 y 2.24 como el cociente de ambos procesos:

$$f_{0X} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\omega})|^2} \quad (2.25)$$

2.7. El periodograma

Se han propuesto muchas pruebas de bondad de ajuste para procesos ARMA(p,q) las cuales están basadas en una estimación no paramétrica de la densidad espectral conocido como periodograma y su distribución asintótica (Zhao-Guo y Hannan, 1980), (Dahlhaus *et al.*, 1996). Este estimador se calcula a partir de un conjunto de observaciones en el tiempo $\{X_t\}$, mediante la ecuación:

$$I_x = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega t} \right|^2 \quad (2.26)$$

El periodograma, aunque es un estimador asintóticamente insesgado no es un estimador consistente de la densidad espectral (Pinna *et al.*, 1996) y (Chen *et al.*, 2003). En este sentido se han propuesto varias técnicas de suavizamiento dentro de las cuales se tienen técnicas que analizan la serie de datos por segmentos o ventanas como la ventana rectangular, la ventana triangular o de Bartlett, la de Blackman-Tukey, de Parzen, entre otros que se han analizado en Brockwell y Davis (1991).

Se han reportado otras técnicas de suavizamiento las cuales se clasifican de la forma siguiente (Fan y Kreutzberger, 1998):

- Suavizamiento directamente de los datos, este suavizamiento utiliza un promedio local ponderado

$$\{(\omega_k, I^{(n)}(\omega_k)), k = 1, 2, \dots, [(n-1)/2]\}$$

2.8. Pruebas de hipótesis

- Suavizamiento sobre el *log*-periodograma vía el método de mínimos cuadrados, en este tipo de técnicas se han empleado también métodos de regresión no paramétrica como splines y algoritmos genéticos tal como se muestran en [Lee y Wong \(2003\)](#) y [Rosen y Stoffer \(2007\)](#); y el suavizamiento vía kernell el cual se detalla en [Lee \(1997\)](#) y [Lee \(2001\)](#), entre otros.
- Suavizamiento mediante la *Whittle*-verosimilitud del periodograma y sus modificaciones en [Pawitan y O'Sullivan \(1994\)](#).

2.8. Pruebas de hipótesis

El concepto de hipótesis estadística, de acuerdo con [Casella y Berger \(2002\)](#) y [Mood et al. \(1974\)](#), se formula de la siguiente manera:

Definición 2.4 *Una hipótesis estadística es una conjetura o aseveración acerca de la distribución de una o más variables aleatorias. En este sentido, si dicha aseveración se encuentra completamente especificada se llama hipótesis simple, en caso contrario se dice que se trata de una hipótesis compuesta.*

En sí, resulta de interés que dada una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n de $F(x; \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ y $m \geq 1$ se pruebe un juego de hipótesis mediante el cual se desea determinar si se rechaza o no se rechaza una hipótesis nula H_0 en favor de una hipótesis alternativa H_1 :

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega - \Omega_0 = \Omega_0^c$$

Con base en lo anterior, se dice que una *prueba de hipótesis* es una regla que especifica lo siguiente:

- Para qué valores de la muestra no se rechaza H_0 .
- Para qué valores de la muestra se rechaza H_0 en favor de H_1 .

La formulación de una prueba de hipótesis conlleva a un estadístico de prueba de la forma $W = \omega(X_1, \dots, X_n)$. En sí, si el conjunto Ψ representa todos los valores posibles de X , entonces una prueba de hipótesis es una partición de Ψ en dos conjuntos Ψ_A y Ψ_R que son disjuntos y cuya unión conforma a Ψ , de modo que una realización x de X es de forma tal que $x \in \Psi_A$ no se rechaza la hipótesis nula H_0 y si $x \in \Psi_R$

2.8. Pruebas de hipótesis

se rechaza H_0 , entonces a Ψ_A y Ψ_R se les llama regiones de aceptación y rechazo respectivamente (Casella y Berger, 2002).

Al probar un juego de hipótesis se puede dar lugar a dos tipos de errores:

- *Error tipo I.* Rechazar H_0 cuando de hecho es verdadera.
- *Error tipo II.* Rechazar H_1 cuando de hecho es falsa.

Considerando los dos tipos de errores, al no poderse minimizar ambos a la vez, generalmente se fija la probabilidad de cometer el error tipo I y se busca minimizar la probabilidad de cometer el error tipo II. Con esto se da origen a los conceptos de potencia y tamaño de una prueba (Casella y Berger, 2002).

Definición 2.5 *La función de potencia de una prueba de hipótesis con región de rechazo Ψ_R es una función de θ dada por $\beta_\phi(\theta) = P_\theta(X \in \Psi_R)$.*

De acuerdo con la definición, una buena prueba tiene una función de potencia cercana a 1 cuando $\theta \in \Omega_0^c$ y se aproxima a 0 cuando $\theta \in \Omega_0$.

Definición 2.6 *Para $0 \leq \alpha \leq 1$, una prueba con función de potencia $\beta_\phi(\theta)$ es una prueba de tamaño α si se cumple que:*

$$\sup_{\theta \in \Omega_0} \beta_\phi(\theta) = \alpha$$

2.8.1. Pruebas de bondad de ajuste

En el caso de una función de distribución, si se tiene un conjunto de observaciones independientes x_1, \dots, x_n de una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x)$ la cual se asume conocida y se desea probar la hipótesis:

$$H_0 : F_X(x) = F_{0X}(x)$$

Con F_{0X} una función de distribución particular ya sea discreta o continua.

Una prueba de bondad de ajuste consiste en verificar si un conjunto de datos proviene de una función de distribución particular, con base en la observación de los mismos datos se determina si se rechaza o no se rechaza H_0 .

Capítulo 3

Pruebas de Bondad de Ajuste para series de covarianza estacionaria

En este capítulo se presenta una revisión del estado del arte de las pruebas de bondad de ajuste que se han implementado para probar si una serie de tiempo $\{X_T\}$ es una realización de un proceso ARMA(p,q). En primer lugar se consideran aquellas pruebas que se fundamentan en las propiedades estadísticas de los residuales de un modelo ajustado y posteriormente aquellas que se basan en la densidad espectral y su estimador muestral o periodograma.

3.1. Pruebas de bondad de ajuste para series de tiempo

Una serie de tiempo se puede analizar a partir de dos enfoques que están muy relacionados entre sí ([Shumway y Stoffer, 2010](#)):

- El *dominio en el tiempo*, que se basa en la caracterización de la serie de tiempo a partir de su función de correlación o bien en la representación de dicha serie en términos de sus componentes cíclicos, de tendencia, estacionariedad, entre otros. En este enfoque toma importancia el conjunto de índices de las observaciones y su estructura de dependencia.
- El *dominio de la frecuencia*, que utiliza el hecho de que algunas funciones de autocorrelación –como aquellas de series de covarianza estacionaria– son representables mediante la transformada inversa de la transformada de Fourier, incluyendo la naturaleza periódica de las funciones trigonométricas y sus combinaciones lineales ([Otnes y Enochson, 1978](#)).

3.2. Pruebas en el dominio del tiempo

Con base en estos dos enfoques, se muestran las pruebas de bondad de ajuste que se han reportado en la literatura.

3.2. Pruebas en el dominio del tiempo

En el dominio del tiempo, la mayoría de las pruebas están basadas en la estructura de correlación de los residuales del modelo asumido bajo H_0 , de tal modo que están orientadas a determinar si dichos residuales se distribuyen como ruido blanco ([Shumway y Stoffer, 2010](#)). Algunas otras pruebas se han implementado con la finalidad de distinguir entre dos modelos que están contenidos entre sí mediante una prueba de razón de verosimilitud generalizada ([Fan y Zhang, 2004](#)). Las pruebas basadas en residuales se conocen como de portmanteau, de las cuales las más utilizadas son las siguientes:

3.2.1. Prueba de Box y Pierce

Sea $\{X_t\}$ una serie de tiempo generada por un proceso ARMA(p,q) estacionario e invertible expresado de la forma siguiente:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad (3.1)$$

Con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ y con polinomios definidos como: $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ y $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ en los cuales $B^k X_t = X_{t-k}$.

Sean $\hat{\theta}(B)$ y $\hat{\phi}(B)$ los polinomios estimados en los que los coeficientes ϕ_i y θ_j se sustituyen respectivamente por sus estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\phi}_i$ y $\hat{\theta}_j$. Bajo las consideraciones anteriores, los residuales del modelo 3.1 se expresan de la forma siguiente:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\theta}^{-1}(B)\hat{\phi}(B)X_t$$

Con base en lo anterior, los coeficientes de autocorrelación de los residuales están determinados por la expresión ([Brockwell y Davis, 1991](#)):

$$\hat{r}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

3.2. Pruebas en el dominio del tiempo

Considerando 3.2, [Box y Pierce \(1970\)](#) proponen la estadística de prueba:

$$Q_{BP} = n \sum_{k=1}^m \hat{r}_k^2 \quad (3.3)$$

donde n es el número de observaciones y m es el número de retrasos $-lags-$, a partir de los cuales se pretende describir toda la estructura de correlación, \hat{r}_k^2 representa la autocorrelación muestral de orden k de los residuales y se cumple que $m < n$. [Box y Pierce \(1970\)](#) demuestran que la distribución asintótica de Q_{BP} corresponde a una distribución χ_{m-p-q}^2 .

El estadístico 3.3 se considera el punto de referencia de las pruebas portmanteau por lo que ha sido ampliamente estudiada. [Davies et al. \(1977\)](#) mostraron que en muestras finitas la distribución del 3.3 no coincide o difiere de la distribución χ_{m-p-q}^2 sugerida, específicamente para tamaños de muestra pequeños.

3.2.2. Prueba de Ljung y Box

[Ljung y Box \(1978\)](#) proponen modificar la estadística de prueba 3.3 reemplazando los coeficientes de autocorrelación 3.2 con sus respectivos valores estandarizados:

$$\tilde{r}_k^2 = \frac{(n+2)}{(n-k)} \hat{r}_k^2 \quad (3.4)$$

Dando lugar así a la estadística de prueba:

$$Q_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} \tilde{r}_k^2 \quad (3.5)$$

Con base en esta modificación, [Ljung y Box \(1978\)](#) demuestran mediante un proceso de simulación con datos sintéticos y reales, que para muestras finitas el estadístico 3.5 tienen una distribución que es mucho más aproximada a χ_{m-p-q}^2 que su contraparte Q_{BP} definida en 3.3, lo cual se debe a que en este caso se está ajustando a cada \hat{r}_k definido en 3.2 por su respectiva varianza asintótica. Sin embargo, [Burns \(2002\)](#) y [Chen et al. \(2002\)](#) muestran que, en casos particulares, la prueba resulta ser no robusta.

3.2. Pruebas en el dominio del tiempo

3.2.3. Prueba de McLeod–Li

En la prueba propuesta por [McLeod y Li \(1983\)](#), se muestra que el cuadrado de las autocorrelaciones de los residuales son útiles en la detección de tipos no lineales de dependencia para los modelos ARMA(p,q). Bajo esta consideración se mostraron series de tiempo en las que el cuadrado de los residuales de algunos modelos ARMA(p,q) están significativamente autocorrelacionados, incluso si la autocorrelación usual de los residuales no sugiere algún modelo como adecuado.

La función de autocorrelación del cuadrado de los residuales resulta de una modificación de la expresión [3.2](#) y se estima de la forma:

$$\hat{r}_{\varepsilon\varepsilon}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n (\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{\varepsilon}_{t-k}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{t=1}^n (\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)}$$

En donde la varianza se está estimando como $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^2}{n}$.

[McLeod y Li \(1983\)](#), demostraron que para un valor M fijo, la igualdad:

$$\sqrt{n}\hat{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon} = (\hat{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon}(1), \dots, \hat{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon}(M)) \sim \mathbf{N}^M(\mathbf{0}, \mathbf{I}).$$

De esta forma, se tiene como propuesta el estadístico de prueba:

$$Q_{ML} = \frac{n(n+2) \sum_{i=1}^M \hat{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^2(i)}{n-i} \quad (3.6)$$

Bajo la hipótesis nula de que el modelo ARMA(p,q) propuestos es apropiado, la estadística de prueba [3.6](#) se distribuye χ_M^2 . En el artículo se reporta que mediante un estudio de simulación se observó que se obtienen buenos resultados para tamaño de muestras $n = 50$. Por otra parte, mediante un estudio de simulación [Chen et al. \(2002\)](#), muestran las deficiencias de la estadística de prueba [3.6](#) para modelos *ARMA-GARCH* con conjuntos de observaciones que describen colas muy pesadas.

3.2. Pruebas en el dominio del tiempo

3.2.4. Prueba de Monti

La prueba propuesta por [Monti \(1994\)](#) está fundamentada en la estadística [3.5](#) con la modificación de que la prueba está basada en las autocorrelaciones parciales de los residuales $\hat{\pi}_k$ para $k = 1, \dots, m$. La prueba considera el hecho de que si el error es un proceso de ruido blanco, entonces es de esperarse que sus autocorrelaciones parciales sean significativamente diferentes de cero, la estadística de prueba es la siguiente:

$$Q_M = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\pi}_k^2}{n-k}$$

En el artículo publicado por estos autores, se muestra también que el estadístico propuesto se distribuye chi_{m-p-q}^2 y mediante un estudio de simulación se concluye que esta prueba es comparable con Q_{LB} en términos de potencia. Esta afirmación es ratificada por [Kwan y Wu \(1997\)](#), en cuyos resultados se muestra la sensibilidad de esta prueba respecto a la elección adecuada del número de autocorrelaciones parciales que se incluyen en el estadístico.

3.2.5. Prueba de Peña–Rodríguez

Asumiendo que los residuales estimados pueden ser considerados como una muestra de datos multivariados de alguna distribución, [Peña y Rodríguez \(2002\)](#) proponen probar cuando o no la matriz de covarianzas de esa distribución es proporcional o igual a la matriz identidad. La prueba que proponen se basa en el hecho de que en el análisis multivariado, la prueba de razón de verosimilitudes para verificar si un conjunto de variables aleatorias normales tienen una matriz de covarianzas escalar, es proporcional al determinante de la matriz de correlación.

Para una serie de tiempo estacionaria, la matriz de correlación de los residuales de orden m , denominada como $\hat{\mathbf{R}}_m$ es de la forma:

$$\hat{\mathbf{R}}_m = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_1 & 0 \cdots & \hat{r}_m \\ \hat{r}_1 & 1 & 0 \cdots & \hat{r}_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_m & \hat{r}_{m-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Donde \hat{r} se define como en [3.2](#). La prueba propone probar la autocorrelación en los residuales estimados utilizando la transformación del determinante $|\hat{\mathbf{R}}_m|$ que tienen una

3.2. Pruebas en el dominio del tiempo

distribución simple bajo la hipótesis nula H_0 . De esta forma se propone la estadística:

$$\hat{D}_m = n \left[1 - |\hat{\mathbf{R}}_m|^{\frac{1}{m}} \right] \quad (3.8)$$

Donde n indica el número de observaciones de la serie de tiempo y $|\hat{\mathbf{R}}_m|^{\frac{1}{m}}$ es una función ponderada de las primeras m autocorrelaciones parciales de los coeficientes de los residuales. Si el modelo está correctamente especificado, \hat{D}_m se distribuye asintóticamente como una distribución *Gama*(α, β) con parámetros:

$$\alpha = \frac{3m[(m+1) - 2(p+q)]^2}{2[2(m+1)(2m+1) - 12m(p+q)]}$$

y

$$\beta = \frac{3m[(m+1) - 2(p+q)]}{2(m+1)(2m+1) - 12m(p+q)}$$

Mediante un estudio de simulación Monte Carlo, se muestra que la prueba propuesta es más potente que la propuesta por [Ljung y Box \(1978\)](#) y [Monti \(1994\)](#) así como la propuesta por [McLeod y Li \(1983\)](#). En la práctica, [Peña y Rodríguez \(2002\)](#) recomiendan reemplazar \hat{r}_k por su versión estandarizada \tilde{r}_k definida en 3.4. Sin embargo, [Lin y McLeod \(2006\)](#) señalan que \hat{D}_m tal como se define en 3.8 no siempre existe en la práctica ya que 3.7 no siempre es positiva definida, del mismo modo muestran que la distribución de 3.8 no siempre es adecuada para tamaños de muestra pequeños por lo que la aproximación a una distribución *gama*(α, β) no resulta siempre conveniente.

3.2.6. Modificación de Lin y McLeod

De acuerdo con [Lin y McLeod \(2006\)](#), la prueba propuesta por [Peña y Rodríguez \(2002\)](#) no se aproxima a la distribución *Gama* o puede no estar definida para muestras pequeñas o menores que 10, proponen una versión basada en un proceso de simulación Monte Carlo [Rizzo \(2007\)](#), [Robert y Casella \(2004\)](#), tomando como referencia la estadística D_m^* . La prueba propuesta involucra un proceso de *bootstrap* paramétrico como se describe a continuación.

1. Obtener \hat{D}_m^* de un modelo ajustado.
2. Seleccionar el número de simulaciones Monte Carlo N . Por lo general se recomienda $1 \leq N \leq 10$.

3.2. Pruebas en el dominio del tiempo

3. Simular el modelo 3.1 utilizando los parámetros estimados obtenidos en el paso 1 y obtener \hat{D}_m^* después de estimar los parámetros en las series simuladas.
4. Repetir el paso 3 N veces contando el número de veces k que el valor de \hat{D}_m^* es mayor o igual que el que valor que se obtuvo en el paso 1.
5. El P -valor para la prueba se calcula como $\frac{k+1}{N+1}$.
6. Se rechaza la hipótesis nula H_0 si el valor del P -valor es menor que el nivel de significancia α predeterminado.

3.2.7. Prueba de varianza generalizada G_v

En Peña y Rodríguez (2006), se propone una modificación al estadístico 3.8 con base en que los residuales estimados pueden considerarse como una muestra de una distribución normal multivariada:

$$(\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_n) \sim \mathbf{N}^n(\mathbf{0}, \mathbf{V}_n)$$

siendo n el tamaño de muestra. Resulta de interés probar cuando o no la matriz de covarianza de la distribución de esos residuales es diagonal, lo cual está dado por la matriz de correlación \mathbf{R}_p para p variables aleatorias por la igualdad:

$$-2\log\lambda = -n\log|\mathbf{R}_p|,$$

con \mathbf{R}_p definida como en 3.7.

La estadística de prueba es la siguiente:

$$D_m^* = -\frac{n}{m+1}\log|\hat{\mathbf{R}}_m| \quad (3.9)$$

en la que se ha estandarizado a la matriz 3.7 con su dimensión, de modo que puede representarse a la expresión 3.9 de la forma:

$$D_m^* = -n \sum_{i=1}^m \frac{(m+1-i)}{(m+1)} \log(1 - \hat{\pi}^2)$$

D_m^* se puede aproximar como una distribución Gama($\alpha = b/2, \beta = 1/2a$) con

3.3. Pruebas en el dominio de la frecuencia

$$\alpha = \frac{3(m+1)[m-2(p+q)]^2}{2[2m(2m+1) - 12(m+1)(p+q)]}$$

y

$$\beta = \frac{3(m+1)[m-2(p+q)]}{2m(2m+1) - 12(m+1)(p+q)}$$

donde $a = (\sum_{i=1}^m \lambda_i^2) / (\sum_{i=1}^m \lambda_i)$, $b = (\sum_{i=1}^m \lambda_i)^2 / (\sum_{i=1}^m \lambda_i)$, λ_i son los eigenvalores de $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{W}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{X}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$, \mathbf{V} es la matriz de información para los parámetros ϕ y θ y \mathbf{W} es una matriz diagonal con elementos $\omega_i = (m - i + 1)/(m + 1)$.

Mediante un estudio de simulación Monte Carlo, [Peña y Rodríguez \(2006\)](#) mostraron que el desempeño del estadístico 3.9 es aproximadamente 50% más efectivo que el propuesto por [Ljung y Box \(1978\)](#) y [Monti \(1994\)](#). [Mahdi et al. \(2013\)](#) generalizaron los resultados de [Peña y Rodríguez \(2006\)](#) en el caso multivariado. En el caso univariado ellos recomiendan el estadístico:

$$Gv = -\frac{3n}{2m+1} \log|\hat{\mathbf{R}}_m|$$

La distribución de Gv es aproximadamente χ^2 con $[1.5m(m+1)(2m+1)^{-1} - p - q]$ grados de libertad. Esta prueba ha sido implementada en el software *R* ([Team, 2014](#)).

3.3. Pruebas en el dominio de la frecuencia

Las pruebas de bondad de ajuste formuladas en el dominio de la frecuencia se construyen a partir del tipo de función seleccionada, ya sea la función de densidad espectral, el espectro integrado o el periodograma, ([Crujeiras et al., 2010](#)) ([Broersen, 2000](#)). Se han propuesto varias pruebas en este sentido, las cuales se detallan a continuación.

3.3.1. Prueba de Anderson

En el dominio de la frecuencia, una de las pruebas más referenciadas es la de [Anderson \(1993\)](#). En esta prueba se explota el hecho de que la función de densidad espectral de un proceso estacionario estandarizado por la varianza, es una función lineal de las autocorrelaciones del proceso. Además de que la integral de la densidad

3.3. Pruebas en el dominio de la frecuencia

espectral estandarizada muestral o periodograma también es una función lineal de las autocorrelaciones. Cuando el tamaño de la muestra incrementa, la diferencia de esas dos funciones multiplicadas por la raíz cuadrada del número de observaciones converge a un proceso estocástico gaussiano con parámetros continuos en el tiempo. De esta forma se propone un estadístico de prueba basado en la diferencia entre el periodograma definido en 2.26 y la función de densidad espectral estandarizada de un proceso como se describe en 2.21.

$$R = \sqrt{n}[I_x(\omega) - F_X(\omega)] \quad (3.10)$$

Anderson (1993) muestra que el estadístico R converge a un proceso gaussiano del cual se estudian sus propiedades asintóticas y se analiza la diferencia entre la densidad espectral muestral o periodograma y la del proceso en términos del estadístico de Cramer von Mises y el de Kolmogorov–Smirnov. Por otra parte, con base en el hecho de que un proceso autorregresivo tiene un cierto patrón de dependencia o un cierto patrón de correlaciones y que la densidad espectral pertenece a una cierta clase de densidades, Anderson (1997) propone una extensión a la prueba basada en 3.10 para el caso de procesos autorregresivos de un cierto orden, en el sentido de que se busca probar la hipótesis nula de que las observaciones provienen de un proceso autorregresivo de orden no mayor al especificado.

3.3.2. Prueba con base en residuales

Esta prueba consiste en verificar si los residuales se distribuyen como ruido blanco, lo cual se hace con base en el periodograma debido a que posee mejores propiedades de muestreo respecto a los coeficientes de la función de autocorrelación (Grenander y Rosenblatt, 1953). En Arsham (2013) se propone una prueba de bondad de ajuste de tipo adaptativa basada en la prueba de Kolmogorov–Smirnov para probar normalidad.

Una serie de tiempo $\{X_t\}$ con n observaciones puede representarse como un polinomio trigonométrico de la forma:

$$X_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)$$

donde $\omega_k = 2\phi k/n$, $a_k = (2/n) (\sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t)$ y $b_k = (2/n) (\sum_{t=1}^n X_t \sin \omega_k t)$ con $k = 1, \dots, m$, m es el entero más pequeño mayor o igual a $(n-1)/2$. Utilizando esta representación se redefine el periodograma mostrado en 2.26 de tal forma que para n datos se tiene:

3.3. Pruebas en el dominio de la frecuencia

$$I_n(\omega_k) = n \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.11)$$

A partir de 3.11 se construye el periodograma acumulado como un mejor método para representar la información del periodograma:

$$Y_k = \frac{\sum_{j=1}^k I_n(\omega_j)}{\sum_{j=1}^m I_n(\omega_j)} \quad k = 1, 2, \dots, m - 1 \quad (3.12)$$

Es bien conocido que si $\{X_t\}$ es ruido blanco gaussiano, entonces las Y_k variables aleatorias permanecerán sobre una línea de 45° en la gráfica de Y_k y k . Esta prueba utiliza este hecho y propone una modificación del estadístico de Kolmogorov-Smirnov para normalidad con el objetivo de que el estadístico propuesto sea sensible a las fluctuaciones. La prueba se basa en la gráfica de 3.12 y en 3.11 considerando que:

$$C(X) = \begin{cases} 0 & X < 1 \\ Y & 1 \leq X < i + 1 \\ 1 & X > m \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, m - 1$

El criterio de rechazo para un nivel de significancia α para cualquier X si la función $C(X)$ existe en los las fronteras:

$$Y = X \pm K_\alpha (m - 1)^{-1/2}$$

donde K_α es el valor del estadístico de Kolmogorov-Smirnov para un tamaño de muestra $m - 1$ y nivel de significancia α . Las propiedades de la prueba se estudian para el problema particular se series de tiempo hidrológicas que se caracterizan por describir altas fluctuaciones.

3.3.3. Prueba de razón de verosimilitud generalizada

Para verificar cuando o no una familia de modelos paramétricos ajustan una serie de tiempo, se requiere especificar una clase de modelos alternativos. Una práctica común es incrustar la familia de modelos paramétricos en una familia más general y utilizar esta familia más general como modelo alternativo. En este sentido, [Fan y Zhang \(2004\)](#) proponen una prueba de bondad de ajuste para modelos autoregresivos

3.3. Pruebas en el dominio de la frecuencia

basados en el supuesto de covarianza estacionaria que es una razón de verosimilitudes generalizada.

En esta prueba se emplea el periodograma 2.26 como un estimador no consistente de la densidad espectral. Para eliminar la inconsistencia del periodograma se utilizan ya sea una técnica de suavizamiento basada en funciones splines o los métodos basados en la verosimilitud de Whittle. Con base en las propiedades asintóticas del periodograma, se conoce que se distribuye asintóticamente exponencial con media $g(\omega_k)$, de modo que se cumple:

$$(2\pi)^{-1}I_T(\omega_k) = g(\omega_k)V_k + R_{n,k} \quad k = 1, \dots, n$$

con V_k independientes e idénticamente distribuidos exponencial estándar $f_z(X) = \exp\{-\exp(x) - x\}$ y $R_{n,k}$ es un término asintóticamente despreciable. Considerando $Y_k = \log\{I_T(\omega_k)/(2\pi)\}$ y $m(\cdot)$ siendo el logaritmo de la media de la distribución asintótica de 2.26, se tiene el modelo:

$$Y_k = m(\omega_k) + z_k + r_k \quad k = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

Para cualquier función de densidad espectral, la función de log verosimilitud asociada con 3.13 es:

$$\sum_{k=1}^n [Y_k - m(\omega_k) - \exp\{Y_k - m(\omega_k)\}]$$

Para cualquier x , se aproxima $m(\omega_k)$ por la función lineal $a + b(\omega_k - x)$ para ω_k cercano a x , se obtiene la función de log verosimilitud local:

$$\sum_{k=1}^n [Y_k - a - b(\omega_k - x) - \exp\{Y_k - a - b(\omega_k - x)\}] K_h(\omega_k - x) \quad (3.14)$$

El estimador de máxima verosimilitud de $m(x)$ es \hat{a} en la maximización de 3.14. Así el estadístico de prueba se puede construir como:

$$T_{LK} = \sum_{k=1}^n \left[\exp\{Y_k - m_{\hat{\theta}}(\omega_k)\} + m_{\hat{\theta}(\omega_k)} - \exp\{Y_k - \hat{m}_{LK}(\omega_k)\} - \hat{m}_{LK}(\omega_k) \right]$$

3.3. Pruebas en el dominio de la frecuencia

El criterio de rechazo para la hipótesis nula de que el modelo pertenece a una familia paramétrica, consiste en verificar si T_{LK} es mayor que un valor crítico seleccionado. La distribución del estadístico se obtiene por medio de un proceso de bootstrap paramétrico.

3.3.4. Prueba de Paparoditis

La prueba propuesta por Paparoditis (2000), considera un modelo de covarianza estacionaria y está basada en la propiedad de acuerdo con la cual, si el modelo propuesto es el adecuado, para cada frecuencia diferente de cero el valor esperado asintótico de la razón entre la densidad espectral muestral o periodograma y la densidad espectral del modelo ajustado debe ser igual a la unidad.

La prueba considera, para el caso de la prueba de una hipótesis simple, que se trata de un proceso estacionario el cual tiene la representación para X_t con $t \in Z$:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

En donde se cumple que $\psi_0 = 1$, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^{1/2} |\psi_j| < \infty$ y que ε_t , con $t \in Z$ es una secuencia de variables independientes idénticamente distribuidas con $E[\varepsilon_t] = 0$ y $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$.

La densidad espectral f_0 de X_t es de la forma 2.24 con $\phi = 0$ que pertenece a la familia de densidades espectrales \mathcal{F} de este tipo. Con base en las observaciones X_1, X_2, \dots, X_T , considerando que para $\omega_j = 2\phi jT$ con $j = 1, 2, \dots, N = [(T-1)/2]$, el periodograma se calcula como:

$$I(\omega_j) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T X_T e^{\{-it\omega_j\}} \right|$$

El juego de hipótesis que se considera es: $H_0 : f = f_0$ vs $H_1 : f \neq f_0$ para alguna $f_0 \in \mathcal{F}$.

Para $j = 1, 2, \dots, N$ se considera la razón $J(\omega_j) = I(\omega_j)/f_0(\omega_j)$, que con base en las características del modelo propuesto:

3.3. Pruebas en el dominio de la frecuencia

$$E[j(\omega_j)] = \frac{f(\omega_j)}{f_0(\omega_j)} + O(T^{-1} \log(T))$$

Que asintóticamente es igual a la unidad, por lo tanto probar el modelo es equivalente a probar que la función $E[j(\omega_j)]$ es constante en el intervalo $[0, \pi]$. Con base en el periodograma normalizado ordinario, para estimar la función $q(\cdot) = f(\cdot)/f_0(\cdot)$ se introduce una función *kernel* debido a que el periodograma es un estimador inconsistente de la densidad espectral [Priestley \(1981\)](#), por lo que se introduce el estimador:

$$\hat{q}(\omega) = \frac{1}{Th} \sum_{j=-N}^N K\left(\frac{\omega - \omega_j}{h}\right) \frac{I(\omega_j)}{f_0(\omega_j)}$$

Proponiendo así la estadística de prueba:

$$S_{T+h} = Th^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{Th} \sum_{j=-N}^N K\left(\frac{\omega - \omega_j}{h}\right) \left(\frac{I(\omega_j)}{f_0(\omega_j)} - 1 \right) \right\}^2 d\omega$$

Y se cumple que $S_{T,h} - \mu_h \sim N(0, \tau^2)$ con

$$\mu_h = h^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} K^2(x) dx \quad \text{y} \quad \tau^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} K(u) K(u+x) du \right]^2 dx$$

Para la implementación de esta prueba se emplea la técnica de bootstrap paramétrico mostrado en [Robert y Casella \(2004\)](#).

Capítulo 4

Pruebas de bondad de ajuste basadas en una razón de varianzas

En este capítulo se proponen dos pruebas de bondad de ajuste para series de tiempo de covarianza estacionaria. La estadística de prueba correspondiente a cada una de ellas está basada en una razón de varianzas y se han formulado con base en los dos enfoques en que se puede analizar una serie de tiempo: en primer lugar se presenta la prueba formulada en el dominio de la frecuencia con base en la densidad espectral de un proceso ARMA(p,q) y un bien conocido estimador de la varianza; en segundo lugar se propone una prueba ubicada en el análisis en el dominio del tiempo, su estadística de prueba se formula a partir de la razón de los estimadores de la varianza de los residuales.

4.1. Una prueba propuesta en el dominio de la frecuencia

Sea $\{X_t\}$ una serie de tiempo generada por un proceso estacionario ARMA(p,q), definido como:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad \text{con } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

Dada una realización de $\{X_t\}$, se desea probar el siguiente juego de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 : \{X_t\} &\text{ es una realización de un proceso } ARMA(p, q) \text{ vs} \\ H_1 : \{X_t\} &\text{ no es una realización de un proceso } ARMA(p, q) \end{aligned}$$

4.1. Una prueba propuesta en el dominio de la frecuencia

Para probar dicho juego de hipótesis, se consideró de interés establecer la forma en que se puede estimar la varianza de $\{X_t\}$. En primer lugar, considerando solamente al conjunto de observaciones en el tiempo, para esto se puede utilizar su estimador insesgado \hat{S}_X^2 , mismo que se define a partir de la fórmula siguiente, (Mood *et al.*, 1974):

$$\hat{S}_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.1)$$

Por otro lado, se ha mencionado que una vez que se ha ajustado un proceso ARMA(p,q), utilizando la metodología de Box y Jenkins (1970), a una realización de una serie de tiempo, dicho proceso se puede describir completamente a partir de la función de densidad espectral normalizada de acuerdo con la relación definida en la expresión 2.20, utilizando el hecho de que la función de densidad espectral de un proceso ARMA(p,q) particular es única –bajo el supuesto de que se trata de un proceso de covarianza estacionaria– y que como $\gamma_X(0) = \sigma_X^2$, la varianza, con base en H_0 se aproxima mediante la integral definida:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f_{0X}(\omega) d\omega \quad (4.2)$$

donde $f_{0X}(\omega)$ es la función de densidad espectral definida en 2.25, en la cual se sustituyen los parámetros por sus respectivos valores estimados en el ajuste del proceso considerado bajo H_0 .

Es importante señalar que el proceso propuesto bajo H_0 , al ser de covarianza estacionaria, se puede ajustar siguiendo la metodología clásica propuesta por Box y Jenkins (1970) e implementada en varias librerías del *software* estadístico **R**, (McLeod *et al.*, 2011), (Coghlan, 2014), entre otros.

Con las estimaciones de la varianza en 4.1 y 4.2, se construye el estadístico de prueba como una razón de la forma:

$$R_n = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{S}_X^2} \quad (4.3)$$

Como puede observarse \hat{S}_X^2 se calcula directamente de las observaciones y la integral definida en la expresión 4.2 se aproxima por medio de métodos numéricos, de modo

4.2. Prueba para un proceso AR(1)

que la distribución de R_n se aproxima mediante la técnica de bootstrap paramétrico.

Habiendo aproximado la distribución de R_n bajo H_0 , las constantes críticas para una prueba de tamaño α , se determinan como los cuantiles $Q_{(\frac{\alpha}{2},n)}$ y $Q_{(1-\frac{\alpha}{2},n)}$ de modo que se rechaza H_0 si $R_n < q_{\frac{\alpha}{2}}$ o $R_n > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

4.2. Prueba para un proceso AR(1)

Sea $\{X_t\}$ una serie de tiempo generada por un proceso estacionario AR(1), definido en 2.6 como:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{con } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

Dada una realización de $\{X_t\}$, se desea probar el siguiente juego de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 : \{X_t\} &\text{ es una realización de un proceso } AR(1) \text{ vs} \\ H_1 : \{X_t\} &\text{ no es una realización de un proceso } AR(1) \end{aligned}$$

4.2.1. Distribución del estadístico de prueba

El estadístico propuesto en 4.3, como se ha mencionado, se obtiene a partir de dos estimadores de la varianza. El primero de ellos se calcula directamente de los datos observados mediante la expresión 4.1. Para determinar el valor del segundo estimador, se ajusta un proceso AR(1) a $\{X_t\}$ siguiendo la metodología de [Box y Jenkins \(1970\)](#), a fin de estimar los valores del coeficiente autorregresivo ϕ y la varianza de los residuales $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$. Con base esos valores estimados, la función de densidad espectral se define de la forma siguiente:

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{(1 - 2\hat{\phi}\cos(\omega) + \hat{\phi}^2)} \quad (4.4)$$

la integral expresada en 4.2 se aproxima numéricamente utilizando alguno de los métodos descritos en [Rizzo \(2007\)](#). Con los valores estimados en las expresiones 4.1 y 4.2, se obtiene el valor del estadístico de prueba propuesto R_n .

4.2. Prueba para un proceso AR(1)

La distribución del estadístico de prueba propuesto R_n no puede ser calculado de forma analítica y, considerando que se requiere estimar el valor de los parámetros del modelo propuesto, resulta conveniente aproximarla mediante la técnica de *bootstrap* paramétrico. En esta técnica de remuestreo, habiendo establecido el tamaño α de la prueba y el número M de muestras *bootstrap* a obtener, se computan las constantes críticas $q_{\frac{\alpha}{2}}$ y $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ que corresponden a los cuantiles $Q_{(\frac{\alpha}{2},M)}$ y $Q_{(1-\frac{\alpha}{2},M)}$ de la distribución de R_n , con base en dichos valores se establece la región de rechazo para H_0 , de modo que:

$$\text{Se rechaza } H_0 \text{ si } R_n < q_{\frac{\alpha}{2}} \text{ o } R_n > q_{1-\frac{\alpha}{2}}, \text{ en caso contrario no se rechaza } H_0. \quad (4.5)$$

Para aproximar las constantes críticas, se diseñó el algoritmo siguiente:

Algoritmo propuesto

1. Se simula una muestra $\{X_t\}$ de tamaño n de un proceso $AR(1)$ bajo H_0 , el cual se asume que es de covarianza estacionaria y con [Box y Jenkins \(1970\)](#), se ajusta un proceso $AR(1)$ a $\{X_t\}$ para estimar $\hat{\phi}$ y $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ del modelo ajustado.
2. Se calcula el estadístico R_n definido en la expresión [4.3](#) con las expresiones [4.1](#) y [4.4](#).
3. Se genera una muestra de tamaño n con los parámetros estimados en 1 a la que se le denomina $\{X_t^*\}$ y se le ajusta un modelo $AR(1)$ para estimar $\hat{\phi}^*$ y $\hat{\sigma}_\varepsilon^{2*}$ y con esos valores se calcula $R_{n,M}^*$ con base en [4.3](#).
4. Se repite 3 M veces obteniendo un conjunto de resultados $R_{n,M}^*$, con base en este conjunto de observaciones se definen las constantes críticas q_0 y q_1 que corresponden a los cuantiles $Q_{M;\frac{\alpha}{2}}$ y $Q_{M;1-\frac{\alpha}{2}}$.

Para indagar la función de densidad de R_n , se hicieron 1000 réplicas Monte Carlo para datos provenientes de un proceso $AR(1)$ con coeficiente autorregresivo $\phi = 0.8$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, tamaño de muestra $n = 200$ y $m = 1000$ muestras *bootstrap*. El resultado se muestra en la [Figura 4.1](#).

4.2. Prueba para un proceso AR(1)

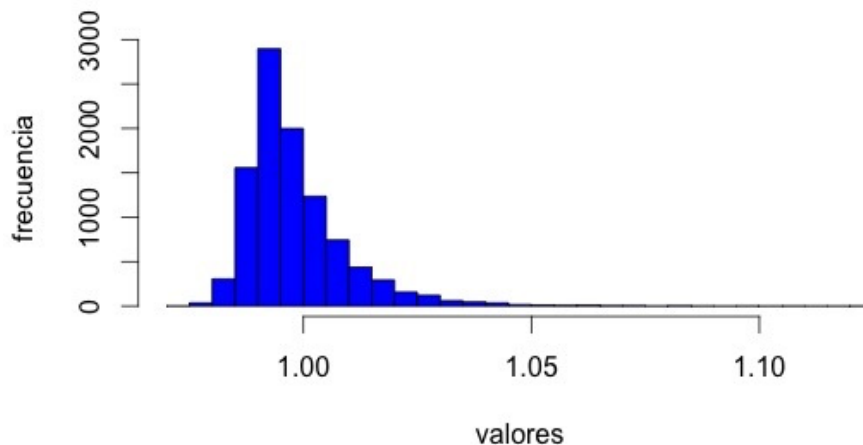


Figura 4.1: Densidad de R_n bajo H_0 con $\phi = 0.8$, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, tamaño de muestra $n = 200$ y $m = 1000$ muestras bootstrap.

4.2.2. Tamaño estimado de la prueba

Se implementó un proceso Monte Carlo con k réplicas para verificar que la prueba preserva el tamaño α establecido, para lo cual se diseñó el algoritmo siguiente:

1. Se simula una muestra $\{X_t\}$ de tamaño n de un proceso $AR(1)$ con coeficiente autorregresivo $|\phi| < 1$ y $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$. También se establece un tamaño de prueba $\alpha = 0.05$.
2. Utilizando la metodología de [Box y Jenkins \(1970\)](#), se ajusta un proceso $AR(1)$ al conjunto de datos simulado $\{X_t\}$ y se obtiene el valor estimado de los parámetros $\hat{\phi}$ y $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ del modelo ajustado y se calcula R_n .
3. Se genera una muestra $\{X_t^*\}$ de tamaño n utilizando como parámetros $\hat{\phi}$ y $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ obtenidos en 2, se le ajusta un proceso $AR(1)$ y se estiman los valores de $\hat{\phi}^*$ y $\hat{\sigma}_\varepsilon^{2*}$. Con esos valores se calcula el estadístico $R_{n,m}^*$.
4. Se repite el paso 6 m veces y con el conjunto de resultados $R_{n,m}^*$ se definen las constantes críticas q_0 y q_1 que corresponden a los cuantiles $Q_{m;\frac{\alpha}{2}}$ y $Q_{m;1-\frac{\alpha}{2}}$ de $R_{n,m}^*$ respectivamente y se determina si R_n se ubica o no en la región de rechazo con base en el criterio de decisión establecido en [4.5](#).
5. Se repiten los pasos 1 a 4 k veces a fin de contabilizar el número de rechazos r de la prueba. El tamaño estimado de la prueba para el proceso bajo H_0 corresponde al cociente r/k .

4.2. Prueba para un proceso AR(1)

El proceso Monte Carlo se realizó con procesos AR(1) para diferentes valores de ϕ , diferentes tamaños de muestra ($n=200, 300$ y 500), $k = 1000$ réplicas montecarlo y $m = 2000$ remuestreos. Los resultados obtenidos de este proceso se muestran en la Tabla 4.1.

Como se puede observar en la Tabla 4.1, en términos generales no se preserva el tamaño de prueba para muestras provenientes de un proceso AR(1) con coeficiente autorregresivo $\phi = 0.6, 0.65$ y 0.7 y tamaño de muestra $n = 200$, esta situación no difiere si se incrementa el tamaño de la muestra a $n = 500$. Nótese que en los procesos con $\phi = -0.25$ y 0.5 , de igual forma se obtuvieron valores de hasta 0.1 para procesos con coeficiente autorregresivo $\phi = -0.15$ y tamaño de muestra $n = 500$, así como para procesos con coeficiente $\phi = 0.3$ y tamaño de muestra $n = 500$. Asimismo se obtuvieron tamaños estimados de prueba iguales a 0 para, al menos 5 casos diferentes como por ejemplo: el proceso con coeficiente autorregresivo $\phi = -0.1$ y tamaño de muestra $n = 300$.

4.2. Prueba para un proceso AR(1)

ϕ	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$
-0.9	0.01	0.03	0.01
-0.85	0.04	0.02	0.03
-0.8	0.02	0.02	0
-0.75	0.02	0.01	0.02
-0.7	0.01	0.01	0.04
-0.65	0.01	0.01	0.03
-0.6	0	0	0.05
-0.55	0.02	0.05	0.03
-0.5	0.04	0.02	0
-0.45	0.02	0.02	0.02
-0.4	0.02	0.04	0.03
-0.35	0.04	0.04	0.01
-0.3	0.03	0.02	0.06
-0.25	0.01	0.03	0.09
-0.2	0.04	0.02	0.07
-0.15	0.04	0.01	0.1
-0.1	0.03	0	0.06
-0.05	0.03	0.03	0.09
0	0.04	0.03	0.03
0.05	0.04	0.04	0.06
0.1	0.04	0.05	0.04
0.15	0.05	0.05	0.05
0.2	0.06	0.03	0.06
0.25	0.05	0.04	0.06
0.3	0.05	0.02	0.1
0.35	0.02	0.04	0.04
0.4	0.03	0.05	0.07
0.45	0.04	0.05	0.06
0.5	0.06	0.06	0.08
0.55	0.04	0.05	0.07
0.6	0.08	0.05	0.02
0.65	0.08	0.07	0.06
0.7	0.07	0.06	0.06
0.75	0.05	0.04	0.04
0.8	0.06	0.04	0.05

Tabla 4.1: Tamaño estimado de la prueba R_n bajo H_0 con $\alpha = 0.05$, para diferentes tamaños de muestra n , $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, $k = 1000$ réplicas Monte Carlo, $m = 2000$ remuestreos y diferentes valores para el coeficiente autorregresivo ϕ .

4.2. Prueba para un proceso AR(1)

4.2.3. Potencia estimada de la prueba

Para concluir acerca de la potencia estimada de la prueba, se consideró como alternativa un proceso AR(2) definido en 2.7.

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t,$$

Se estableció el tamaño de prueba $\alpha = 0.05$ y se hicieron 1 réplicas de un proceso de simulación Monte Carlo para diferentes tamaños de muestra $n = 200, 300$ y 500 y se generaron $M = 1000$ muestras bootstrap. Los coeficientes autorregresivos del proceso alternativo AR(2) se determinaron fijando valores del segundo coeficiente autorregresivo ϕ_2 en el conjunto $\{-0.7, -0.5, -0.3, -0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$ y con base en cada uno de los valores de ϕ_2 , se asignaron diferentes valores al coeficiente autorregresivo ϕ_1 a fin de que el proceso AR(2) cumpliera con las condiciones de covarianza estacionaria: $|\phi_2| < 1$, $\phi_1 + \phi_2 < 1$ y $\phi_2 - \phi_1 < 1$, mostradas en Marmol (1995). Mediante un proceso Monte Carlo se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 4.2.

Como puede observarse en la Tabla 4.2, en algunos casos como en el proceso $X_t = -0.1X_{t-1} - 0.7X_{t-2} + \epsilon_t$ con $n = 200$ observaciones no se obtuvo potencia registrándose un valor de 0, esto mismo sucede con algunos procesos con tamaños de muestra $n = 300$ e inclusive un caso para tamaño de muestra $n = 500$.

Para la mayor parte de los procesos alternativos simulados, la potencia de la prueba se ubica muy próximo al valor nominal y solamente para algunos casos se obtiene una potencia de hasta 0.38, esto sucede específicamente para el caso en que se tiene el proceso con $X_t = -0.1X_{t-1} + 0.7X_{t-2} + \epsilon_t$ con un número de muestra $n = 500$. La gráfica para simulaciones con $n = 500$, se muestra en la Figura 4.2.

4.2. Prueba para un proceso AR(1)

ϕ_1	ϕ_2	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$
-1.3	-0.7	0.03	0.02	0.03
-0.9	-0.7	0	0	0.04
-0.5	-0.7	0.01	0.01	0.05
-0.1	-0.7	0	0.06	0.08
0.3	-0.7	0.06	0.08	0.04
0.7	-0.7	0.05	0	0.06
1.1	-0.7	0.03	0.06	0.05
-1.3	-0.5	0.02	0.05	0
-0.9	-0.5	0.02	0.01	0.02
-0.5	-0.5	0	0	0.02
-0.1	-0.5	0	0.03	0.03
0.3	-0.5	0.04	0.03	0.06
0.7	-0.5	0.02	0.06	0.01
1.1	-0.5	0.03	0.02	0.03
-0.9	-0.3	0.01	0.03	0.01
-0.5	-0.3	0	0	0.02
-0.1	-0.3	0	0	0.03
0.3	-0.3	0.03	0.04	0.03
0.7	-0.3	0.03	0.02	0.05
1.1	-0.3	0.03	0.06	0.04
-0.9	-0.1	0.02	0.02	0.04
-0.5	-0.1	0	0	0.02
-0.1	-0.1	0.02	0.02	0.03
0.3	-0.1	0.05	0.02	0.01
0.7	-0.1	0.05	0.05	0.05
-0.5	0.1	0.02	0.06	0.01
-0.1	0.1	0.05	0.05	0.11
0.3	0.1	0.06	0.04	0.06
0.7	0.1	0.06	0.04	0.06
-0.5	0.3	0.01	0.05	0.03
-0.1	0.3	0.13	0.13	0.15
0.3	0.3	0.11	0.07	0.13
-0.1	0.5	0.24	0.19	0.26
0.3	0.5	0.18	0.22	0.27
-0.1	0.7	0.35	0.38	0.38

Tabla 4.2: Potencia estimada de la prueba R_n contra un proceso AR(2) como alternativa con $\alpha = 0.05$, $k = 100$ réplicas Monte Carlo y $M = 1000$ muestras bootstrap, $n = 200, 300$ y 500 , $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, y diferentes valores para los coeficientes ϕ_1 y ϕ_2 .

4.2. Prueba para un proceso AR(1)

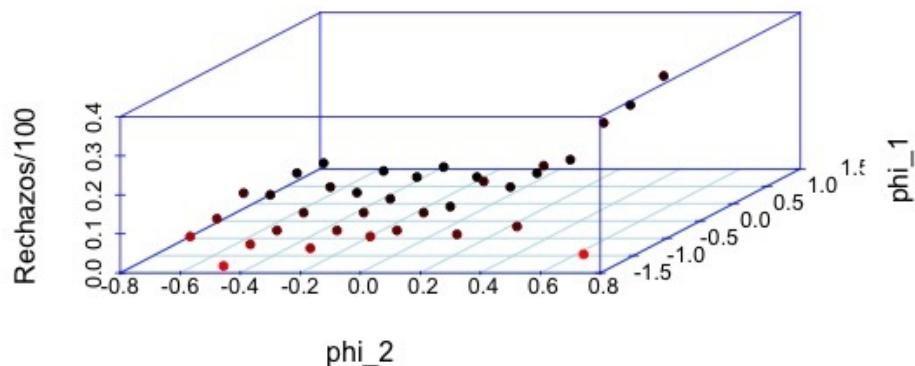


Figura 4.2: Potencia estimada de la prueba R_n contra un proceso AR(2) como alternativa con $\alpha = 0.05$, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, $n = 500$, , diferentes valores de los coeficientes de autorregresión ϕ_1 y ϕ_2 .

4.2.4. Consideraciones respecto de la prueba R_n

Con base en la prueba R_n definida en 4.3, se observó que la estimación de la varianza a partir de la densidad espectral mostrada en la expresión 4.2, no es muy sensible al momento de distinguir, en particular, entre los procesos AR(1) y AR(2) y también involucra a la varianza de los residuales del proceso asumido bajo H_0 . Para los procesos AR(1) y AR(2), la varianza se puede estimar mediante las expresiones siguientes (Shumway y Stoffer, 2010):

Para un proceso AR(1):

$$\hat{\sigma}_X^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\omega}{1 - 2\hat{\phi}\cos(2\pi\omega) + \hat{\phi}^2} \quad (4.6)$$

Para un proceso AR(2):

$$\hat{\sigma}_X^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\omega}{(1 - \hat{\phi}_2^2)^2 + \hat{\phi}_1^2 + 2\hat{\phi}_1(1 + \hat{\phi}_2)\cos(2\pi\omega) + 4\hat{\phi}_2\cos^2(4\pi\omega)} \quad (4.7)$$

4.3. Prueba con base en la razón de la varianza de los residuales

Con base en la simulación Monte Carlo, se observó que con un proceso AR(2) como alternativa, la prueba R_n no muestra potencia porque las expresiones 4.6 y 4.7 estiman aproximadamente el mismo valor para $\hat{\sigma}_X^2$; sin embargo, la diferencia más significativa recae en el término $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, a partir de esta observación se sugiere distinguir entre esos dos procesos mediante la razón de la varianza estimada de los residuales, en este caso, de los procesos AR(1) y AR(2).

4.3. Prueba con base en la razón de la varianza de los residuales

En el análisis en el dominio del tiempo, gran parte de las pruebas de bondad de ajuste están basadas en los residuales. De manera particular, dado un conjunto de datos observados en el tiempo $\{X_t\}$ se desea distinguir si los datos son alguna realización de dos procesos anidados, digamos los procesos AR(1) y AR(2). Dicha distinción puede realizarse mediante la razón de la varianza de los residuales de cada modelo ajustado. Para esto se plantea el siguiente juego de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 : \{X_t\} &\text{ proviene de un proceso AR(1)} && \text{vs} \\ H_1 : \{X_t\} &\text{ proviene de un proceso AR(2)}. \end{aligned}$$

De esta forma, se plantea el estadístico de prueba siguiente:

$$U_n = \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon_A}^2}{\hat{\sigma}_{\varepsilon_B}^2} \tag{4.8}$$

en donde el numerador corresponde a la varianza de los residuales del ajuste de un proceso autorregresivo de orden 1 a $\{X_t\}$ y el denominador corresponde a los residuales del ajuste de un proceso autorregresivo de orden 2 a $\{X_t\}$. El ajuste se hace mediante la metodología de [Box y Jenkins \(1970\)](#).

4.3.1. Distribución del estadístico de prueba

Para determinar la distribución del estadístico de prueba 4.8, se recurre a un proceso bootstrap paramétrico, para lo cual se requiere implementar simulación Monte Carlo con k generar m muestras bootstrap asumiendo un proceso bajo H_0 mediante un algoritmo como el siguiente:

4.3. Prueba con base en la razón de la varianza de los residuales

Algoritmo propuesto

1. Se genera una muestra $\{X_t\}$ de tamaño n de un proceso AR(1) de covarianza estacionaria.
2. Se ajusta un proceso $AR(1)$ al conjunto de datos simulado $\{X_t\}$ y se estima el valor de $\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^2$ del modelo ajustado utilizando la metodología de [Box y Jenkins \(1970\)](#). Del mismo modo se ajusta un proceso AR(2) al conjunto de datos simulado y se estima el valor de $\hat{\sigma}_{\varepsilon_2}^2$ del modelo ajustado. Con los dos estimadores de la varianza se calcula el estadístico U_n .
3. Se genera una muestra de tamaño n utilizando como parámetros $\hat{\phi}$ y $\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^2$ obtenidos en 2 obteniendo así $\{X_t^*\}$, se le ajusta un modelo AR(1) a $\{X_t^*\}$ y se obtienen los valores estimados de $\hat{\phi}^*$ y $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2*}$, y con esos valores se calcula el estadístico $U_{n,m}^*$.
4. Se repite el paso 3 m veces y con el conjunto de resultados $U_{n,m}^*$ se definen las constantes críticas q_0 y q_1 que corresponden a los cuantiles $Q_{m;\frac{\alpha}{2}}$ y $Q_{m;1-\frac{\alpha}{2}}$ de $R_{n,m}^*$ respectivamente.

Se utilizó el algoritmo propuesto para aproximar función de densidad del estadístico propuesto U_n considerando H_0 como verdadera, el resultado se ilustra en la [Figura 4.3](#).

4.3.2. Potencia estimada de la prueba

Para estimar la potencia de la prueba, se implementó un proceso de simulación Monte Carlo considerando 1000 réplicas y tamaños pequeño, moderado y relativamente grande de muestra, es decir $n = 100, 250$ y 500 . Se consideró un proceso AR(2) con el parámetro $\phi_1 = 0.1$ y diferentes valores para el parámetro ϕ_2 de tal modo que preserve las condiciones de covarianza estacionaria. Se realiza un comparativo con el desempeño de las pruebas de [Ljung y Box \(1978\)](#) (Q_{LB}) y [Peña y Rodríguez \(2006\)](#) (Gv) debido a que se ha mostrado que presentan un mejor desempeño de acuerdo con [Safi y Al-Reqep \(2014\)](#). Se realizaron $r = 100$ réplicas Monte Carlo y $m = 500$ remuestreos en el proceso de bootstrap paramétrico. Los resultados obtenidos se muestran en la [Tabla 4.3](#).

Es bien sabido que las pruebas de [Ljung y Box \(1978\)](#) y [Peña y Rodríguez \(2006\)](#) dependen fuertemente del número de retrasos que, a juicio de quien las utiliza, deben capturar toda la estructura de dependencia entre los datos. Se ha reportado en la literatura que para procesos que describen un comportamiento un tanto armónico, como el caso de un proceso AR(2), si se consideran 10 retrasos se obtiene muy buenos

4.3. Prueba con base en la razón de la varianza de los residuales

ϕ_2	$n = 1$			$n = 250$			$n = 500$		
	U_n	Gv	Q_{LB}	U_n	Gv	Q_{LB}	U_n	Gv	Q_{LB}
-0.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-0.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-0.6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-0.5	1	1	0.98	1	1	1	1	1	1
-0.4	0.96	0.94	0.83	1	1	1	1	1	1
-0.3	0.87	0.75	0.58	1	1	0.96	1	1	1
-0.2	0.35	0.45	0.35	0.80	0.67	0.66	1	0.96	0.92
-0.1	0.13	0.10	0.10	0.35	0.20	0.14	0.52	0.41	0.28
0	0.05	0.03	0.06	0.06	0.03	0.06	0.03	0.06	0.01
0.1	0.09	0.10	0.10	0.21	0.22	0.08	0.53	0.37	0.23
0.2	0.32	0.23	0.12	0.83	0.58	0.48	0.99	0.93	0.88
0.3	0.67	0.52	0.40	0.99	0.97	0.94	1	1	1
0.4	0.93	0.90	0.74	0.01	0.01	0.99	1	1	1
0.5	0.95	0.99	0.92	1	1	1	1	1	1
0.6	0.99	0.99	0.99	1	1	1	1	1	1
0.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 4.3: Tamaño estimado de la prueba U_n frente a un proceso AR(2) como alternativa y tamaño de prueba $\alpha = 0.05$, para diferentes tamaños de muestra $n = 100, 250$ y 500 ; $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, $\phi_1 = 0.1$ y diferentes valores para el coeficiente autorregresivo ϕ_2 .

4.3. Prueba con base en la razón de la varianza de los residuales

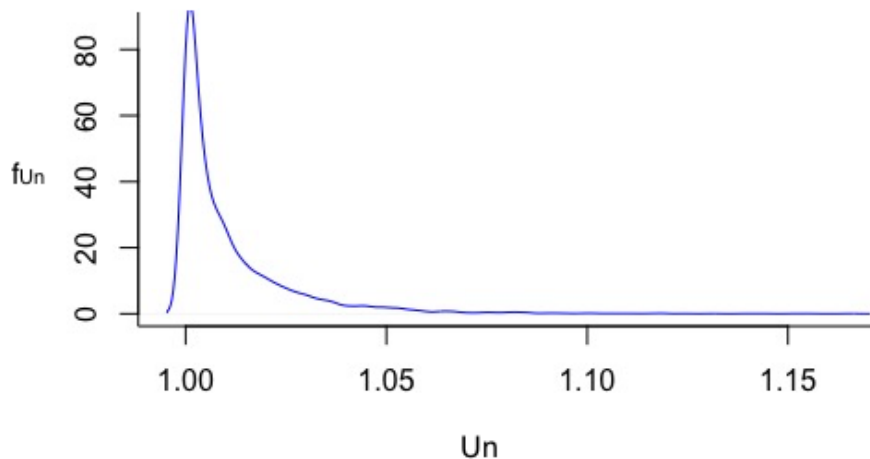


Figura 4.3: Función de densidad del estadístico U_n bajo H_0 con $\phi_1 = 0.85$, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ y $m = 5000$.

resultados. En este sentido se utilizaron ese número de retrasos para ambas pruebas.

Como se puede observar en la Tabla 4.3, la prueba propuesta es más potente que la de [Ljung y Box \(1978\)](#) que es una de las que más se utilizan para procesos lineales. Adem'as, otra ventaja que presenta el estadístico propuesto U_n sobre el estadístico Q_{LB} es que este último es muy sensible al número de retrasos considerados y en este caso, se esperaba que para $\phi_2 = 0$ la potencia estimada alcanzara a lo más el tamaño nominal de 0.05, sin embargo este valor lo rebasó ligeramente la prueba de [Ljung y Box \(1978\)](#) para $n = 100$.

La prueba propuesta es muy competitiva con la prueba generaliza propuesta por [Peña y Rodríguez \(2006\)](#), inclusive muestra mayor potencia para algunos procesos con $\phi_2 < 0$ y $n = 100$, y todavía es más potente con tamaños de muestra grandes $n = 500$.

Capítulo 5

Prueba de ajuste para procesos gaussianos ARMA(p,q)

En este capítulo se presenta una prueba de ajuste para series de tiempo gaussianas de covarianza estacionaria la cual está formulada con base en la prueba de Shapiro-Wilk para probar normalidad y en una transformación de los datos observados evitando así el cálculo de los residuales del modelo considerado bajo H_0 . El estadístico propuesto se caracteriza por ser invariante ante localización y escala, y su distribución se determina evitando la aproximación asintótica utilizada en la mayoría de las pruebas portmanteau reportadas en la literatura. Se utilizó un proceso Monte Carlo para aproximar los valores críticos e investigar las propiedades de la potencia de la prueba y su desempeño para procesos particulares ARMA(p,q). Los resultados obtenidos revelan que la prueba propuesta es más potente, en algunos casos, que la mayoría de las pruebas reportadas en la literatura.

5.1. Materiales y métodos

El estadístico de prueba propuesto, como se ha mencionado, consta de una transformación de la serie observada $\{X_t\}$ con la finalidad de eliminar su estructura de dependencia y en una modificación de la prueba de Shapiro-Wilk para normalidad, cuyos aspectos importantes son los que se describen a continuación.

5.1. Materiales y métodos

5.1.1. La transformación de los datos

Sea $\{X_t\}$ una serie de tiempo es generada por un proceso gaussiano estacionario e invertible $ARMA(p,q)$ definido como:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad \text{con } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad (5.1)$$

en donde, por simplicidad se considera una serie centrada en 0, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $\phi(b) = 1 - \phi_1 b^1 - \phi_2 b^2 + \dots + \phi_p b^p$, $\theta(b) = 1 + \theta_1 b + \theta_2 b^2 + \dots + \theta_q b^q$, B es el operador ($B^j X_t = X_{t-j}$, $B^j \varepsilon_t = \varepsilon_{t-j}$) para $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y X_t puede ser el resultado de alguna transformación de los datos originalmente observados.

De la condición de estacionariedad, $\phi(z) \neq 0$ para todo z ubicado dentro del círculo unitario. Podemos definir $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$ para obtener:

$$X_t = \psi(B)\varepsilon_t, \quad (5.2)$$

donde $\psi(B)\varepsilon_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ y la secuencia $\{\psi_j\}$ está definida por la relación:

$$(1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p)(\psi_0 + \psi_1 z + \dots) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q,$$

entonces: $1 = \psi_0$; $\theta_1 = \psi_1 - \psi_0 \phi_1$; $\theta_2 = \psi_2 - \psi_1 \phi_1 - \psi_0 \phi_2$, etcétera. Note que $\theta_j = 0$ para $j > q$ y $\psi_j = 0$ para $j < 0$.

Proposición 5.1 *Sea $\{Y_t\}$ una serie de tiempo estacionaria con media 0 y función de covarianza γ_Y . Si $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, entonces la serie $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j} = \psi_j(B)Y_t$ es estacionaria con media 0 y función de autocovarianza $\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} \sigma^2$ en el caso de procesos lineales.*

Más detalles sobre la proposición 5.1 pueden consultarse en [Brockwell y Davis \(1991\)](#). La función de autocovarianza de un proceso $ARMA(p,q)$, se define en la expresión 2.16 y para un proceso $AR(1)$ en la expresión 2.11

La función de autocovarianza de un proceso $ARMA(p,q)$ puede ser obtenida mediante la proposición 5.1 como se ha mostrado en 2.16, y para un proceso autorregresivo de orden 1 como se muestra en la expresión 2.11 y que en términos generales es de la forma:

5.1. Materiales y métodos

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+h} \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 \phi^h \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\phi^h}{(1-\phi^2)} \quad (5.3)$$

y para un proceso AR(2), se define recursivamente de:

$$\gamma_X(j) = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} \quad \text{para } j > 2 \quad (5.4)$$

donde $\gamma_X(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \gamma_X(0)$, $\gamma_X(2) = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \gamma_X(0)$ y $\gamma_X(0) = \frac{(1-\phi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]}$.

Por la expresión 5.1, se considera que el vector de observaciones \mathbf{X}_t se distribuye $N^n(\mathbf{0}, \Sigma)$, donde $\mathbf{0}$ el vector nulo, n es el número de observaciones y la matriz Σ representa la matriz de covarianzas que se construye con base en la proposición 5.1 y tiene la estructura que se describe a continuación:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \cdots & \gamma_X(n-1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \cdots & \gamma_X(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(n-1) & \gamma_X(n-1) & \cdots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

De esta forma, si consideramos que la estructura de dependencia del vector de observaciones \mathbf{X}_t está definida adecuadamente por aquella que corresponde a un proceso ARMA(p,q), contenida en la matriz Σ , es posible transformar al vector de observaciones con base en una proposición que resulta de las propiedades de la distribución normal multivariada:

Proposición 5.2 $\mathbf{X}_t \sim N^n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ si y sólo si $\mathbf{Z}_t = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) \sim N^n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ donde n es el tamaño de la muestra, $\mathbf{0}$ es el vector nulo de orden n y \mathbf{I} es la matriz identidad de orden $n \times n$. Note que las coordenadas $Z_{ti} \sim N(0, 1)$, para $i = 1, \dots, n$.

Es bien conocido que la matriz de covarianzas Σ es simétrica y definida positiva, entonces puede ser factorizada utilizando la descomposición de Cholesky:

Proposición 5.3 *Factorización de Cholesky.* Dada una matriz \mathbf{A} simétrica y definida positiva, existe una matriz triangular inferior \mathbf{L} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$

5.1.2. Prueba de Shapiro-Wilk para normalidad

Se han realizado varios estudios en los que se concluye que la prueba de normalidad propuesta por Shapiro–Wilk es una de las más potentes frente a todos los tipos de distribuciones alternativas, así como para diferentes tamaños de muestra ([Razali et al., 2011](#)). Esta prueba para normalidad posee varias propiedades deseables como la de invarianza ante localidad y escala. Su estadístico es la razón del cuadrado de las observaciones respecto de la media. Con base en una muestra aleatoria de tamaño n , x_1, x_2, \dots, x_n , el estadístico está expresado como, ([Shapiro y Wilk, 1965](#)):

$$W_X = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.6)$$

donde a_i es el i -ésimo elemento del vector

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{m}^t \mathbf{V}^{-1}}{(\mathbf{m}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{1/2}} \quad (5.7)$$

donde $\mathbf{m}^t = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ es el vector de valores esperados de los estadísticos de orden de la distribución normal estándar, $\mathbf{V} = (v_{ij})$ es su correspondiente matriz de covarianzas, $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ son las observaciones ordenadas, n el número de observaciones y \bar{x} es la media muestral.

[Shapiro y Wilk \(1965\)](#), demostraron que el estadístico 5.6 puede tomar valores entre 0 y 1, de tal forma que se concluye que los datos tienen una distribución normal si $W_X \approx 1$. Se han propuesto varias modificaciones a la prueba de Shapiro-Wilk para extender la prueba para tamaños de muestra $n > 50$. [Royston \(1995\)](#) definió una aproximación para los coeficientes a_i requeridos para calcular W_X y estableció un algoritmo para extender la prueba para tamaños de muestra $3 \leq n \leq 5000$.

La función de covarianza muestral de la transformación de $\{X_t\}$ mediante la proposición 5.2, para un proceso de covarianza estacionario donde $\gamma_Z(h) = Cov(t+h, t)$ es independiente de t para cada h y de acuerdo a [Brockwell y Davis \(1991\)](#), se define como en la expresión 2.4:

$$\hat{\gamma}_Z(h) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} (z_{t+|h|})(z_t - \bar{z}), \quad \text{con } -n < h < n.$$

5.2. El estadístico de prueba

Por lo tanto, si Z_{it} muestra independencia, entonces $\hat{\gamma}_Z(h) \approx 0$.

5.2. El estadístico de prueba

Motivados por la proposición 5.2, para probar la hipótesis compuesta $H_0 : X_t$ es una muestra de un proceso gaussiano ARMA(p,q), donde los valores de los parámetros son desconocidos, se propone el estadístico de prueba definido como:

$$W_n = \frac{\left(\sum_{j=0}^n a_j z_j^* \right)^2}{\sum_{j=1}^n (z_j^* - \bar{z}_n^*)^2 + \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-1} \left| \sum_{j=1}^{n-h} (z_j^* - \bar{z}_n^*)(z_{j+h}^* - \bar{z}_n^*) \right|} \quad (5.8)$$

que está basado en las coordenadas de las observaciones transformadas $Z_t^* = \hat{\Sigma}^{-1/2} X_t$ de acuerdo a la proposición 5.2, donde un estimador $\hat{\Sigma}$ de Σ es construida de la forma:

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_X(0) & \hat{\gamma}_X(1) & \cdots & \hat{\gamma}_X(n-1) \\ \hat{\gamma}_X(1) & \hat{\gamma}_X(0) & \cdots & \hat{\gamma}_X(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}_X(n-1) & \hat{\gamma}_X(n-2) & \cdots & \hat{\gamma}_X(0) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

con $\hat{\gamma}_X(h)$ se estima con base en la proposición 5.1, y $\hat{\Sigma}^{-1/2}$ es la matriz Cholesky \mathbf{L} de $\hat{\Sigma}^{-1}$, la inversa de la matrix $\hat{\Sigma}$ definida en 5.9. Nótese que las coordenadas de Z_t^* son aproximadamente independientes y distribuidas $N(0, 1)$.

Se puede observar que bajo H_0 :

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-h} |(z_j^* - \bar{z}_n^*)(z_{j+h}^* - \bar{z}_n^*)| \approx 0$$

De esta forma, el estadístico W_n definido en 5.8 debe ser aproximadamente igual al estadístico 5.6, es decir $W_n \approx W_X$. Como se ha demostrado en Shapiro y Wilk (1965), el valor máximo de W_X es 1 y tiene las propiedades de invarianza ante localidad y escala. Por lo tanto, bajo H_0 se puede demostrar que W_n preserva esas propiedades.

5.3. Prueba de ajuste para un proceso AR(1)

5.2.1. Aproximación de las constantes críticas

La distribución nula del estadístico de Shapiro-Wilk no puede ser obtenida analíticamente porque depende del valor del vector \mathbf{a} definido en la expresión 5.7, el cual depende de los valores de \mathbf{m} y \mathbf{V} . En Royston (1992) y Royston (1995), se propone una aproximación para dichos valores por medio de una transformación normalizada de W_X y obtiene un algoritmo que puede ser utilizado con precisión para tamaños de muestra en el rango $3 \leq n \leq 5000$, por lo tanto se puede utilizar el estadístico de Shapiro-Wilk para series de tiempo con ese número de observaciones.

Para probar el juego de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 : \{X_t\} \text{ es un proceso gaussiano ARMA}(p,q) \quad \text{vs} \\ H_1 : \{X_t\} \text{ no es un proceso gaussiano ARMA}(p,q) \end{aligned}$$

La prueba rechaza H_0 con un tamaño de prueba $\alpha \in (0, 1)$, si $W_n < k_\alpha$, donde k_α es el cuantil $Q_{\alpha;n}$ de la distribución de W_n bajo H_0 denotada como F_{W_n} , la cual es aproximada mediante simulación Monte Carlo.

5.3. Prueba de ajuste para un proceso AR(1)

Para una serie de tiempo $\{X_t\}$ generada por un proceso AR(1) invertible y estacionario en covarianza definido en 2.6, es posible probar el juego de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 : \{X_t\} \text{ es un proceso gaussiano AR}(1) \quad \text{vs} \\ H_1 : \{X_t\} \text{ no es un proceso gaussiano AR}(1) \end{aligned}$$

La función de autocovarianza está definida para un proceso AR(1) está definido en la expresión 2.11 y se calcula para $0 < h < n$. La cual tiene la estructura siguiente:

$$\hat{\Sigma} = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{1 - \hat{\phi}^2} \begin{pmatrix} \hat{\phi}^0 & \hat{\phi}^1 & \dots & \hat{\phi}^{n-1} \\ \hat{\phi}^1 & \hat{\phi}^0 & \dots & \hat{\phi}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}^{n-1} & \hat{\phi}^{n-2} & \dots & \hat{\phi}^0 \end{pmatrix},$$

Observe que la matriz $\hat{\Sigma}$ depende de 5.3 y está bien definida para los procesos ARMA(p,q) más comúnmente utilizados. El vector de observaciones \mathbf{X}_t se transforma de

5.3. Prueba de ajuste para un proceso AR(1)

acuerdo a la proposición 5.2 y los valores críticos son aproximados mediante simulación Monte Carlo, de acuerdo a lo siguiente:

Algoritmo 5.1

1. Simular n observaciones de un proceso estacionario en covarianza ARMA(p,q) bajo H_0 , denotado como \mathbf{X}_t .
2. Utilice la metodología de Box y Jenkins para determinar los valores de $\hat{\phi}$ y $\hat{\sigma}^2$ mediante el ajuste de un modelo AR(1) definido en 2.6 a \mathbf{X}_t .
3. Calcule el estadístico W_n utilizando 5.8 con las coordenadas del vector de datos transformados \mathbf{Z}_t^* .
4. Repita los pasos 1 a 3 aproximadamente $r = 10^6$ veces o hasta que el cuantil $Q_{\alpha;n}$ no muestre cambios significativos respecto a un valor mayor a r en un orden de 10^4 .

Las constantes críticas aproximadas para diferentes tamaños de muestra y diferentes valores tamaños de prueba α son los que se muestran en la tabla 5.1.

n	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
50	0.8816421	0.8885459	0.8956749
100	0.9213307	0.9251915	0.9289909
150	0.9382686	0.9409011	0.9435925
200	0.9480783	0.9500991	0.9521686
250	0.9546048	0.9562422	0.9579119
300	0.9591979	0.9605788	0.9619956
350	0.9628173	0.9639811	0.9652119
400	0.9655787	0.9666349	0.9676955
500	0.9698494	0.9706779	0.971534

Tabla 5.1: Constantes críticas para la prueba W_n , considerando diferentes tamaños de muestra n y diferentes tamaños de prueba α .

5.3.1. Resultados

Para verificar las propiedades de invarianza ante localidad y escala de F_{W_n} se implementó un proceso Monte Carlo para aproximar la distribución de W_n bajo H_0 para tamaños de muestra pequeños, moderadamente grandes y grandes. Se presenta el caso

5.3. Prueba de ajuste para un proceso AR(1)

para $n = 50$ observaciones en la figura 5.1 y para $n = 150$ observaciones en la figura 5.2, las constantes críticas para ambos casos se muestran en las tablas 5.2 y 5.3.

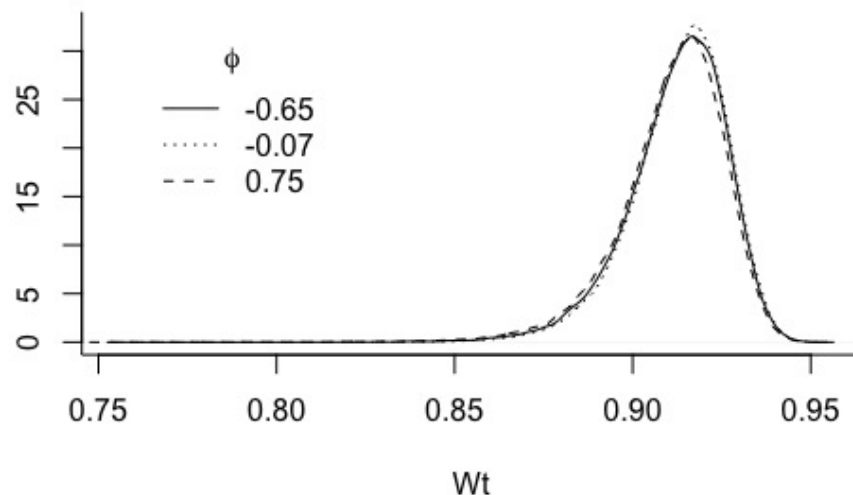


Figura 5.1: Función de densidad de W_n bajo H_0 , con diferentes valores de ϕ y tamaño de muestra $n = 50$.

	α					
ϕ	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
-0.65	0.88148	0.88834	0.80.9531	0.90271	0.90754	0.91137
-0.07	0.87938	0.88648	0.8930.95	0.90179	0.90673	0.91060
0.75	0.87594	0.88429	0.89209	0.9003	0.90546	0.90943

Tabla 5.2: Constantes críticas aproximadas para W_n bajo H_0 , con diferentes valores de ϕ , tamaño de muestra $n = 50$ y diferentes tamaños de prueba α .

5.3. Prueba de ajuste para un proceso AR(1)

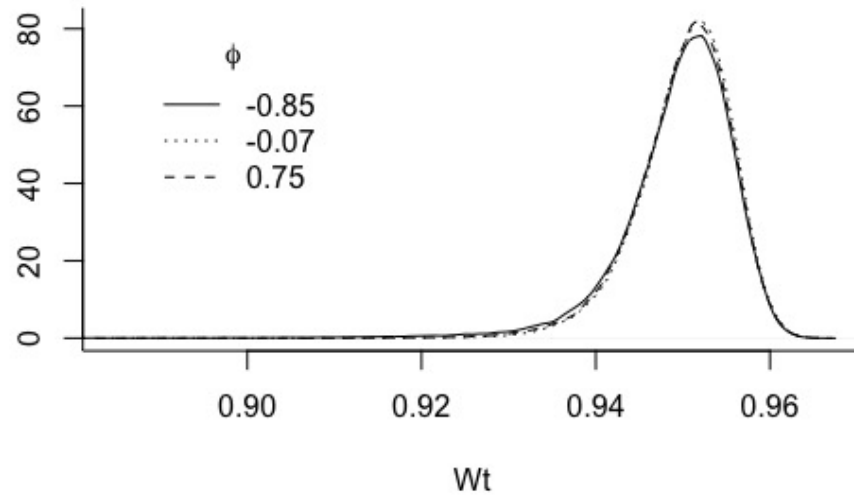


Figura 5.2: Función de densidad de W_n bajo H_0 , con diferentes valores de ϕ y tamaño de muestra $n = 150$.

	α					
ϕ	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
-0.85	-0.93819	0.94088	0.94358	0.946441	0.94828	0.9497504
-0.07	0.93781	0.94055	0.94330	0.94624	0.94811	0.9495852
0.75	0.93707	0.93997	0.942922	0.94594	0.94784	0.9493502

Tabla 5.3: Constantes críticas aproximadas de W_n bajo H_0 con diferentes valores de ϕ , con tamaño de muestra $n = 150$ y diferentes tamaños de prueba α .

5.3. Prueba de ajuste para un proceso AR(1)

5.3.2. Potencia estimada de la prueba

Se estableció un estudio de simulación Monte Carlo para establecer la potencia de la prueba W_n principalmente frente a otros modelos ARMA(p,q) como alternativas.

En primer lugar es importante verificar la sensibilidad de la prueba frente a un proceso gaussiano AR(2) como modelo alternativo. Para este proceso alternativo se generaron datos con diferentes tamaños de muestra para verificar el desempeño de la prueba $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400$ y 500 de procesos AR(2) definidos en 2.7 con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, en este caso se fijó el primer coeficiente autorregresivo $\phi_1 = 0.1$ al segundo coeficiente autorregresivo se le asignaron valores de -1 a 1 para generar procesos gaussianos estacionarios de segundo orden. Para este experimento se llevaron a cabo 1000 réplicas Monte Carlo.

Con la finalidad de comparar los resultados con las pruebas de [Ljung y Box \(1978\)](#) denominada como Q_{LB} , y por otro lado la prueba generalizada de [Peña y Rodríguez \(2006\)](#) denominada Gv , se ajustó a los datos simulados un proceso AR(1) a cada una de las réplicas Monte Carlo y se consideraron $m = 10$ retrasos para ambas pruebas. Los resultados obtenidos son los que se muestran en la tabla 5.4.

Con base en el estudio de simulación, se puede observar que la potencia de la prueba W_n depende del valor de ϕ_2 y el tamaño de muestra n , de modo que cuando $|\phi_2| \geq 0.5$ y el tamaño de muestra $n \geq 300$, la prueba tiene un desempeño comparable con las pruebas Gv y \hat{Q}_{LB} . Cuando el valor de ϕ_2 es cercano a 0, digamos $\phi_2 = 0.001$, la potencia debería alcanzar el valor nominal de la prueba α , lo cual siempre sucede para las pruebas W_n , \hat{Q}_{LB} y Gv tal como ha sido reportado en [Safi y Al-Reqep \(2014\)](#). La prueba que tiene un mejor desempeño para este tipo de procesos es Gv , por esta razón se utilizó esta prueba para comparar el desempeño de W_n frente a otras alternativas.

Con la finalidad de analizar el desempeño de W_n , con modelos alternativos AR(2), donde los errores ε_t no son distribuidos $N(0, \sigma^2)$, se aplicó el estudio de simulación Monte Carlo para varios valores de ϕ_1 y ϕ_2 . El primer coeficiente autorregresivo se fijó en $\phi_1 = 0.1$ y $\phi_2 \in (0, 1)$ y para cada uno de esos procesos se consideró que los errores ε_t tienen una distribución T, $Gumbel(\alpha, \beta)$ y $Laplace(\alpha, \beta)$ y se analizaron tamaños de muestra pequeños, moderados y grandes.

Como se puede observar en la tabla 5.5, para tamaño de muestra $n = 50$, la prueba W_n es sensible a la distribución de ε_t en la mayoría de los casos, excepto para la distribución T con 5 y 7 grados de libertad, esto se debe a que esas distribuciones

5.3. Prueba de ajuste para un proceso AR(1)

son aproximadamente iguales a la distribución normal. Es importante notar que W_n muestra potencia para $\phi_2 = 0.001$ para la mayoría de las distribuciones, mientras que Gv muestra una potencia que es menor que el tamaño nominal α . Esto significa que Gv no es sensible a la distribución de ε_t porque los resultados muestran la misma potencia para cualquier distribución de ε_t .

Para el caso de tamaños de muestra moderados $n = 250$, la potencia de la prueba es casi 1 para cada una de las distribuciones de ε_t , principalmente para aquellos casos en que el valor de ϕ_2 es cercano a 0. Para ε_t con 7 grados de libertad, W_n muestra la potencia más pequeña. Gv muestra una potencia aproximadamente 1 para aquellos casos en los que el coeficiente autorregresivo $\phi_2 \neq 0$, pero para $\phi_2 = 0.001$ muestra una potencia menor que el tamaño nominal de la prueba α , tal como se puede observar en la tabla 5.6.

De acuerdo a los resultados de simulación, la potencia de la prueba W_n depende del tamaño de muestra, de modo que para tamaños de muestra moderados y grandes, es decir $n \geq 250$, W_n es una prueba potente.

Es bien conocido que para un proceso estacionario en covarianza AR(1), los coeficientes autorregresivos incluyen aquellos valores donde $\phi \approx 0$, en estos casos la prueba W_n rechaza H_0 si ε_t no es normalmente distribuido, en este sentido W_n puede considerarse como una generalización del estadístico de Shapiro Wilk para probar tanto normalidad como independencia.

n	Test	$\phi_2 = -0.85$	-0.75	-0.65	-0.55	-0.45	-0.35	-0.25	0.001	0.1	0.2	0.25	0.35	0.4	0.55	0.65	0.75	0.8
50	W_n	0.932	0.803	0.609	0.428	0.274	0.168	0.114	0.045	0.051	0.062	0.075	0.117	0.15	0.329	0.512	0.720	0.817
	Q_{LB}	0.998	0.994	0.95	0.838	0.677	0.432	0.227	0.049	0.049	0.08	0.124	0.249	0.365	0.633	0.843	0.948	0.961
	G_V	0.999	0.999	0.981	0.888	0.723	0.40.99	0.245	0.03	0.031	0.07	0.115	0.281	0.372	0.75	0.887	0.959	0.978
100	W_n	0.995	0.960	0.845	0.644	0.423	0.239	0.137	0.051	0.050	0.075	0.105	0.190	0.248	0.556	0.787	0.936	0.975
	Q_{LB}	1	1	1	0.997	0.944	0.734	0.471	0.061	0.077	0.193	0.293	0.592	0.721	0.978	0.998	0.999	1
	G_V	1	1	1	0.998	0.976	0.837	0.508	0.036	0.055	0.222	0.357	0.725	0.829	0.989	0.999	1	1
150	W_n	0.999	0.989	0.919	0.730	0.475	0.269	0.127	0.039	0.045	0.076	0.109	0.211	0.289	0.668	0.887	0.983	0.995
	W_{LB}	1	1	1	1	0.996	0.885	0.549	0.056	0.083	0.304	0.473	0.83	0.937	0.998	1	1	1
	G_V	1	1	1	1	0.996	0.964	0.701	0.033	0.082	0.368	0.592	0.918	0.971	1	1	1	1
200	W_n	1	0.999	0.973	0.848	0.606	0.348	0.178	0.047	0.059	0.102	0.143	0.296	0.406	0.810	0.958	0.996	0.999
	Q_{LB}	1	1	1	1	0.999	0.967	0.688	0.052	0.114	0.386	0.639	0.946	0.987	1	1	1	1
	G_V	1	1	1	1	1	0.999	0.843	0.031	0.14	0.479	0.732	0.984	0.996	1	1	1	1
250	W_n	1	0.999	0.987	0.899	0.653	0.373	0.174	0.046	0.060	0.101	0.154	0.326	0.455	0.87	0.98	0.999	1
	Q_{LB}	1	1	1	1	0.999	0.996	0.831	0.062	0.123	0.543	0.797	0.984	0.999	1	1	1	1
	G_V	1	1	1	1	1	0.997	0.917	0.043	0.145	0.663	0.88	0.997	1	1	1	1	1
300	W_n	1	0.999	0.992	0.92	0.675	0.367	0.160	0.039	0.046	0.088	0.143	0.336	0.473	0.897	0.99	0.999	1
	Q_{LB}	1	1	1	1	1	0.998	0.901	0.034	0.178	0.65	0.853	0.992	1	1	1	1	1
	G_V	1	1	1	1	1	1	0.965	0.038	0.174	0.73	0.92	0.999	1	1	1	1	1
350	W_n	1	1	0.995	0.927	0.684	0.346	0.137	0.029	0.036	0.076	0.122	0.316	0.464	0.912	0.993	0.99	1
	Q_{LB}	1	1	1	1	1	1	0.938	0.059	0.193	0.715	0.916	0.998	1	1	1	1	1
	G_V	1	1	1	1	1	1	0.972	0.04	0.233	0.845	0.975	1	1	1	1	1	1
400	W_n	1	1	0.998	0.958	0.752	0.401	0.162	0.03	0.044	0.092	0.146	0.376	0.539	0.945	0.997	1	1
	Q_{LB}	1	1	1	1	1	1	0.964	0.047	0.229	0.798	0.955	1	1	1	1	1	1
	G_V	1	1	1	1	1	1	0.984	0.036	0.267	0.883	0.985	1	1	1	1	1	1
500	W_n	1	1	0.999	0.9791	0.798	0.453	0.171	0.029	0.041	0.092	0.146	0.409	0.595	0.974	0.995	1	1
	Q_{LB}	1	1	1	1	1	1	0.989	0.047	0.28	0.894	0.988	1	1	1	1	1	1
	G_V	1	1	1	1	1	1	1	0.027	0.327	0.958	0.997	1	1	1	1	1	1

Tabla 5.4: Potencia estimada de las pruebas W_n , Q_{LB} y G_V versus procesos AR(2) con diferentes valores de ϕ_2 y $\phi_1 = 0.1$, para diferentes tamaños de muestra y $\alpha = 0.05$.

Distribución	Test	$\phi_2 = -0.85$	-0.75	-0.65	-0.55	-0.45	-0.35	-0.25	0.001	0.1	0.2	0.25	0.35	0.4	0.55	0.65	0.75	0.8
T 3 gl	W_n	0.951	0.839	0.747	0.658	0.583	0.605	0.599	0.595	0.545	0.565	0.565	0.564	0.565	0.617	0.715	0.802	0.884
	Gv	1	0.996	0.981	0.934	0.809	0.603	0.288	0.021	0.031	0.071	0.136	0.307	0.453	0.804	0.924	0.973	0.985
T 5 gl	W_n	0.935	0.79	0.669	0.517	0.427	0.356	0.352	0.3	0.317	0.308	0.32	0.314	0.351	0.466	0.571	0.746	0.849
	Gv	0.999	0.997	0.991	0.931	0.803	0.577	0.313	0.023	0.023	0.087	0.141	0.326	0.454	0.823	0.938	0.981	0.993
T 7 gl	W_n	0.934	0.824	0.634	0.476	0.346	0.301	0.247	0.183	0.187	0.196	0.205	0.235	0.241	0.391	0.536	0.743	0.84
	Gv	0.999	0.999	0.982	0.924	0.805	0.567	0.326	0.026	0.026	0.083	0.135	0.354	0.438	0.822	0.932	0.975	0.992
Laplace(0,1)	W_n	0.936	0.84	0.668	0.537	0.51	0.466	0.486	0.467	0.461	0.414	0.409	0.401	0.398	0.476	0.596	0.776	0.852
	Gv	1	0.999	0.982	0.941	0.791	0.569	0.313	0.02	0.024	0.102	0.136	0.304	0.466	0.813	0.931	0.99	0.986
Laplace(0,4)	W_n	0.938	0.813	0.658	0.523	0.46	0.474	0.454	0.438	0.416	0.407	0.423	0.427	0.403	0.502	0.622	0.768	0.856
	Gv	0.999	0.994	0.992	0.93	0.804	0.582	0.312	0.024	0.029	0.082	0.129	0.309	0.463	0.802	0.921	0.983	0.992
Gumbel(3,4)	W_n	0.936	0.815	0.687	0.575	0.507	0.533	0.542	0.497	0.497	0.555	0.57	0.593	0.662	0.754	0.828	0.928	0.946
	Gv	1	0.998	0.986	0.941	0.812	0.572	0.3	0.035	0.032	0.074	0.147	0.316	0.457	0.836	0.941	0.98	0.995

Tabla 5.5: Potencia estimada de las pruebas W_n y Gv versus procesos AR(2) para diferentes valores de ϕ_2 y $\phi_1 = 0.1$, $n = 50$ y ε_t distribuido T con 3, 5 y 7 grados de libertad, Laplace(0, 1), Laplace(0, 4) y Gumbel(0, 4).

Distribución	Test	$\phi_2 = -0.85$	-0.75	-0.65	-0.55	-0.45	-0.35	-0.25	0.001	0.1	0.2	0.25	0.35	0.4	0.55	0.65	0.75	0.8
T 3 gl	W_n	1	1	0.999	0.996	0.995	0.997	0.996	0.996	0.993	0.995	0.99	0.989	0.995	0.995	0.996	1	1
	Gv	1	1	1	1	1	0.999	0.951	0.03	0.187	0.74	0.914	0.996	1	1	1	1	1
T 5 gl	W_n	1	1	0.995	0.971	0.919	0.913	0.875	0.84	0.855	0.866	0.849	0.879	0.901	0.955	0.995	1	1
	Gv	1	1	1	1	1	1	0.945	0.026	0.181	0.723	0.919	0.999	1	1	1	1	1
T 7 gl	W_n	1	1	0.994	0.962	0.86	0.736	0.682	0.61	0.608	0.642	0.645	0.74	0.775	0.924	0.988	0.999	1
	Gv	1	1	1	1	1	1	0.095	0.024	0.193	0.741	0.927	0.998	1	1	1	1	1
Laplace(0,1)	W_n	1	1	0.995	0.981	0.98	0.971	0.983	0.986	0.979	0.978	0.971	0.962	0.97	0.985	0.994	1	1
	Gv	1	1	1	1	1	0.998	0.949	0.027	0.16	0.755	0.923	1	1	1	1	1	1
Laplace(0,4)	W_n	1	1	0.995	0.984	0.979	0.973	0.976	0.985	0.985	0.982	0.971	0.979	0.966	0.977	0.996	1	1
	Gv	1	1	1	1	1	1	0.947	0.033	0.173	0.734	0.913	0.998	0.999	1	1	1	1
Gumbel(3,4)	W_n	1	0.999	1	0.993	0.992	0.992	0.987	0.985	0.971	0.984	0.985	0.994	0.992	0.999	1	1	1
	Gv	1	1	1	1	1	0.999	0.944	0.031	0.18	0.731	0.923	0.999	1	1	1	1	1

Tabla 5.6: Potencia estimada de las pruebas W_n y Gv versus procesos AR(2) para diferentes valores de ϕ_2 y $\phi_1 = 0.1$, $n = 250$ y ε_t distribuido T con 3, 5 y 7 grados de libertad, Laplace(0, 1), Laplace(0, 4) y Gumbel(0, 4).

5.4. Prueba de ajuste para un proceso AR(2)

Para una serie $\{X_t\}$ generada a partir de un proceso AR(2) definido en la expresión 2.7:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t,$$

que cumple con las condiciones de estacionariedad de segundo orden y con el cual se puede probar el siguiente juego de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 : X_t \text{ es una realización de un proceso gaussiano } AR(2) \quad vs \\ H_1 : X_t \text{ no es una realización un proceso gaussiano } AR(2) \end{aligned}$$

El vector de observaciones \mathbf{X}_t se transforman con base en la proposición 5.2, en donde la matriz de covarianza $\hat{\Sigma}$ que es un estimador de la matriz Σ definida en 5.5, se construye a partir de las expresiones descritas en 5.4:

$$\gamma_X(j) = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} \quad \text{para } j > 2$$

donde $\gamma_X(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \gamma_X(0)$, $\gamma_X(2) = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \gamma_X(0)$ y $\gamma_X(0) = \frac{(1-\phi_2)\sigma_\epsilon^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2]}$.

Como resultado de la transformación del vector de observaciones \mathbf{X}_t , se obtiene el vector de datos transformados \mathbf{Z}_t^* que se utiliza para calcular el estadístico W_n definido en 5.8. Los valores críticos para la prueba W_n se aproximan siguiendo un algoritmo similar al implementado para hallar las constantes críticas de W_n con un proceso AR(1) bajo H_0 . Las constantes críticas aproximadas son las que se muestran en la tabla 5.7.

La prueba rechaza H_0 con un tamaño de prueba $\alpha \in (0, 1)$, si $W_n < K_\alpha$, donde k_α es el cuantil $Q_{\alpha;n}$ de la distribución de W_n bajo H_0 , la cual podemos denotar como F_{W_n} y que se aproxima por medio de un proceso de simulación Monte Carlo.

5.4. Prueba de ajuste para un proceso AR(2)

n	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
50	0.88407	0.89093	0.89782
100	0.92254	0.926111	0.92997
150	0.93897	0.94156	0.94421
200	0.94849	0.95050	0.95260
250	0.9549	0.95652	0.95816
300	0.9594	0.96077	0.96220
350	0.96297	0.96412	0.96533
400	0.96573	0.96677	0.9678
500	0.96994	0.97078	0.97164

Tabla 5.7: Constantes críticas para W_n para un proceso AR(2) bajo H_0 , considerando diferentes tamaños de muestra n y diferentes tamaños de prueba α .

5.4.1. Resultados

Para verificar las propiedades de invarianza ante localidad y escala de W_n , se implementó un estudio de simulación Monte Carlo para aproximar la distribución de W_n bajo H_0 con tamaños de muestra pequeños, moderados y grandes. En la figura 5.3, se muestra a manera de ejemplo, la forma de la densidad de W_n bajo H_0 considerando $n = 250$ observaciones, asimismo las constantes críticas obtenidas del percentil $100\alpha\%$ de F_{W_n} bajo las mismas condiciones, son las que se muestran en la tabla 5.8.

	α					
ϕ_2	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
-0.65	0.93882	0.94142	0.94416	0.94702	0.94887	0.95032
-0.07	0.92826	0.93516	0.94040	0.94473	0.94711	0.9488
0.65	0.93497	0.93875	0.94225	0.94564	0.94771	0.94929

Tabla 5.8: Constantes críticas aproximadas de W_n bajo H_0 con $\phi_1 = 0.1$, diferentes valores de ϕ_2 , con tamaño de muestra $n = 250$ y diferentes tamaños de prueba α .

Como se puede corroborar con los valores mostrados en la Tabla 5.8, el estadístico propuesto W_n es invariante ante localidad y escala también para procesos AR(2).

5.4. Prueba de ajuste para un proceso AR(2)

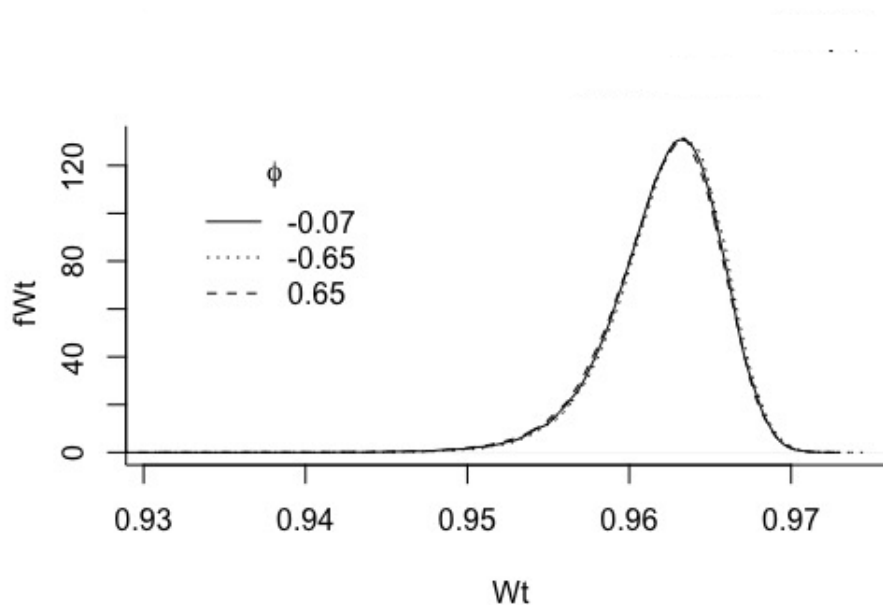


Figura 5.3: Función de densidad del estadístico W_n bajo H_0 para $n = 250$ observaciones de un proceso AR(2) con coeficientes de regresión $\phi_1 = 0.1$ y $\phi_2 = -0.07, -0.65$ y 0.65 respectivamente.

5.4.2. Potencia estimada de la prueba

Con base en los resultados de la potencia de la prueba W_n para un proceso AR(1) bajo H_0 obtenidos por simulación Monte Carlo, resulta de mayor interés conocer la potencia con diferentes procesos alternativos y con errores ε_t con una distribución distinta a la $N(0, \sigma^2)$.

En primer lugar se analizó la potencia de la prueba para un proceso ARMA(1,1) como alternativa, el cual se define de la forma siguiente:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t,$$

para esto se fijó un valor del coeficiente $\phi = 0.1$ y se asignaron valores al coeficiente θ en el intervalo $(-0.75, 0.7)$. Las simulaciones se hicieron con un tamaño de prueba $\alpha = 0.05$ y diferentes tamaños de muestra n . Por su parte, en la prueba Gv se incluyeron $m = 10$ retrasos para calcular el estadístico de prueba. Los resultados comparativos con la prueba Gv se obtuvieron mediante simulación Monte Carlo con 1000 réplicas, y se muestran en la Tabla 5.9.

5.4. Prueba de ajuste para un proceso AR(2)

Como se puede observar en la Tabla 5.9, la prueba propuesta W_n muestra una potencia superior a 0.5 en la mayoría de los procesos AR(2) para un tamaño de muestra $n = 50$, conforme se incrementa el tamaño de muestra, la potencia de la prueba W_n se aproxima a 1; sin embargo, para la potencia de la prueba G_v es relativamente baja para la mayoría de los procesos, y solamente se aproxima a 1 cuando el parámetro θ se aproxima a 1 y cuando el tamaño de muestra es grande.

Se estudió la potencia de la prueba con un proceso MA(2) como alternativa, la forma de dicho modelo es como se muestra a continuación:

$$X_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t,$$

para la simulación Monte Carlo se utilizaron diferentes tamaños de muestra. Se fijó el primer parámetro en $\theta_1 = 1$ y se le asignaron al segundo parámetro θ_2 valores en el intervalo $(-1,1)$, la distribución de ε_t se asumió como T con 4 grados de libertad y *Laplace*(0, 4) y nuevamente se considera el tamaño de la prueba $\alpha = 0.05$. Se generaron 1000 réplicas Monte Carlo. Los resultados se muestran en la Tabla 5.10.

Como se puede observar en la Tabla 5.10 la prueba W_n resulta ser un poco más sensible cuando los errores se distribuyen *Laplace*(0,4) que cuando se distribuyen T con 4 grados de libertad, en ambos casos la potencia depende en gran medida del tamaño de la muestra. Por su parte, la prueba G_v muestra aproximadamente la misma potencia sin importar cuál sea la distribución de ε_t , lo cual se puede verificar en la Tabla 5.11.

n	Test	$\theta_1 = -0.75$	-0.65	-0.55	-0.45	-0.35	-0.25	0.001	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.6	0.7
50	W_n	0.58	0.561	0.576	0.594	0.586	0.50.98	0.561	0.582	0.607	0.545	0.559	0.567	0.578	0.568
	Gv	0.157	0.083	0.044	0.027	0.013	0.014	0.009	0.011	0.008	0.009	0.018	0.025	0.063	0.111
100	W_n	0.825	0.847	0.858	0.821	0.84	0.837	0.822	0.854	0.847	0.838	0.84	0.855	0.843	0.836
	Gv	0.483	0.25	0.089	0.054	0.022	0.014	0.017	0.021	0.02	0.027	0.034	0.071	0.191	0.439
150	W_n	0.939	0.943	0.958	0.933	0.943	0.939	0.934	0.95	0.941	0.938	0.954	0.938	0.938	0.928
	Gv	0.727	0.389	0.136	0.053	0.036	0.022	0.027	0.024	0.009	0.027	0.042	0.129	0.321	0.704
200	W_n	0.977	0.98	0.987	0.981	0.988	0.984	0.98	0.989	0.981	0.985	0.985	0.985	0.974	0.971
	Gv	0.906	0.512	0.193	0.058	0.02	0.019	0.024	0.027	0.029	0.03	0.058	0.165	0.481	0.883
250	W_n	0.993	0.996	0.989	0.996	0.994	0.993	0.994	0.994	0.995	0.993	0.996	0.995	0.993	0.994
	Gv	0.954	0.641	0.263	0.07	0.034	0.024	0.029	0.031	0.021	0.026	0.086	0.232	0.606	0.951
300	W_n	0.998	0.999	0.999	1	0.997	0.998	1	0.996	0.996	0.995	0.999	0.994	0.999	1
	Gv	0.983	0.746	0.315	0.081	0.036	0.018	0.015	0.031	0.031	0.03	0.09	0.288	0.741	0.977

Tabla 5.9: Potencia estimada de las pruebas W_n y Gv versus procesos ARMA(1,1) para diferentes valores de θ_1 y $\phi_1 = 0.1$, ε_t distribuidos T con 3 grados de libertad, diferentes tamaños de muestra y $\alpha = 0.05$.

n	ε_t	$\theta_2 = -1$	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	-0.2	0.001	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1
50	T 4 gl	0.129	0.125	0.155	0.189	0.211	0.269	0.28	0.313	0.313	0.336	0.323	0.315	0.307	0.276
	Laplace(0,4)	0.14	0.123	0.14	0.175	0.222	0.262	0.334	0.332	0.382	0.435	0.424	0.309	0.391	0.335
100	T 4 gl	0.207	0.204	0.233	0.308	0.354	0.398	0.489	0.525	0.537	0.578	0.531	0.518	0.54	0.492
	Laplace(0,4)	0.191	0.209	0.23	0.275	0.374	0.442	0.533	0.6	0.661	0.708	0.718	0.711	0.625	0.546
150	T 4 gl	0.29	0.308	0.314	0.386	0.496	0.549	0.59	0.657	0.694	0.701	0.689	0.687	0.715	0.67
	Laplace(0,4)	0.281	0.312	0.344	0.396	0.529	0.592	0.719	0.762	0.845	0.871	0.861	0.863	0.787	0.672
200	T 4 gl	0.35	0.376	0.409	0.441	0.554	0.642	0.696	0.757	0.803	0.81	0.814	0.78	0.786	0.758
	Laplace(0,4)	0.349	0.366	0.417	0.487	0.614	0.733	0.826	0.877	0.92	0.943	0.948	0.939	0.89	0.802
250	T 4 gl	0.417	0.384	0.48	0.527	0.692	0.734	0.70.98	0.835	0.862	0.883	0.869	0.87	0.88	0.838
	Laplace(0,4)	0.431	0.439	0.529	0.578	0.737	0.819	0.879	0.926	0.96	0.981	0.984	0.973	0.947	0.894
300	T 4 gl	0.505	0.484	0.495	0.598	0.709	0.782	0.854	0.883	0.904	0.92	0.922	0.9	0.925	0.873
	Laplace(0,4)	0.484	0.509	0.56	0.638	0.79	0.855	0.926	0.967	0.982	0.99	0.991	0.988	0.966	0.923
350	T 4 gl	0.495	0.518	0.593	0.668	0.806	0.826	0.891	0.915	0.944	0.958	0.946	0.937	0.954	0.925
	Laplace(0,4)	0.544	0.568	0.631	0.725	0.841	0.918	0.959	0.981	0.996	0.998	0.994	0.995	0.98	0.951
400	T 4 gl	0.549	0.564	0.636	0.679	0.836	0.863	0.913	0.941	0.961	0.966	0.969	0.967	0.959	0.946
	Laplace(0,4)	0.613	0.617	0.656	0.775	0.866	0.94	0.979	0.994	0.997	0.999	0.996	0.998	0.994	0.971
500	T 4 gl	0.639	0.673	0.731	0.762	0.888	0.918	0.956	0.982	0.988	0.991	0.984	0.987	0.986	0.97
	Laplace(0,4)	0.707	0.711	0.72	0.867	0.945	0.974	0.991	0.999	1	1	1	1	1	0.981

Tabla 5.10: Potencia estimada de la prueba W_n versus procesos MA(1,1) con ε_t distribuido T con 4 grados de libertad y Laplace(0,4), para diferentes valores de $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 \in [-1, 1]$, diferentes tamaños de muestra y $\alpha = 0.05$.

n	ε_t	$\theta_2 = -1$	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	-0.2	0.001	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1
50	T 4 gl	0.038	0.033	0.058	0.104	0.249	0.364	0.436	0.422	0.303	0.184	0.074	0.097	0.475	0.684
	Laplace(0,4)	0.042	0.028	0.046	0.116	0.253	0.353	0.454	0.421	0.301	0.149	0.085	0.107	0.487	0.715
100	T 4 gl	0.085	0.078	0.168	0.375	0.749	0.887	0.939	0.922	0.782	0.448	0.238	0.414	0.929	0.993
	Laplace(0,4)	0.102	0.101	0.151	0.361	0.733	0.885	0.936	0.93	0.814	0.487	0.24	0.439	0.938	0.988
150	T 4 gl	0.133	0.146	0.324	0.644	0.954	0.987	0.994	0.997	0.966	0.742	0.403	0.711	0.995	0.999
	Laplace(0,4)	0.145	0.141	0.295	0.638	0.961	0.989	0.998	0.998	0.947	0.731	0.405	0.704	0.995	1
200	T 4 gl	0.218	0.229	0.483	0.817	0.991	0.998	1	1	0.997	0.896	0.584	0.861	1	1
	Laplace(0,4)	0.246	0.215	0.438	0.837	0.994	1	1	1	0.996	0.88	0.569	0.869	1	1
250	T 4 gl	0.281	0.261	0.566	0.931	0.999	1	1	1	1	0.943	0.714	0.952	1	1
	Laplace(0,4)	0.253	0.318	0.585	0.925	0.998	1	1	1	1	0.939	0.697	0.943	1	1
300	T 4 gl	0.323	0.385	0.68	0.971	0.999	1	1	1	1	0.989	0.819	0.989	1	1
	Laplace(0,4)	0.332	0.353	0.694	0.959	1	1	1	1	1	0.974	0.796	0.98	1	1
350	T 4 gl	0.379	0.45	0.815	0.994	1	1	1	1	1	0.995	0.872	0.992	1	1
	Laplace(0,4)	0.41	0.428	0.778	0.988	1	1	1	1	1	0.994	0.879	0.998	1	1
400	T 4 gl	0.471	0.513	0.858	0.998	1	1	1	1	1	0.998	0.914	0.998	1	1
	Laplace(0,4)	0.482	0.524	0.853	0.997	1	1	1	1	1	0.999	0.921	1	1	1
500	T 4 gl	0.604	0.627	0.941	1	1	1	1	1	1	1	0.972	1	1	1
	Laplace(0,4)	0.631	0.623	0.943	0.999	1	1	1	1	1	1	0.975	1	1	1

Tabla 5.11: Potencia estimada de la prueba Gv versus procesos MA(1,1) con ε_t distribuido T con 4 grados de libertad y Laplace(0,4), para diferentes valores de $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 \in [-1, 1]$, diferentes tamaños de muestra y $\alpha = 0.05$.

5.5. Una aplicación: registros diarios de precipitación pluvial

Los registros diarios de precipitación y otras variables ambientales se han analizado como una serie de tiempo por medio de procesos ARIMA (Tularam y Ilahee, 2010), incluso se han analizado concentraciones de partículas en el fenómeno conocido como *lluvia ácida* utilizando dichos procesos, (Nickerson y Madsen, 2005). Sin embargo, se ha reportado que este tipo de datos no se puede considerar como una serie de tiempo gaussiana (Damsleth y El-Shaarawi, 1989). En este sentido, se propone probar si los datos de precipitación diaria registrados por la estación agrometeorológica Montecillo se comportan como proceso autorregresivo de medias móviles gaussiano ARMA(1,1).

Los datos corresponden al registro de precipitación diaria en un periodo de 1 días en la estación agrometeorológica de Montecillo iniciando el 6 de junio de 2008. Las observaciones se consideraron durante este periodo debido a que en este conjunto no se encuentran datos perdidos y se consideró un tamaño de muestra $n = 1$. A los datos originales se les aplicó una diferenciación para considerarlos como estacionarios y se muestran en la Figura 5.4.

El proceso que mejor se ajusta a este conjunto de datos es un proceso ARMA(1,1) el cual se define de la forma:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.10)$$

Para verificar que el proceso propuesto es el adecuado, se utilizó el criterio de AIC y las pruebas de Ljung y Box (1978) y la prueba de varianza generalizada Gv propuesta por Peña y Rodríguez (2006) que, como se ha mencionado, son las que tienen un mejor desempeño de acuerdo a lo reportado en la literatura. Se estableció como tamaño de la prueba $\alpha = 0.05$.

La prueba de Ljung y Box, no rechaza la hipótesis nula de que los datos provienen de un proceso gaussiano ARMA(1,1) con $pvalor = 0.9357$, para esta prueba se utilizaron 10 retrasos, ya que se ha reportado que con este número de retrasos para $n = 100$, muestra una muy buena potencia, (Safi y Al-Reqep, 2014). Por otra parte, la prueba generaliza Gv no rechaza la hipótesis nula de que los datos provienen de un proceso gaussiano ARMA(1,1) con $pvalor = 0.3701$, este resultado se obtiene implementando la prueba con $m = 5$ retrasos; no se rechaza la hipótesis de que los datos provienen de un proceso gaussiano ARMA(1,1) y con un $pvalor = 0.7908$ si se implementa la prueba con $m = 10$ retrasos.

5.5. Una aplicación: registros diarios de precipitación pluvial

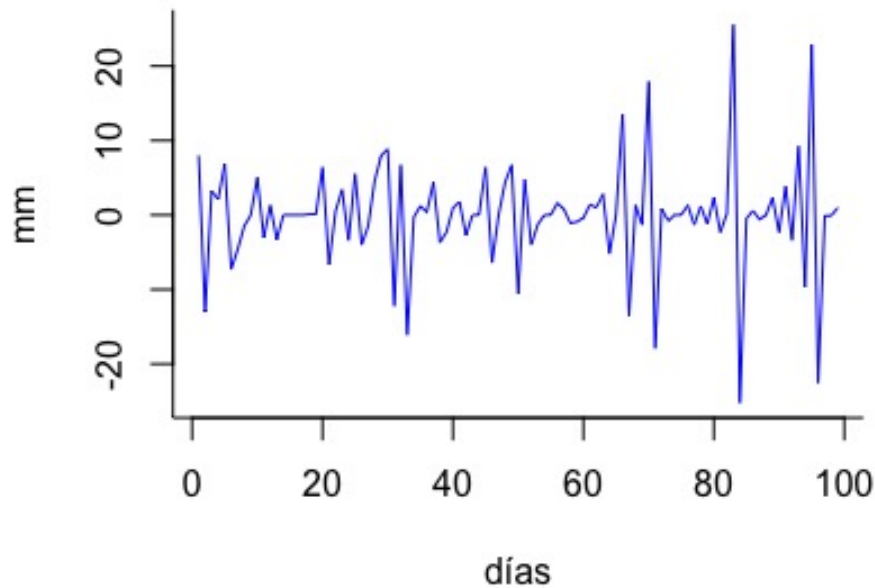


Figura 5.4: Registros diarios de precipitación pluvial registrados en el periodo junio–septiembre de 2008, con una diferencia.

Se consideró de interés implementar la prueba W_n para $n = 100$ para probar el siguiente juego de hipótesis:

$H_0 : X_t$ es una realización de un proceso gaussiano $ARMA(1, 1)$ vs

$H_1 : X_t$ no es una realización un proceso gaussiano $ARMA(1, 1)$

Se ha mencionado que la parte medular de la prueba W_n consiste en definir adecuadamente la matriz $\hat{\Sigma}$ que estima a la matriz Σ definida en 5.5 $\hat{\Sigma}$, que se utiliza para transformar el vector de observaciones \mathbf{X} con base en la proposición 5.2. La función de autocovarianza utilizada para construir la matriz de covarianzas del proceso 5.10 es la siguiente:

5.5. Una aplicación: registros diarios de precipitación pluvial

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_X(0) &= \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{1 + 2\hat{\phi}\hat{\theta} + \hat{\theta}^2}{1 - \hat{\phi}^2} \\ \hat{\gamma}_X(1) &= \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{(\hat{\phi} + \hat{\theta})(1 + \hat{\phi}\hat{\theta})}{1 - \hat{\phi}^2} \\ \hat{\gamma}_X(h) &= \hat{\phi}\hat{\gamma}_X(h-1),\end{aligned}$$

donde $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\phi}$ y $\hat{\theta}$ se obtienen al ajustar un proceso ARMA(1,1) mediante la metodología de [Box y Jenkins \(1970\)](#) a los valores que resultan de aplicar una diferencia a los datos observados originalmente.

Las constantes críticas aproximadas para W_n bajo H_0 , se aproximaron mediante simulación Monte Carlo y se muestran en la [Tabla 5.12](#), para un tamaño de muestra $n = 100$:

n	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
100	0.9071	0.9159	0.9236

Tabla 5.12: Constantes críticas para W_n bajo H_0 con tamaño de muestra $n = 100$ y diferentes tamaños de prueba α .

Aplicando la prueba W_n al conjunto de datos, resulta que la prueba rechaza H_0 con un tamaño de prueba $\alpha = 0.05$, esto indica que, de acuerdo a la prueba W_n ε_t del proceso [5.10](#) no se distribuye $N(0, \sigma^2)$.

Mediante el criterio de AIC, el proceso ARMA(1,1) ajustado es de la forma siguiente:

$$X_t = 0.1_1 X_{t-1} - \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (5.11)$$

esto asumiendo erróneamente que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Si el proceso ARMA(1,1) describiera adecuadamente los registros diarios de precipitación pluvial, los residuales de dicho proceso no deben estar correlacionados, esto se verifica mediante las funciones de autocorrelaciones (ACF) y de autocorrelaciones parciales (PACF), siendo las que se muestran en las [Figuras 5.5](#) y [5.6](#).

Resta comprobar que los residuales del proceso [5.11](#) tienen una distribución normal. La función de densidad de dichos residuales es la que se muestra en la [Figura 5.7](#).

En la [Figura 5.7](#), se observa que la media de los residuales es diferente de 0 y para

5.5. Una aplicación: registros diarios de precipitación pluvial

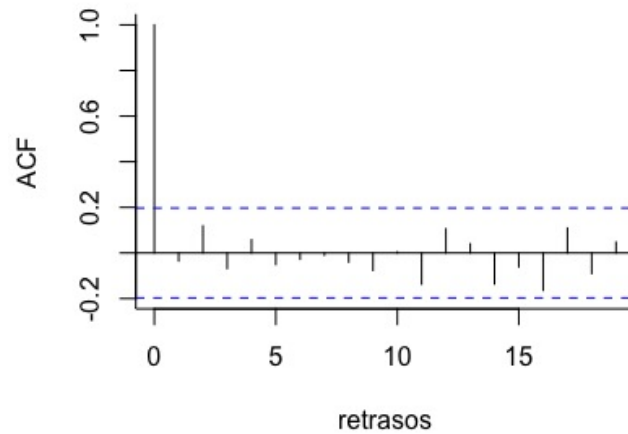


Figura 5.5: Función de autocorrelaciones de los residuales del proceso ajustado.

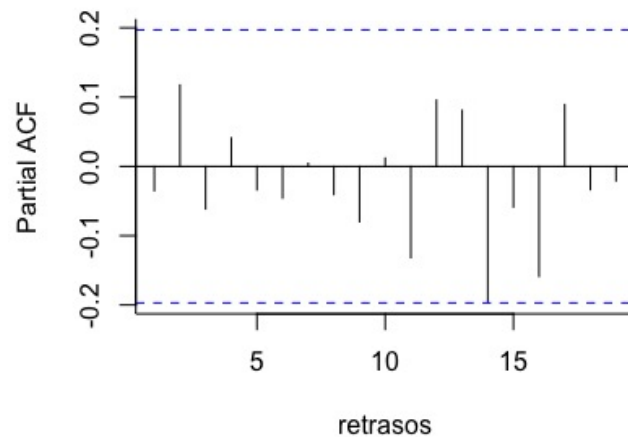


Figura 5.6: Función de autocorrelaciones parciales de los residuales del proceso ajustado.

verificar que ε_t no se distribuye $N(0, \sigma^2)$, la literatura sugiere utilizar la gráfica Q-Q norm, la cual se muestra en la Figura 5.8 que sugiere la no normalidad de los residuales.

Con base en lo anterior, el modelo ARMA(1,1) no es el más adecuado para describir

5.5. Una aplicación: registros diarios de precipitación pluvial

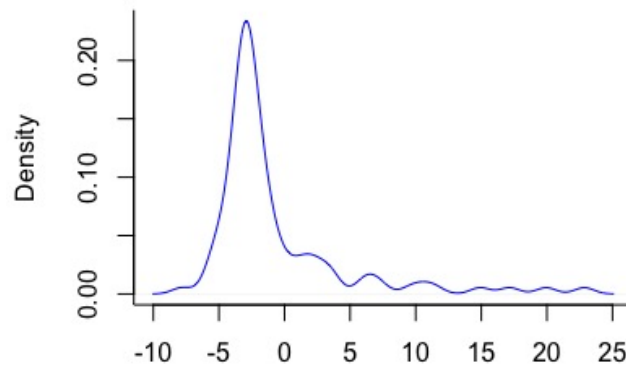


Figura 5.7: Función de autocorrelaciones parciales de los residuales del proceso ajustado.

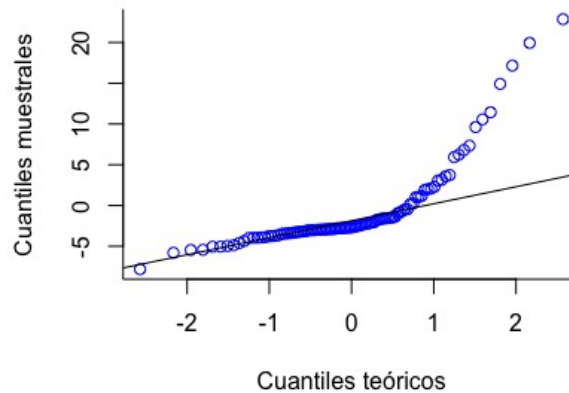


Figura 5.8: Gráfica Q-Q norm de los residuales del proceso ajustado.

el conjunto de datos de precipitación pluvial; sin embargo las pruebas de Ljung y Box y la prueba generalizada Gv indican que hay evidencia de que realmente es un modelo apropiado, no así la prueba propuesta W_n .

Capítulo 6

Conclusiones

Con base en el estudio de simulación implementado para analizar cada una de las pruebas de ajuste propuestas, se concluye lo siguiente:

- La prueba propuesta como una razón del estimador de la varianza muestral y de la varianza calculada con base en la densidad espectral de un modelo propuesto (R_n), mostró que no es sensible al modelo propuesto bajo H_0 ni al tamaño de la muestra.
- La función de densidad espectral es una forma de representar la función de covarianza o de correlación de un proceso de covarianza estacionaria, esta función de densidad depende de los parámetros del modelo ajustado bajo H_0 y la varianza de los residuales, con base en los resultados obtenidos del proceso Monte Carlo, es conveniente formular una prueba basada únicamente en la razón de dicha varianza.
- La propuesta de una prueba basada en la razón de la varianza de los residuales de dos modelos propuestos (U_n), es una muy buena opción para poder distinguir entre dos modelos anidados, como es el caso de los procesos AR(1) y AR(2). Los resultados obtenidos del proceso Monte Carlo implementado revelan que la prueba U_n es más potente que las pruebas reportadas en la literatura.
- La prueba U_n puede ser extendida a otros modelos ARMA(p,q) estacionarios en covarianza.
- La estructura de correlación de un proceso ARMA(p,q) lo define completamente, por lo tanto es factible transformar una serie de tiempo $\{X_t\}$ con base en dicha estructura de correlación para implementar una prueba de ajuste para series de tiempo.

6. Conclusiones

- La prueba propuesta W_n incluye una modificación de la prueba de Shapiro-Wilk para probar normalidad, con base en un estudio de simulación Monte Carlo se concluye que preserva las propiedades de invarianza ante localidad y escala.
- La prueba W_n , no depende de un número de retrasos –establecido de forma arbitraria para las pruebas portmanteau- y por lo tanto analiza toda la estructura de dependencia de un proceso determinado.
- La prueba W_n es una prueba potente para aquellos procesos estacionarios en covarianza en los que los errores no se distribuyen $N(0, \sigma^2)$, su estadístico de prueba está basado en una transformación de los datos que depende fuertemente de la función de autocovarianza del proceso considerado bajo H_0 . Para implementar la prueba W_n para otros procesos $ARMA(p, q)$, se requiere determinar la función de autocovarianza utilizando diferentes métodos que se muestran en la mayor parte de la literatura de series de tiempo.

Bibliografía

- Anderson, T. W. (1993). Goodness of fit tests for spectral distributions. *The Annals of Statistics*, 21, 2, 830–847.
- Anderson, T. W. (1997). Goodness-of-fit tests for autoregressive processes. *Journal of time series analysis*, 18, 4, 321–339.
- Arsham, H. (2013). Adaptative K-S Tests for white noise in the frequency domain. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 82, 4, 521–529.
- Box, G. y Jenkins, G. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day.
- Box, G. E. y Pierce, D. A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American statistical Association*, 65, 332, 1509–1526.
- Brockwell, P. J. y Davis, R. A. (1991). *Time series: theory and methods*. Springer Science; Business Media.
- Broersen, P. M. (2000). Facts and fiction in spectral analysis. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 49, 4, 766–772.
- Burns, P. (2002). Robustness of the Ljung-Box test and its rank equivalent. *Available at SSRN 443560*.
- Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical inference*, tomo 2. Duxbury Pacific Grove, CA.
- Chen, S. X., Härdle, W. y Li, M. (2003). An empirical likelihood goodness-of-fit test for time series. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 65, 3, 663–678.
- Chen, Y.-T. *et al.* (2002). On the robustness of Ljung-Box and McLeod-Li Q tests: a simulation study. *Economics Bulletin*, 3, 17, 1–10.
- Christiano, L. J. y Vigfusson, R. J. (2003). Maximum likelihood in the frequency domain: the importance of time-to-plan. *Journal of Monetary Economics*, 50, 4, 789–815.

Bibliografía

- Coghlan, A. (2014). A Little Book of R For Time Series. *Release 0.2*.
- Crujeiras, R. M., Fernández-Casal, R. y González-Manteiga, W. (2010). Goodness-of-fit tests for the spatial spectral density. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 24, 1, 67–79.
- Dahlhaus, R., Janas, D. *et al.* (1996). A frequency domain bootstrap for ratio statistics in time series analysis. *The Annals of Statistics*, 24, 5, 1934–1963.
- Damsleth, E. y El-Shaarawi, A. (1989). ARMA models with double-exponentially distributed noise. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 51, 1, 61–69.
- Davies, N., Triggs, C. y Newbold, P. (1977). Significance levels of the Box-Pierce portmanteau statistic in finite samples. *Biometrika*, 64, 3, 517–522.
- Fan, J. y Kreutzberger, E. (1998). Automatic local smoothing for spectral density estimation. *Scandinavian Journal of Statistics*, 25, 2, 359–369.
- Fan, J. y Zhang, W. (2004). Generalised likelihood ratio tests for spectral density. *Biometrika*, 91, 1, 195–209.
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*, tomo I. John Wiley & Sons, Inc.
- Grenander, U. y Rosenblatt, M. (1953). Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24, 4, 537–558.
- Guerrero, V. M. (2003). *Análisis estadístico de series de tiempo económicas*. Editorial Thomson.
- Kay, S. M. y Marple Jr, S. L. (1981). Spectrum analysis—a modern perspective. *Proceedings of the IEEE*, 69, 11, 1380–1419.
- Kwan, C. K. y Wu, Y. (1997). Further results on the finite-sample distribution of Monti’s portmanteau test for the adequacy of an ARMA (p, q) model. *Biometrika*, 84, 3, 733–736.
- Lee, T. C. (1997). A simple span selector for periodogram smoothing. *Biometrika*, 84, 4, 965–969.
- Lee, T. C. (2001). A stabilized bandwidth selection method for kernel smoothing of the periodogram. *Signal processing*, 81, 2, 419–430.
- Lee, T. C. y Wong, T. F. (2003). Nonparametric log spectrum estimation using disconnected regression splines and genetic algorithms. *Signal Processing*, 83, 1, 79–90.

Bibliografía

- Lin, J.-W. y McLeod, A. (2006). Improved Peña-Rodríguez portmanteau test. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 3, 1731–1738.
- Ljung, G. M. y Box, G. E. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65, 2, 297–303.
- Mahdi, E., Xiao, K. J. y McLeod, A. I. (2013). Portmanteau Tests for Univariate and Multivariate Time Series Models.
- Marmol, F. (1995). The Stationarity Conditions for an AR (2) Process and Schur's Theorem. *Econometric Theory*, 11, 05, 1180–1182.
- McKelvey, T. (2002). Frequency domain identification methods. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 21, 1, 39–55.
- McLeod, A. I. y Li, W. K. (1983). Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis*, 4, 4, 269–273.
- McLeod, A. I., Yu, H. y Mahdi, E. (2011). Time series analysis with R. *Handbook of statistics*, 30, 78–93.
- Monti, A. C. (1994). A proposal for a residual autocorrelation test in linear models. *Biometrika*, 81, 4, 776–780.
- Mood, A. M., Graybill, F. y Boes, D. C. (1974). Introduction to the theory of statistics.
- Nickerson, D. M. y Madsen, B. C. (2005). Nonlinear regression and ARIMA models for precipitation chemistry in East Central Florida from 1978 to 1997. *Environmental Pollution*, 135, 3, 371–379.
- Otnes, R. K. y Enochson, L. (1978). *Applied time series analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Pankratz, A. (2009). *Forecasting with univariate Box-Jenkins models: Concepts and cases*, tomo 224. John Wiley & Sons, Inc.
- Paparoditis, E. (2000). Spectral Density Based Goodness-of-Fit Tests for Time Series Models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 27, 1, 143–176.
- Pawitan, Y. y O'Sullivan, F. (1994). Penalized Whittle Likelihood Estimation of Spectral Density Functions. *J. Amer. Stat. Assoc.*, 89, 600–610.
- Peña, D. y Rodríguez, J. (2002). A powerful portmanteau test of lack of fit for time series. *Journal of the American Statistical Association*, 97, 458, 601–610.
- Peña, D. y Rodríguez, J. (2006). The log of the determinant of the autocorrelation matrix for testing goodness of fit in time series. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136, 8, 2706–2718.

Bibliografía

- Pinna, G., Maestri, R. y Di Cesare, A. (1996). Application of time series spectral analysis theory: analysis of cardiovascular variability signals. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 34, 2, 142–148.
- Priestley, M. B. (1981). *Spectral Analysis and time series*. Academic Press, London.
- Razali, N. M., Wah, Y. B. *et al.* (2011). Power comparisons of shapiro-wilk, kolmogorov-smirnov, lilliefors and anderson-darling tests. *Journal of statistical modeling and analytics*, 2, 1, 21–33.
- Rizzo, M. L. (2007). *Statistical computing with R*. CRC Press.
- Robert, C. y Casella, G. (2004). *Monte Carlo statistical methods*. Springer Science & Business Media.
- Rosen, O. y Stoffer, D. S. (2007). Automatic estimation of multivariate spectra via smoothing splines. *Biometrika*, 94, 2, 335–345.
- Royston, P. (1992). Approximating the Shapiro-Wilk W-Test for non-normality. *Statistics and Computing*, 2, 3, 117–119.
- Royston, P. (1995). Remark AS R94: A remark on algorithm AS 181: The W-test for normality. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 44, 4, 547–551.
- Safi, S. K. y Al-Reqep, A. A. (2014). Comparative study of portmanteau tests for the residuals autocorrelation in ARMA models. *Applied Mathematics and Statistics Science Journal*, 2, 1, 1–13.
- Shapiro, S. S. y Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52, 3-4, 591–611.
- Shumway, R. H. y Stoffer, D. S. (2010). *Time series analysis and its applications: with R examples*. Springer Science and Business Media.
- Team, R. C. (2014). R: A language and environment for statistical computing. r foundation for statistical computing, vienna, austria.
- Tularam, G. A. y Ilahee, M. (2010). Time series analysis of rainfall and temperature interactions in coastal catchments. *Journal of Mathematics and Statistics*, 6, 3, 372–380.
- Zhao-Guo, C. y Hannan, E. (1980). The distribution of periodogram ordinates. *Journal of Time Series Analysis*, 1, 1, 73–82.