



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

**INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS
AGRÍCOLAS**

CAMPUS MONTECILLO

POSTGRADO EN CIENCIAS FORESTALES

SISTEMA DE CRECIMIENTO Y RENDIMIENTO PARA LAS PRINCIPALES ESPECIES COMERCIALES DE *Pinus* EN DURANGO, MÉXICO.

GERÓNIMO QUIÑONEZ BARRAZA

T E S I S
PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MEXICO

2014

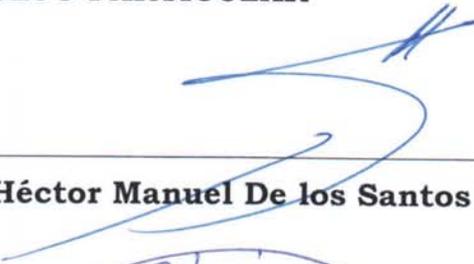
La presente tesis titulada: **Sistema de crecimiento y rendimiento para las principales especies comerciales de *Pinus* en Durango, México**, realizada por el alumno: **Gerónimo Quiñonez Barraza** bajo la dirección del Consejo Particular indicado, ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS

POSTGRADO EN CIENCIAS FORESTALES

CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERO



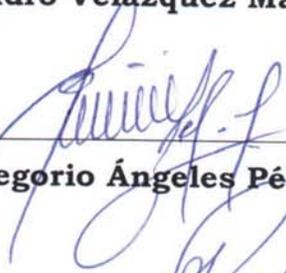
Dr. Héctor Manuel De los Santos Posadas

ASESOR



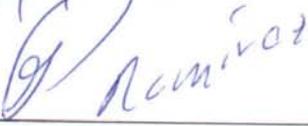
Dr. Alejandro Velázquez Martínez

ASESOR



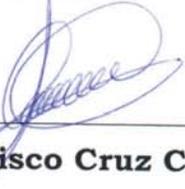
Dr. Gregorio Ángeles Pérez

ASESOR



Dr. Gustavo Ramírez Valverde

ASESOR



Dr. Francisco Cruz Cobos

Montecillo, Texcoco, Estado de México, Julio de 2014.

SISTEMA DE CRECIMIENTO Y RENDIMIENTO PARA LAS PRINCIPALES
ESPECIES COMERCIALES DE *Pinus* EN DURANGO, MÉXICO

Gerónimo Quiñonez Barraza, Dr.

Colegio de Postgraduados, 2014

Resumen

Un sistema de crecimiento y rendimiento maderable fue construido para bosques naturales con manejo, considerando los siguientes componentes: un sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote*, basado en el sistema segmentado desarrollado por Fang *et al.*, (2000); modelos dinámicos de crecimiento e incremento en diámetro normal con ecuaciones en diferencia algebraica (ADA) y diferencia algebraica generalizada (GADA) usando datos de virutas de crecimiento. Una ecuación GADA basada en la formulación de Strand generalizada fue la mejor para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*; la ecuación GADA Verhulst-Logistica resultó mejor para *Pinus ayacahuite* y el modelo polimórfico ADA de Chapman-Richards para *Pinus lumholtzii*. Para evaluar la calidad de estación se derivó una ecuación dinámica tipo GADA basada en el modelo de Chapman-Richards, bajo el supuesto lineal inverso. Las distribuciones diamétricas fueron modeladas con la función de densidad de probabilidad (fdp) Weibull para el género *Pinus*, el método de momentos (ME) presentó ventajas importantes contra máxima verosimilitud (MLE) y el método de percentiles (PE). Posteriormente el sistema se implementó con una base de inventarios operativos y se encontró que los rodales con Índice de Sitio (IS) alto y muy alto (30-35 y 40-45) a la edad base de 60 años presentan condiciones adecuadas para la aplicación de silvicultura intensiva, con incremento corriente anual (ICA) en volumen medio de $4.10 \text{ m}^3\text{ha}^{-1}\text{año}^{-1}$.

Palabras clave: Distribuciones diamétricas, modelo dinámico, índice de sitio, sistema compatible.

GROWTH AND YIELD SYSTEM FOR MAJOR COMMERCIAL SPECIES OF
Pinus IN DURANGO, MEXICO

Gerónimo Quiñonez Barraza, Dr.

Colegio de Postgraduados, 2014

Abstract

A growth and yield system for natural forest under management was constructed by considering the following components: a compatible system of taper and merchantable volume based on the segmented system developed by Fang et al. (2000) to *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla* and *Pinus teocote*; Dynamic models of growth and increment on diameter at breast height with algebraic difference approach (ADA) and generalized algebraic difference approach (GADA) with shavings growths. A GADA equation based on the formulation of Strand generalized was better to *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* and *Pinus leiophylla*; GADA equation Verhulst-Logistic was better to *Pinus ayacahuite* and the polymorphic equation ADA based on Chapman-Richards model was better to *Pinus lumholtzii*. To evaluating the site quality a dynamic GADA equation based on Chapman-Richards model was derived with the inverse linear assumption. The diameter distributions with probability density function (fdp) Weibull, were modeled to *Pinus*, the moments method (ME) represented significant advantages against maximum likelihood method (MLE) and the percentiles method (PE). The system was implemented with a base operating inventories and found that stands with site index (SI) high and very high (30-35 and 40-45) at base age 60 years, they have suitable conditions for the application intensive forestry with current annual increment (CAI) in volume of $4.10 \text{ m}^3\text{ha}^{-1}\text{year}^{-1}$.

Key words: Diameter distributions, dynamic model, site index, compatible system.

Solo soy una mente perdida en el universo del conocimiento...Gerónimo.

Dedico esta tesis a:

A Dios, por darme la vida y propiciar un ambiente de armonía a mi alrededor, por brindarme la oportunidad de culminar mi preparación académica, por regalarme todo lo maravilloso que sucede en mis sueños y cobra vida en la realidad y por darme la fortaleza necesaria para seguir adelante en los procesos difíciles.

En este punto, la nostalgia y melancolía estremecen mi sentir, una fuerte implosión se manifiesta en mi interior y con ello el recuerdo emana sobre la piel, mi mente vaga a la niñez, los recuerdos van y vienen, las imágenes se manifiestan y toman lugar en este espacio; el pasado brinca en el futuro ignorando el “instante efímero del presente”, los recuerdos de mis padres se manifiestan en mis mejillas y mi respiración se agita como cuando era pequeño y corría a los brazos de mi mamá, que besaba mi frente o de mi papá que con su barba raspaba sobre mi cara. Dedico este trabajo a mi Madre Bernardina Barraza (†) y mi Padre Gerónimo Quiñonez Rodríguez (†) que día a día manifiestan su energía sobre mi rostro y que forjaron en mi la humildad, la honestidad y el trabajo diario. Gracias Madre. Gracias Padre. Los extraño mucho. “he puesto nada en saco roto y día a día trabajo para ser un hombre de buena voluntad”.

También dedico este trabajo a mi hijo Gerónimo, que ha sido la fuerza principal para lograr los objetivos que juntos nos hemos planteado, hijo mío eres la razón más fuerte para superarme en la vida, eres quien me da fuerza para seguir avanzando, tus risas, bromas y travesuras me dan animo todos los días.

Gracias por comprender la lejanía durante estos años.

A mis hermanos y hermanas por sus muestras de apoyo para continuar con esta etapa de preparación académica, a Manuel, Arturo, Miguel Ángel, Rosario, Dalía y Felicitas. A todos mis sobrinos y sobrinas.

A todas las personas que me brindan su amistad y apoyo incondicional, con un gesto de nobleza y humildad. Gerónimo Quiñonez Barraza.

Agradecimientos

Mi reconocimiento y sincero agradecimiento al Gobierno Federal, Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de doctorado (Beca No. 247171), la ayuda otorgada hizo posible terminar con mis objetivos de estudio y preparación académica.

Al Colegio de Postgraduados por la excelencia académica, al Postgrado en Ciencias Forestales del Campus Montecillo por permitirme realizar mis estudios de doctorado; ahora que veo, siento y percibo mi sueño hecho realidad, reafirmo la decisión de pertenecer a la historia de esta gran institución. Agradezco todas las atenciones mostradas durante la estancia académica.

Al Dr. Héctor Manuel De los Santos Posadas, por compartir sus conocimientos y experiencias profesionales, por su extraordinaria disponibilidad para aclarar dudas y por la dirección, revisión e incorporación de ideas en el desarrollo de la presente investigación. También deseo agradecer la oportunidad brindada para ser parte de sus pupilos de biometría forestal, las pláticas, consejos y recomendaciones hicieron posible que lo *difícil fuera fácil*.

Al Dr. Alejandro Velázquez Martínez, por la amistad brindada, por la disponibilidad para realizar mejoras en el desarrollo de la investigación, por compartir su experiencia y conocimientos y por fomentar el entendimiento biológico en el uso de los modelos de crecimiento.

Al Dr. Gregorio Ángeles Pérez, por su gran disponibilidad y aporte de ideas para el desarrollo de la presente investigación, sus comentarios constructivos ayudaron en gran medida para afinar detalles en el proceso de la investigación.

Al Dr. Gustavo Ramírez Valverde, por la disponibilidad para enriquecer el presente trabajo con un enfoque estadístico, así como por compartir sus

conocimientos en los cursos que formaron parte del plan de desarrollo académico.

Al Dr. Francisco Cruz Cobos, por la amistad que me ha brindado en las diferentes etapas de mi preparación académica, por los consejos y por compartir sus conocimientos. Gracias por orientarme y recomendarme para mis estudios de doctorado y por la disponibilidad para enriquecer el desarrollo de la investigación. Las pláticas y el compartir experiencias de la vida me han ayudado en la preparación académica y para ser una mejor persona.

Al Dr. José Rene Valdez Lazalde por la amistad brindada y por la gran disponibilidad para formar parte del Jurado Examinador en el desarrollo de los exámenes de candidatura, así como por compartir sus conocimientos en el desarrollo de la preparación académica.

Al personal académico y administrativo del Colegio De Postgraduados y en especial del Postgrado en Ciencias Forestales por compartir sus experiencias como docentes y por las facilidades prestadas en el desarrollo de mis estudios de doctorado.

Al Dr. Juan Gabriel Álvarez González, por su gran disponibilidad para la realización de la estancia de investigación en la Universidad de Santiago de Compostela, gracias por el aporte de ideas en los trabajos de investigación desarrollados durante la estancia y por compartir sus conocimientos.

A mis compañeros y compañeras de generación que me brindaron la oportunidad de convivencia y por el maravilloso suceso de coincidir en este tiempo y espacio de la vida, como olvidar las pláticas, experiencias y reuniones que permitieron crecer los lazos de amistad. Estadísticamente, pensaba sacar una media y varianza por la estatura, pero mejor los menciono en orden completamente aleatorio; Pilar, Mónica, Araceli, Rosalba, Ofelia, Griselda, Brenda, Alfredo, Verónica, Saúl, Rosario, Olga, Martín, Esteban, Luis y Carolina, gracias a todos por su amistad.

Gracias a mis compañeros y compañeras que en mi estancia por el Colegio de Postgraduados me brindaron su amistad, me ayudaron en el aspecto académico y en la convivencia diaria, gracias a Patri, Tadeo, Rafa, Wenceslao, Juan Carlos, Efraín, Luz, Angélica, Hortencia, Disraeli, Jesús, Ángel, Moisés, Verónica, Noemí y Sacramento.

Gracias a las autoridades administrativas y área de servicios técnicos del Ejido San Diego de Tezains por las facilidades para el uso de la información, sobre la cual se versa la presente tesis, en especial al Ing. José Antonio Virrey Rodríguez. Siempre estaré agradecido y en la mejor disponibilidad de aportar esfuerzo e ideas para el manejo de los recursos forestales.

CONTENIDO

Resumen	ii
Abstract	iii
Agradecimientos	vi
CONTENIDO	ix
Índice de cuadros	xv
Índice de figuras	xviii
CAPÍTULO I	1
1. INTRODUCCIÓN GENERAL	1
1.1. Generalidades	2
1.2. Modelos de crecimiento.....	3
1.2.1. <i>Cualidades de un modelo de crecimiento</i>	4
1.2.2. <i>Clasificación de los modelos crecimiento</i>	5
1.3. Sistemas de crecimiento y rendimiento maderable	7
1.4. Ahusamiento y volumen	8
1.5. Crecimiento en diámetro.....	9
1.6. Calidad de estación	10
1.6.1. <i>Índice de sitio</i>	11
1.6.2. <i>Curvas de índice de sitio</i>	11
1.7. Distribuciones diamétricas	12
1.8. Descripción general del área de estudio	13
1.8.1. <i>Características físicas</i>	13
1.8.1.1. Superficies	13
1.8.1.2. Ubicación geográfica	13
1.8.1.3. Clima	13
1.8.1.4. Precipitación y temperatura	15
1.8.1.5. Geología	15
1.8.1.6. Edafología	16
1.8.1.7. Fisiografía	17
1.8.1.8. Hidrología	18

1.8.2.	<i>Características biológicas</i>	18
1.8.2.1.	<i>Vegetación</i>	18
1.8.2.2.	<i>Fauna</i>	18
1.9.	<i>Objetivos</i>	19
1.9.1.	<i>Objetivo general</i>	19
1.9.2.	<i>Objetivos específicos</i>	20
1.10.	<i>Literatura citada</i>	21
CAPÍTULO II.....		26
2. SISTEMA COMPATIBLE DE AHUSAMIENTO Y VOLUMEN COMERCIAL PARA LAS PRINCIPALES ESPECIES DE <i>Pinus</i> EN DURANGO, MÉXICO		26
2.1.	<i>Resumen</i>	26
2.2.	<i>Abstract</i>	26
2.3.	<i>Introducción</i>	27
2.4.	<i>Materiales y métodos</i>	29
2.4.1.	<i>Descripción del área de estudio</i>	29
2.4.2.	<i>Descripción de las variables</i>	29
2.4.3.	<i>Características de la base de datos</i>	30
2.4.4.	<i>Modelos utilizados</i>	32
2.4.5.	<i>Estadísticos usados para medir el ajuste</i>	34
2.4.6.	<i>Metodología de ajuste de los modelos</i>	35
2.4.6.1.	<i>Multicolinealidad, autocorrelación y heterocedasticidad</i>	36
2.5.	<i>Resultados y discusión</i>	38
2.6.	<i>Conclusiones</i>	49
2.7.	<i>Agradecimientos</i>	50
2.8.	<i>Literatura citada</i>	50
CAPÍTULO III		55
3. CRECIMIENTO EN DIÁMETRO NORMAL PARA <i>Pinus</i> EN DURANGO ..		55
3.1.	<i>Resumen</i>	55
3.2.	<i>Abstract</i>	56
3.3.	<i>Introducción</i>	56
3.4.	<i>Materiales y métodos</i>	58

3.4.1. Descripción del área de estudio	58
3.5. Caracterización de la base de datos	58
3.6. Modelos utilizados	60
3.7. Metodología de ajuste de los modelos.....	61
3.8. Estadísticos utilizados en el ajuste	63
3.9. Resultados y discusión	64
3.10. Conclusiones.....	74
3.11. Agradecimientos	75
3.12. Referencias.....	75
CAPÍTULO IV.....	80
4. ECUACIÓN DINÁMICA CON POLIMORFISMO COMPLEJO Y MÚLTIPLES ASÍNTOTAS PARA EL CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE DE MASAS FORESTALES DE DURANGO, MÉXICO	80
4.1. Resumen	80
4.2. Abstract	81
4.3. Introducción.....	81
4.4. Materiales y métodos	84
4.4.1. Modelos utilizados.....	86
4.4.1.1. Modelo propuesto.....	86
4.4.1.2. Modelos usados en la comparación	88
4.4.1.3. Comparación de modelos	89
4.4.1.4. Supuestos de ajuste del modelo.....	91
4.4.2. Análisis de las ecuaciones dinámicas.....	91
4.4.2.1. Ajuste de los parámetros	91
4.5. Resultados y discusión	94
4.6. Conclusiones.....	103
4.7. Agradecimientos	104
4.8. Literatura citada.....	104
CAPÍTULO V.....	109
5. MODELACIÓN DINÁMICA DE DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS EN MASAS MEZCLADAS DE <i>Pinus</i> EN DURANGO, MÉXICO	109

5.1.	Resumen	109
5.2.	Abstract	110
5.3.	Introducción.....	110
5.4.	Objetivos	113
5.5.	Metodología.....	113
5.5.1.	<i>Descripción del área de estudio y base de datos.....</i>	<i>113</i>
5.5.2.	<i>Función de distribución Weibull</i>	<i>114</i>
5.5.3.	<i>Estimación de los parámetros de la distribución Weibull.....</i>	<i>115</i>
5.5.3.1.	Método de momentos (ME)	116
5.5.3.2.	Método de máxima verosimilitud (MLE)	116
5.5.3.3.	Método de percentiles (PE).....	117
5.5.3.4.	Modelos de predicción de parámetros (PPE)	117
5.5.4.	<i>Modelos de proyección de variables del rodal.....</i>	<i>118</i>
5.5.5.	<i>Estadísticos para medir el ajuste</i>	<i>118</i>
5.6.	Resultados	120
5.6.1.	<i>Estimaciones de PPE y variables dinámicas del rodal.....</i>	<i>121</i>
5.7.	Discusión y conclusiones.....	123
5.8.	Reconocimientos.....	126
5.9.	Literatura citada.....	126
CAPÍTULO VI.....	130	
6. IMPLEMENTACIÓN Y CONCLUSIONES GENERALES	130	
6.1.	Implementación del sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial en el inventario operativo	131
6.2.	Implementación de los modelos de crecimiento en diámetro normal en el inventario operativo.....	132
6.3.	Implementación de la ecuación dinámica con polimorfismo complejo en el inventario operativo.....	133
6.4.	Implementación de la modelación dinámica de distribuciones diamétricas en el inventario operativo	134
6.5.	Integración de los resultados	134
6.6.	Conclusiones generales	137

CAPÍTULO VII.....	139
7. ANEXOS.....	139
7.1. Descripción de variables	139
7.1.1. Número de árboles (N_a)	139
7.1.2. Área basal (AB).....	139
7.1.3. Diámetro cuadrático (D_q).....	139
7.1.4. Diámetro medio (dm).....	140
7.1.5. Altura media (H_m)	140
7.1.6. Altura dominante (H_0).....	140
7.1.7. Diámetro dominante (D_0)	140
7.1.8. Edad (E).....	141
7.1.9. Volumen total árbol (V_{ta}).....	141
7.1.10. Volumen total de fuste (V_f)	141
7.1.11. Volumen comercial (V_c).....	141
7.1.12. Volumen comercial a diámetro mínimo (V_{cdm})	142
7.1.13. Volumen de punta (V_p)	142
7.1.14. Volumen de ramas (V_r).....	142
7.1.15. Factor de expansión de volumen (F_v)	143
7.2. Muestreo Aleatorio Estratificado (MAE)	143
7.2.1. Estimador de razón de medias (RM).....	144
7.2.2. Estimador de media de razón (MR)	145
7.3. Sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial en el inventario operativo	147
7.4. Crecimiento en diámetro normal en el inventario operativo	156
7.5. Ecuación dinámica con polimorfismo complejo y múltiples asíntotas en el inventario operativo.....	158
7.6. Modelación dinámica de distribuciones diamétricas en el inventario operativo.....	159
7.6.1. Parámetros estimados.....	159
7.6.1.1. Ajuste	159
7.6.1.2. Validación	160

7.6.2.	<i>Implementación de resultados</i>	162
7.7.	Datos usados para la implementación de los modelos	166
7.8.	Códigos de SAS para el ajuste de los modelos	167
7.8.1.	<i>Programa SAS para el sistema compatible 2.S3</i>	167
7.8.2.	<i>Programa SAS para el modelo de crecimiento 3.M6</i>	168
7.8.3.	<i>Programa SAS para la ecuación dinámica 4.E1</i>	169
7.8.4.	<i>Programa SAS para recuperar los parámetros de la función Weibull por ME</i>	172

Índice de cuadros

Cuadro 2.1. Valores de los estadísticos descriptivos de la base de datos utilizada.....	31
Cuadro 2.2. Sistemas de ahusamiento y volumen comercial ajustados a las especies de estudio.	32
Cuadro 2.3. Modelos de volumen total usados en el sistema 2.S3 (Fang <i>et al.</i> , 2000).	34
Cuadro 2.4. Estimadores de los parámetros de los sistemas ajustados.	40
Cuadro 2.5. Estadísticos de bondad de ajuste de los sistemas analizados.....	41
Cuadro 2.6. Estimadores y error estándar de los parámetros del sistema 2.S3 variando la ecuación de volumen total.....	42
Cuadro 2.6. Estimadores y error estándar de los parámetros del sistema 2.S3 variando la ecuación de volumen total continuación.....	43
Cuadro 2.7. Estadísticos de bondad de ajuste del Sistema 2.S3 variando la ecuación de volumen total.....	44
Cuadro 2.8. Estimadores, error estándar de los parámetros y estadísticos del modelo reducido del Sistema 2.S3.....	45
Cuadro 2.9. Estimadores, error estándar de los parámetros y estadísticos del modelo completo del Sistema 2.S3.	46
Cuadro 3.1. Valores de los estadísticos descriptivos de la base de datos utilizada.....	60
Cuadro 3.2. Ecuaciones dinámicas ajustadas a los datos de las especies estudiadas.	62
Cuadro 3.3. Parámetros estimados, errores estándar y estadísticos de los modelos ajustados.	67
Cuadro 3.4. Ecuaciones de incremento corriente anual (ICA) para los modelos estudiados.	71
Cuadro 3.5. Tiempos de paso promedio obtenidos con los modelos de crecimiento seleccionados.	71
Cuadro 4.1. Diagnóstico de los datos usados en el ajuste.	85
Cuadro 4.2. Parámetros estimados, error estándar y estadísticos de ajuste de las ecuaciones dinámicas ajustadas a todos los pares de edad altura.	94
Cuadro 4.3. Parámetros estimados, error estándar y estadísticos de ajuste del modelo completo.	95
Cuadro 4.4. Prueba de F para el modelo completo y reducido.	96

Cuadro 4.5. Edad a la cual suceden los puntos de inflexión en las familias de curvas de crecimiento por índice de sitio a la edad de referencia de 60 años. .	96
Cuadro 4.6. Edad a la cual sucede el turno técnico en las familias de curvas de crecimiento por índice de sitio a la edad de referencia de 60 años.....	100
Cuadro 5.1. Estadísticas descriptivas de las parcelas usadas en el ajuste y validación para estimar los parámetros de la función Weibull.....	114
Cuadro 5.2. Estadísticas descriptivas de los parámetros estimados de la función Weibull por los métodos analizados.	120
Cuadro 5.3. Estadísticos de ajuste y validación de los métodos de estimación de los parámetros de la función Weibull.	120
Cuadro 5.4. Parámetros estimados y estadísticos de ajuste de los modelos de predicción de parámetros y proyección de variables de rodal.	121
Cuadro 7.1. Diámetros de punta (dc) por categoría diamétrica (CD).....	142
Cuadro 7.2. Estimadores de razón de medias (RM) para muestreo estratificado.	145
Cuadro 7.3. Estimadores de media de razón (MR) para muestreo estratificado.	146
Cuadro 7.4. Ajuste del modelo de volumen rollo total árbol (Vta).	147
Cuadro 7.5. Factores de expansión de volumen (Fv) por categoría diamétrica (CD) para las especies forestales estudiadas.	148
Cuadro 7.6. Estimadores de razón de medias (RM) para las unidades de manejo (UM).....	148
Cuadro 7.7. Estimadores de razón de medias (RM) para las unidades de manejo (UM) por especie.....	149
Cuadro 7.8. Estimadores de media de razón (MR) para las unidades de manejo (UM).....	151
Cuadro 7.9. Estimadores de media de razón (MR) para las unidades de manejo (UM) por especie.....	151
Cuadro 7.10. Razones de volumen-área basal (V/AB) de razón de medias (RM) por IS.....	154
Cuadro 7.11. Razones de volumen-área basal (V/AB) de razón de medias (RM) por especie e IS.....	154
Cuadro 7.12. Razones de volumen-área basal (V/AB) de media de razón (MR) por IS.....	155
Cuadro 7.13. Razones de volumen-área basal (V/AB) de media de razón (MR) por especie e IS.....	155

Cuadro 7.14. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por IS con RM	156
Cuadro 7.15. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por especie e IS con RM.	156
Cuadro 7.16. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por IS con MR.	157
Cuadro 7.17. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por especie e IS con MR.	157
Cuadro 7.18. Superficies por categoría de IS y forma de clasificación (FC). ..	158
Cuadro 7.19. Estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull por los métodos analizados en el proceso de ajuste.....	159
Cuadro 7.20. Estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull por los métodos analizados en el proceso de validación...	160
Cuadro 7.21. Estadísticos de los estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull y las variables asociadas.....	162
Cuadro 7.22. Estadísticos de la base de datos usada para la implementación de resultados de los modelos desarrollados.	166

Índice de figuras

Figura 1.1. Ubicación del área de estudio en el estado de Durango, México. . .	14
Figura 2.1. Diámetro relativo (d/D) contra altura relativa (h/H) de las especies analizadas.....	32
Figura 2.2. Gráfica de la Función de Autocorrelación Parcial del ajuste del modelo completo con un modelo autorregresivo continuo de segundo orden en la ecuación de ahusamiento.	38
Figura 2.3. Distribución de los residuales en gráficas de caja y alambre para el ahusamiento y volumen comercial, + representa la media del residual y – representa la mediana del residual.	47
Figura 3.1. Análisis de una viruta de crecimiento.	59
Figura 3.2. Familias de curvas de crecimiento por IDiam de 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, y 45 cm para <i>Pinus arizonica</i> , <i>Pinus durangensis</i> , <i>Pinus teocote</i> , <i>Pinus ayacahuite</i> , <i>Pinus leiophylla</i> y <i>Pinus lumholtzii</i> a la edad de referencia de 60 años.....	69
Figura 3.3. Familias de curvas de incremento medio anual (IMA) en Área Basal (AB) contra crecimiento en Dn por IDiam de 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, y 45 cm para <i>Pinus arizonica</i> , <i>Pinus durangensis</i> , <i>Pinus teocote</i> , <i>Pinus ayacahuite</i> , <i>Pinus leiophylla</i> y <i>Pinus lumholtzii</i> a la edad de referencia de 60 años.....	70
Figura 3.4. Gráficas de residuales contra la edad para las especies estudiadas, con los modelos seleccionados.....	73
Figura 4.1. Familias de curvas de crecimiento en altura para categorías de índice de sitio de 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y 24 m para <i>Pinus arizonica</i> , <i>Pinus durangensis</i> , <i>Pinus teocote</i> y <i>Pinus ayacahuite</i> y categorías de índice de sitio de 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20 m para <i>Pinus leiophylla</i>	98
Figura 4.2. Familias de curvas de incremento corriente anual en altura (ICA) línea continua e incremento medio anual (IMA) línea discontinua, considerando categorías de índice de sitio de 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y 24 m.....	99
Figura 4.3. Gráficas de residuales estandarizados contra los valores predichos (a) y sesgo promedio por categoría de edad (b) considerando el ajuste global con variables indicadoras.	100
Figura 4.4. Gráficas de la Función de Autocorrelación Parcial del ajuste del modelo completo; ajuste sin corrección de la autocorrelación (a), considerando un modelo autorregresivo de errores de primero, segundo y tercer orden b, c y d, respectivamente.	101
Figura 5.1. Sesgo promedio (Bias) en frecuencia relativa acumulada de número de árboles por categoría diamétrica en el ajuste (a1) y validación (b1) y el Error Medio Cuadrático (MSE) por categoría diamétrica en el ajuste (a2) y validación (b2).	122

Figura 5.2. Gráfica de distribuciones diamétricas por los métodos usados para la estimación de los parámetros de la función Weibull (c1) y proyección de la distribución de diámetros y área basal a 5, 10 y 15 años con PPE (c2)..... 123

Figura 7.1. Gráficas de distribuciones diamétricas para 10 UM's..... 165

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN GENERAL

La producción forestal de madera en los últimos años se ha visto disminuida constantemente, registrando 6.7 millones de metros cúbicos rollo (Mm^3r) en 2002 y 5.5 Mm^3r en el 2011, lo que representando una disminución de 2.2% con respecto a 2010 (5.6 Mm^3r). Los principales estados productores de madera en 2011 fueron: Durango (27.5%), Chihuahua (18.3%), Michoacán (8.7%), Oaxaca (5.9%) y Jalisco (5.9%) que contribuyeron con el 66.3% de la producción total, equivalente a 3.6 Mm^3r (SEMARNAT, 2011).

Una de las razones técnicas que pueden ayudar a mejorar la producción forestal maderable, se fundamenta en el hecho de utilizar mejores herramientas cuantitativas, las cuales permiten optimizar los procesos de planeación y lograr un seguimiento y control adecuado de las actividades de aprovechamiento forestal sustentable. La modelación forestal representa una oportunidad muy valiosa para la cuantificación y destino adecuado de los productos maderables. Por tanto, las conclusiones biológicas de las expresiones matemáticas nos permiten inferir el desarrollo de las masas forestales, a través de la aplicación de tratamientos silvícolas, que permiten a largo plazo la obtención de productos forestales maderables de mayores dimensiones y de mejor calidad para la industria.

Derivado de lo anterior, para planificar las actividades del manejo forestal es imprescindible la estimación del crecimiento e incremento de las masas forestales, así como de la estructura que anticipe los efectos de las intervenciones. Los modelos de crecimiento son una herramienta fundamental para los silvicultores, ya que permiten predecir la evolución dasométrica de las masas, facilitan la toma de decisiones y para planificar el manejo forestal a media no y lago plazo (Cruz, 2007).

Los modelos de crecimiento y rendimiento juegan un rol de gran importancia para predecir, proyectar y simular los cambios de las masas forestales en el tiempo y los factores ambientales del sitio. Con el avance tecnológico en ciencias de la información, el manejo de los bosques no solo debería ser mejor, sino también mucho más fácil de implementar y dar seguimiento, permitiendo con ello un control y seguimiento adecuado del desarrollo de las masas forestales y la respuesta a las intervenciones silvícolas.

En este sentido el cálculo de existencias maderables, identificación de la productividad de áreas forestales, determinación de incrementos maderables, conocimiento sobre los periodos de máxima producción y la caracterización de estructuras diamétricas y área basal, representan una herramienta muy importante en el desarrollo de Sistemas de Crecimiento y Rendimiento Maderable (SCRM). Dichos sistemas ayudan en la planeación y formulación de regímenes de manejo forestal, lo cual debería de ayudar en la revaloración de los Programas de Manejo forestal (PMF) durante el ciclo de corta y facilitar con ello un sistema documentado de las actividades de manejo forestal en procesos de auditoria y certificación forestal.

1.1. Generalidades

La presente tesis de investigación está compuesta por 7 Capítulos: el Capítulo 1 refiere a la descripción general de las metodologías desarrolladas, una revisión general del marco de referencia, descripción del área de estudio y objetivos; el Capítulo 2 refiere a la construcción de sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus arizonica* Engelmännii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* Shaw; en el Capítulo 3 se desarrollaron ecuaciones dinámicas de crecimiento en diámetro normal para *Pinus arizonica* Engelmännii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham, *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* Shaw y *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer.; en el Capítulo 4 se presenta la derivación de una ecuación dinámica con polimorfismo complejo

y múltiples asíntotas (tipo GADA) para el crecimiento en altura e índice de sitio de *Pinus arizonica* Engelmännii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* Shaw, además se compara el uso de la ecuación desarrollada con otras ecuaciones dinámicas que han sido usadas frecuentemente en la modelación forestal; el Capítulo 5 trata sobre la modelación dinámica de distribuciones diamétricas en masas mezcladas con la función de densidad de probabilidad Weibull para el género *Pinus*; el Capítulo 6 refiere a la implementación de los modelos desarrollados para una base de datos de inventario de manejo forestal, la integración de resultados y conclusiones generales y por último en el Capítulo 7 se presentan los anexos de gran interés para ejemplificar la aplicación de los modelos desarrollados.

1.2. Modelos de crecimiento

Un modelo de crecimiento es una abstracción de la dinámica natural de las masas forestales y puede abarcar el crecimiento, la mortalidad y otros cambios en la estructura y composición del rodal. Comúnmente los modelos de crecimiento se refieren a un sistema de ecuaciones que permiten predecir el crecimiento y rendimiento de una masa forestal, en una amplia variedad de condiciones presentes y futuras. Por tanto, un modelo de crecimiento puede comprender una serie de ecuaciones matemáticas, los valores numéricos incorporados en estas ecuaciones, la lógica necesaria para vincular estas ecuaciones y la estructuración en lenguajes de programación para implementar el modelo. En un sentido amplio, puede abarcar tablas y curvas de rendimiento, que son compatibles con las ecuaciones, pero que han sido expresadas en forma tabular o gráfica (Vanclay, 1994).

El crecimiento se refiere al aumento de las dimensiones de uno o más árboles de un bosque en un periodo de tiempo. El rendimiento se refiere a sus dimensiones totales al final de un periodo. En rodales coetáneos, una ecuación de crecimiento puede predecir el crecimiento en diámetro, área basal o volumen, en función de la edad y otras características del rodal, mientras que

una ecuación de rendimiento debería expresar el área basal del rodal o la producción total de volumen a una edad específica. En rodales incoetáneos, el rendimiento es la producción total en un periodo de tiempo dado, mientras que el crecimiento es la tasa de producción (Vanclay, 1994). La selección apropiada de una ecuación de crecimiento para modelar las variables de interés en un masa forestal es un aspecto de gran importancia en el desarrollo de modelos de crecimiento y rendimiento (Burkhart y Tomé, 2012).

Los modelos de crecimiento proporcionan una perspectiva sobre las complejas interacciones entre las estructuras y los procesos de los ecosistemas forestales y posibilitan una mejor comprensión de la dinámica forestal natural. En el campo de la investigación, los modelos de crecimiento sirven para simular experimentos que no sería posible realizar en la realidad, debido a los largos períodos de observación necesarios. En el campo de la formación y la consultoría, los modelos de crecimiento proporcionan información sobre las consecuencias económicas y ecológicas de una determinada decisión. En el manejo práctico, los modelos de crecimiento son herramientas indispensable de apoyo a la toma de decisiones para el manejo forestal (Gadow *et al.*, 2007).

1.2.1. Cualidades de un modelo de crecimiento

Mendoza (1983) destaca el alcance de la utilización de los modelos de crecimiento con las siguientes cualidades:

- i) Generalidad. Es la medida en que un determinado modelo puede ser utilizado en el estudio de procesos. El caso del crecimiento modelado como curva sigmoide, es un ejemplo de modelo de amplia generalidad; puesto que, utilizando los valores numéricos apropiados a cada caso, puede representar para una diversidad de objetivos el desarrollo de las masas forestales.
- ii) Complejidad. Es el resultado del número de variables en el modelo, así como el número y tipo de ecuaciones. La importancia de esta característica reside en los problemas que la complejidad pueda causar

en cuanto a la disponibilidad de paquetes estadísticos y acumulación de errores. Entre más complejo sea un modelo aumenta el realismo para la explicación del fenómeno de estudio.

- iii) Realismo. Se trata de una medida de similitud entre el modelo y el patrón. En general los modelos de simulación son más realistas que los modelos predictivos.
- iv) Precisión, exactitud y confiabilidad. Estos componentes son parte importante de la determinación de la calidad del modelo. Estas cualidades indican el grado de aproximación de los resultados del modelo a la realidad, tanto en margen de error como en fidelidad y consistencia entre repeticiones de pruebas.
- v) Validez. Con este término se designa a la longitud del horizonte de tiempo para el cual un modelo genera resultados válidos, así como también el área de aplicación.
- vi) Elasticidad. La plasticidad de los modelos representa una estimación de versatilidad en las aplicaciones. Si un modelo fue construido para reproducir la dinámica de una especie forestal y bajo algunas alteraciones menores, se puede usar para otras especies, o si fue creado para predecir reacciones a aclareos, pero se le adapta para detectar patrones evolutivos de la especie, entonces se trata de un modelo plástico.

1.2.2. Clasificación de los modelos crecimiento

Diéguez-Aranda *et al.* (2009) destacan la clasificación de los modelos de crecimiento bajo el siguiente enfoque:

- i) Modelos de rodal. Estos modelos explican sobre el desarrollo probable del conjunto de árboles que constituyen el rodal. Su principal ventaja es que solo se requieren variables del rodal para estimar el crecimiento y volumen futuros.

- ii) Modelos de clases dimensionales. Estos modelos dan respuesta a las necesidades de información sobre el número de árboles de diferentes tamaños que existen en el rodal. Estos modelos permiten caracterizar y simular la estructura de las masas forestales y predecir su evolución no solo desde el punto de vista de existencias volumétricas, sino también de la calidad de sus productos.
- iii) Modelos de árbol individual. Son modelos que tratan de describir el crecimiento individual de cada uno de los árboles de un rodal a partir de los fenómenos que lo condicionan. Los resultados a nivel rodal se obtienen por la suma de la característica de interés de los árboles en el rodal.
- iv) Modelos estáticos. Son sistemas estructurados de relaciones matemáticas, estadísticas o lógicas que no dependen, o no consideran explícitamente, la tasa de crecimiento de los árboles o los rodales forestales.
- v) Modelos dinámicos. Estos consideran el crecimiento de las variables descriptivas de los árboles o rodales forestales, por lo que para su construcción es necesario disponer de datos provenientes de árboles o rodales inventariados al menos en dos ocasiones y además el ajuste estadísticos debe realizarse con una metodología que considere el crecimiento.
- vi) Modelos determinísticos. Estos modelos generan siempre los mismos resultados ante el mismo escenario (mismos datos de entrada y mismos algoritmos).
- vii) Modelos estocásticos. Son modelos que generan diferentes resultados cada vez que se realiza la simulación, debido a la incorporación deliberada de un componente aleatorio en el modelo.
- viii) Modelos empíricos. Estos explican la dinámica de los árboles o los rodales forestales a partir de datos experimentales obtenidos en parcelas

de investigación en una región determinada, representando fielmente la realidad observada pero sin tener en cuenta los mecanismos y procesos elementales de crecimiento. Su interés radica en que, a partir de variables muy fáciles de medir, proporcionan estimaciones cuantitativas muy importantes para el manejo forestal.

- ix) Modelos de procesos. Estos modelos incorporan a la simulación una interpretación del crecimiento de los árboles fisiológica y ecológicamente realistas, suelen incluir variables como la luz, el ciclo de nutrientes, el balance de carbono, el índice de área foliar, entre otras. La principal ventaja de los modelos basados en procesos es que son sensibles a los cambios ambientales, siendo por lo tanto de aplicación más general que los modelos empíricos.
- x) Modelos híbridos. Estos modelos incorporan las influencias ambientales en los modelos de crecimiento y producción empíricos, mediante el establecimiento de relaciones entre algunas de sus salidas o entradas. Así se incorporan variables edáficas y climáticas a los modelos empíricos, mejorando sensiblemente la predicción de las estimaciones.

1.3. Sistemas de crecimiento y rendimiento maderable

Los sistemas de crecimiento y rendimiento son un conjunto de modelos matemáticos que se usan para predecir variables de interés (índice de sitio, altura dominante, volumen, entre otras) en el comportamiento de las masas forestales en función del tiempo. Su relevancia recae en proporcionar información que ayude al manejador forestal a tomar decisiones como el cálculo de la posibilidad, regulación de las cortas, realizar análisis financieros y comparar alternativas de uso de la tierra (Zepeda, 1990). Los componentes de un sistema de crecimiento y rendimiento maderable (SCRM) son las funciones de altura dominante e índice de sitio, área basal, diámetro, volumen y número de árboles (Galán *et al.*, 2008). Los SCRM pueden ser explícitos o implícitos; los primeros predicen directamente y por unidad de superficie la variable de

interés, generalmente volumen. En cambio los sistemas implícitos (o modelos de clases dimensionales) requieren el uso de uno o varios modelos que predicen un conjunto de variables, a partir de las cuales es posible recuperar la condición futura del rodal como frecuencias de árboles por categoría diamétrica (Torres y Magaña, 2001).

1.4. Ahusamiento y volumen

La estimación de las existencias maderables que puede proporcionar un rodal (unidad de manejo, “UM”), un predio o un bosque, es una de las tareas más importantes para los manejadores de bosques, así como de valiosa importancia para los dueños de los recursos forestales. En la mayoría de los casos, es necesario conocer la distribución de los volúmenes por tipo de productos destinados a la industria forestal. Usualmente dicha distribución se realiza considerando trocería de largas y cortas dimensiones sin considerar clasificación de productos por diámetros comerciales.

Las funciones de ahusamiento se basan en el supuesto de que la forma del árbol varía continuamente a lo largo de la longitud y es monotónicamente decreciente a medida que la distancia del tocón a la punta comercial se aproxima a la altura total (Lee *et al.*, 2000). Ocasionalmente se usa el término forma del árbol y ahusamiento como sinónimos, aunque tienen connotaciones distintas en el contexto forestal. La forma refiere a las características del árbol, mientras que el ahusamiento es el cambio del diámetro del fuste conforme aumenta la altura medida desde la base hasta la punta del árbol (Burkhart y Tomé, 2012).

Las herramientas más usadas para realizar la clasificación de productos son las funciones de volumen porcentual y las funciones de ahusamiento. Las primeras estiman el volumen de un árbol hasta un cierto diámetro o altura como porcentaje del volumen total (Burkhart, 1997), mientras que las segundas se basan en el ajuste de una ecuación que defina la variación del diámetro a lo largo del fuste del árbol (Clutter *et al.*, 1983; Kozak, 2004). La

integración de la función de ahusamiento desde la base del árbol hasta una altura deseada proporcionará una estimación del volumen maderable.

Existen tres tipos de modelos de ahusamiento: modelos polinómicos simples, modelos segmentados y modelos de exponente variable. Los modelos polinómicos se basan en estimar el diámetro relativo en función de la altura relativa, los modelos segmentados se componen de dos o tres expresiones que se activan o desactivan de acuerdo a la altura en la que se quiere predecir el diámetro (Cao *et al.*, 1980) y los modelos de exponente variable son ecuaciones en las que se asume que la forma varía constantemente dentro del fuste y representa esta variación a través de una función exponencial en la cual el exponente cambia con la altura del fuste (Kozak, 1988).

El concepto de compatibilidad de funciones de volumen y ahusamiento fue desarrollado por Demaerschalk (1972). Con la integración de la ecuación de ahusamiento y evaluada desde la base hasta la punta del árbol resulta el volumen total, generando resultados matemáticamente consistentes (Burkhart y Tomé, 2012).

Cuando se tiene una ecuación de volumen y su correspondiente ecuación de ahusamiento definidas por los mismos parámetros y una estructura geométrica común, es posible definir un sistema compatible de ahusamiento-volumen (Cruz-Cobos *et al.*, 2008). De esta manera con la ecuación de ahusamiento, volumen comercial y altura comercial, se pueden definir volumen total, volumen comercial a un diámetro y altura dados y el diámetro a una altura de interés.

1.5. Crecimiento en diámetro

El crecimiento en diámetro de los árboles en masas forestales con o sin manejo está fuertemente influenciado por la calidad de estación y por las condiciones de competencia existentes en el rodal, ya que el crecimiento en diámetro de los árboles, en general, es más dependiente de la competencia que el crecimiento en altura. El crecimiento e incremento en diámetro es un

elemento muy importante en el manejo forestal, ya que el diámetro es una de las variables más fácil de medir y tiene una fuerte relación con la altura y volumen.

El objetivo de evaluar el crecimiento en diámetro es definir su dinámica a una edad y condición inicial determinada, con ello es posible identificar estrategias de manejo para optimizar tasas de crecimiento que satisfagan los objetivos de producción planteados, estimar periodos de cosecha así como planificar actividades de protección y aprovechamiento de los recursos forestales (Torres y Magaña, 2001).

1.6. Calidad de estación

En el contexto de manejo forestal, la calidad de estación se define como el potencial de producción de madera de un sitio para una especie en particular o tipo de bosque (Clutter *et al.*, 1983). La estimación de la producción potencial de madera de un sitio se puede considerar una medida de la productividad del terreno forestal. Dentro de un cierto microclima, la calidad de estación refleja la productividad potencial de un sitio forestal, entendiendo esta como la integración de todos los factores bióticos y abióticos que influyen en el crecimiento del arbolado en ese sitio en particular (Torres y Magaña, 2001).

Teóricamente, todos los factores que influyen en el crecimiento deberían emplearse para calificar la productividad de un sitio determinado; el clima, la topografía, las características estáticas y dinámicas del suelo, el régimen de precipitación, la calidad genética de la población, la estructura de la comunidad vegetal, las actividades humanas y el tiempo. Para ello, lo más lógico parecería evaluar directamente la calidad de estación como la producción total final del ciclo productivo, como se hace en la agricultura (cosechas anuales), pero esto es poco práctico en el medio forestal (excluyendo tal vez especies de rápido crecimiento con turnos de menos de 10 años) porque los ciclos productivos requieren una escala multianual (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009).

1.6.1. Índice de sitio

El índice de sitio es el valor de la altura dominante a una determinada edad base o de referencia (Clutter *et al.*, 1983); La altura dominante es la altura media de los 100 árboles de mayor diámetro normal en una hectárea (Assman, 1970; Burkahrt y Tomé, 2012). El índice de sitio es el método más popular y práctico para la evaluación de la calidad de estación. Tal evaluación tiene dos supuestos importantes: i) la existencia de un modelo que representa fielmente la relación altura-edad y ii) el comportamiento de la relación altura-edad para sitios de diferente productividad sigue la trayectoria definida por la familia de curvas generada bajo el mismo modelo (Torres y Magaña, 2001).

El crecimiento en altura de los árboles más grandes en el rodal está correlacionado con la capacidad productiva del sitio y es poco afectado por la densidad del rodal y las cortas intermedias. Naturalmente, éste se verá afectado con la aplicación poco usual de aclareos por lo alto. Por ello, la altura dominante del rodal es la variable más usada para clasificar sitios por calidad de estación (Cruz, 2007).

1.6.2. Curvas de índice de sitio

Generalmente para la implementación de los modelos de crecimiento en altura dominante e índice de sitio, se construyen familias de curvas por índice de sitio (curvas de calidad de estación), las curvas pueden ser anamórficas o polimórficas (Clutter *et al.*, 1983). Con el método de la curva guía, tradicionalmente se han obtenido familias de curvas anamórficas usando el principio de proporcionalidad, sin embargo, se pueden obtener también familias de curvas polimórficas.

Bajo el enfoque de ecuaciones en diferencia algebraica (ADA), las curvas anamórficas (el parámetro de la asíntota del modelo es dependiente de la calidad de estación) se caracterizan porque presentan tasas de crecimiento constantes y asíntotas variables. Por su parte, las curvas polimórficas (ya sea el parámetro de la tasa de cambio o el de la tasa de crecimiento depende de la

calidad de estación) tienen tasas de crecimiento variables y asíntotas constantes (Bailey y Clutter, 1974).

Con la metodología de ecuaciones en diferencia algebraica generalizada (GADA) las familias de curvas de índice de sitio presentan tasas de crecimiento variables con diferentes asíntotas (polimorfismo complejo), ya que más de un parámetro del modelo base depende de la calidad de estación (Cieszewski y Bailey, 2000).

1.7. Distribuciones diamétricas

La modelación del número de árboles por categoría diamétrica, en un rodal sometido a intervenciones silvícolas, es una parte del SCRM y que un manejador de bosques debe considerar en la planeación y ejecución de programas de manejo forestal. Las dimensiones de un árbol, fundamentalmente su diámetro y altura determinan en gran medida su destino final en la industria forestal y consecuentemente el precio. Así, las propiedades de un rodal pueden ser caracterizadas con las distribuciones diamétricas (Bailey y Dell, 1973). La relación entre las distribuciones diamétricas, con la distribución en área basal y el volumen representa un aspecto importante para el manejo forestal (Gorgoso *et al.*, 2007).

Para la modelación de las distribuciones diamétricas de masas forestales puras o mezcladas, de edad uniforme o irregular, se han usado principalmente funciones de densidad de probabilidad (fdp) como la Normal, Weibull, Gamma, Log-Normal, Beta y S_B de Jhonson (Nanang, 1998; Lei, 2008; Álvarez y Ruiz, 1997; Kudus *et al.*, 1999; Zhang *et al.*, 2003; Fidalgo *et al.*, 2009).

La función Weibull, por su flexibilidad y sencillez es una de las fdp más usadas para la modelación de las estructuras diamétricas de especies forestales, ya sea a través de predicción o recuperación de parámetros (Bailey y Dell, 1973; Torres-Rojo *et al.*, 2000).

1.8. Descripción general del área de estudio

La descripción del área de estudio se realizó con base en el Programa de Manejo Forestal Sustentable del Ejido San Diego de Tezains (PMFS, 2006).

1.8.1. Características físicas

1.8.1.1. Superficies

La superficie total del Ejido San Diego de Tezains, municipio de Santiago Papasquiario, Durango, es de 60,801.92 ha, de las cuales 46,388.86 son terrenos forestales con 26,038.02 ha en producción maderable.

1.8.1.2. Ubicación geográfica

El ejido San Diego de Tezains está comprendido dentro de los municipios de Santiago Papasquiario, Tepehuanes, Topia, Canelas y Otáez. La mayor parte de la superficie está dentro del municipio de Santiago Papasquiario. El Ejido se encuentra ubicado en el Noroeste del estado de Durango, entre las coordenadas extremas; 24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" de Latitud Norte y 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" de Longitud Oeste (Figura 1.1).

1.8.1.3. Clima

El relieve, la altitud, latitud y otras variables determinan los climas y éstos a su vez son el fundamento para la distribución de la flora y la fauna silvestre de una región o lugar determinado (García, 1981; INEGI, 1993a; INEGI, 1993b), los tipos de clima presentes son en el área de estudio:

- i) (A)C(w2). Clima semicálido subhúmedo, temperatura media anual mayor de 18° C. Precipitación del mes más seco menor de 40 mm y porcentaje de lluvia invernal del 5% al 10.2% del total anual (10% de la superficie).
- ii) Aw1. Clima cálido subhúmedo, temperatura media anual mayor de 22° C. Precipitación del mes más seco menor de 60 mm y porcentaje de lluvias invernales del 5% al 10.2% del total anual (4% de la superficie).

1.8.1.4. Precipitación y temperatura

Según la estación meteorológica más cercana (Los Altares, Santiago Papasquiario, Durango), la precipitación media anual es de 1,375 mm. Las temperaturas medias varían desde los 8° C en las zonas más altas hasta los 24 °C en las zonas bajas, en las cuales la altitud media es de 600 m.

1.8.1.5. Geología

El tipo de geología presente es un 99.82% compuesto de riolita toba ácida, Tom (R-Ta) y 0.18% compuesto de aluvial, Q (al), tomando como referencia la cartografía elaborada por el INEGI en las cartas geológicas escala 1:250,000, G13-7, G13-8, G13-10 y G13-11 (INEGI, 1993d).

Riolita Toba acida Tom (R-Ta). Rocas volcánicas formadas esencialmente por toba e ignimbrita y esporádicos derrames de composición que varía de riolítica a dacítica; contienen intercalaciones de brecha y horizontes de vidrio y cirófidos, son de color rosa con tonos grises y amarillos. Petrográficamente las tobas son de textura mero cristalina piroclástica, con presencia de cuarzo, plagioclasa sódica, en matriz vítrea ácida. La ignimbrita es de textura merocrystalina, piroclástica, con fragmentos de roca silisificados, de vidrio, cuarzo, plagioclasa sódica y feldespato potásico, la riolita es esferulítica, porfidica y fluidal, con feldespato potásico, cuarzo, plagioclasa sódica, biotita y circón. En algunos sitios se observan diferenciaciones locales, definen pseudoestratos horizontales o bien, ligeramente inclinados y están intrusionadas por diques andesíticos, presentan fracturamiento moderado, intemperismo profundo y espesor de más de 1000 m.

Aluvial Q(al). Depósitos fluviales de llanura de inundación. Se localiza en las partes topográficamente bajas y en los cauces de ríos y arroyos; la granulometría es muy variable en composición y tamaño, ya que están formados por guijarros, gravas, arena y arcillas; estos materiales en mayor proporción en el Oeste.

1.8.1.6. Edafología

Con base en la información obtenida en el estudio en el Ejido San Diego de Tezains y de acuerdo con la información contenida en la cartas edafológicas G13-07, G13-07, G13-10 y G13-11 escala 1:250,000, los principales grupos de suelo que se encuentran en el ejido son el cambisol, litosol, luvisol, regosol y feozem (INEGI, 1993c). Las asociaciones son las siguientes:

- i) Bc+Lc+Re/2. Este suelo es un cambisol crómico asociado con luvisol crómico y regosol éutrico de textura media (1% de la superficie).
- ii) Hh+I+Re/2+L. Este suelo es un feozem háplico asociado con litosol, regosol éutrico de textura media y luvisol (9% de la superficie).
- iii) Hh+Re+I/2+L. Este suelo es un feozem háplico asociado con regosol éutrico, litosol de textura media y luvisol (1% de la superficie).
- iv) I+Re+Hh/2. Asociación de litosol con regosol éutrico y feozem háplico de textura media (13% de la superficie).
- v) I+Re/2. Asociación de litosol con regosol éutrico de textura media (19% de la superficie).
- vi) Re+Hh+I/2+L. Asociación de regosol éutrico con feozem háplico, litosol de textura media y luvisol (6% de la superficie).
- vii) Re+Hh/2+L. Asociación de regosol éutrico con feozem háplico de textura media y luvisol (1% de la superficie).
- viii) Re+I+Hh/2+L. Asociación de regosol éutrico con litosol, feozem háplico de textura y luvisol (51% de la superficie).

La descripción de las unidades que forman cada asociación de suelo es la siguiente:

- i) Litosol (I). El litosol es un suelo de distribución muy amplia, se encuentra en todos los climas y con muy diversos tipos de vegetación. Son suelos sin desarrollo, con profundidad menor de 10 cm, tiene

características muy variables, según el material que lo forma. La susceptibilidad a la erosión depende de la zona donde se encuentren pudiendo ser de moderada a alta.

- ii) Regosol éutrico (Re). El regosol se caracteriza por no presentar capas distintas, son claros y se parecen a la roca que les dio origen, se puede presentar en muy diferentes climas y con diversos tipos de vegetación, su susceptibilidad a la erosión es muy variable y depende del terreno en que se encuentren.
- iii) Cambisol (B). El cambisol es un suelo joven, poco desarrollado, de cualquier clima menos de zonas áridas, con cualquier tipo de vegetación, en el subsuelo tiene una capa con terrones que presentan un cambio con respecto al tipo de roca subyacente, con alguna acumulación de arcilla, calcio, etc., la susceptibilidad a la erosión es de moderada a alta.
- iv) El Feozem (H). El feozem tiene una capa superficial oscura, suave y rica en materias orgánicas y nutrientes, se encuentra en algunos bajíos y mesetas de la zona.
- v) El Luvisol (L) El luvisol son suelos lavados, tienen acumulación de arcilla en el subsuelo, localizado en zonas templadas y semitropicales lluviosas, la vegetación que sustentan es selva baja subcaducifolia y bosques; son suelos rojos o claros, moderadamente ácidos y de susceptibilidad alta a la erosión.

1.8.1.7. Fisiografía

El Ejido se encuentra ubicado en la provincia fisiográfica Sierra Madre Occidental, subprovincias Gran Meseta y Cañones Duranguenses y Chihuahuenses. Clase de sistema de toposformas sierra asociada con cañones y Meseta asociada con cañadas y clases de toposformas Sierra alta sin fase y Gran Meseta sin fase.

1.8.1.8. Hidrología

El Ejido se localiza en la Cuenca “B” Río San Lorenzo, Subcuencas “B” Río Los Remedios, “C” Quebrada de las Vueltas y “D” Quebrada de San Gregorio; Cuenca “C” Río Culiacán, Subcuencas “E” Río Humaya y “F” Río de Los Lobos.

1.8.2. Características biológicas

1.8.2.1. Vegetación

El estrato arbóreo predominan los géneros *Pinus* (*Pinus arizonica* Engelmännii, *P. durangensis* Martínez, *P. teocote* Schlecht et Cham, *P. leiophylla* Schlecht. et Cham, *P. engelmannii* Carr, *P. herrerae*, *P. lumholtzii* Rob. et Fer., *P. ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* Shaw), *Juniperus* (*Juniperus deppeana* Steud), *Cupressus* (*Cupressus lindleyi*), *Pseudotsuga* (*Pseudotsuga menziesii* Mir), *Abies* (*Abies durangensis* Martínez), *Quercus* (*Quercus durifolia* Seeman, *Q. eduardii* Trel, *Q. konzattii* Trel, *Q. coccolobifolia* Trel, *Q. sideroxila* Humb Bonpl, *Q. candicans* Nee, *Q. resinosa* Liebm, *Q. rugosa* Nee, *Q. crassifolia* Humb Bonpl), *Arbutus* (*Arbutus xalapensis* Kunth), *Alnus* (*Alnus acuminata* Kunth) y *Populus* (*Populus alba* L.). Las especies de *Pinus* son las que dominan la superficie forestal. En el estrato arbustivo predominan las especies del género *Quercus*, *Arbutus*, *Juniperus* y *Arctostaphylos* principalmente. En el estrato herbáceo predominan *Plantago major*, *Fragaria vesca*, *Pteridium aquilinum*, *Bouteloua hirsuta*, *Mulenbergia rigida*, *Mulenbergia emerslevy*, *Arctostaphylos pungens*, *Rubus* sp, *Bacharis salicifolia*, *Lonicera pilosa*, *Ariocarpus fissauratus* principalmente.

1.8.2.2. Fauna

Las especies más comunes son: Guajolote silvestre o cócono (*Meleagris gallopavo*), grulla gris (*Grus canadensis*), aura común (*Cathartes aura*), cuervo grande ronco (*Corvus corax*), grulla gris (*Grus canadensis*), águila cola roja (*Buteo jamaicensis*), junco ojilumbre mexicano (*Junco phaeonotus*), tildio (*Charadrius vociferus*), pájaro azul (*Aphelocoma ultramarina*), primavera

(*Turdus migratorius*), tapa caminos (*Caprimulgus vociferus*), paloma ala blanca (*Zenaida asiática*), paloma huilota o tórtola (*Zenaida macroura*), martín pescador norteño (*Ceryle alcyon*), carpintero alirojo (*Colaptes auratus*), carpintero ocotero (*Picoides villosus*), carpintero arlequín (*Melanerpes formicivorus*), rascador pinto oscuro (*Pipilo erythrophthalmus*), reyezuelo sencillo (*Régulus caléndula*), azulejo gorjiazul (*Sialia mexicana*), trogón serrano (*Euptilotis neoxenus*), gorrión zacatero serrano (*Xenospiza baileyi*), gorrión sabanero (*Passerculus sandwichensis*), tangará roja-candelo (*Piranga flava*), troglodita ventriblanco (*Uropsila leucogastra*), colibrí orejiblanco (*Hylocharis leucotis*).

Los principales anfibios que se encuentran dentro del ejido son: Lagartija arbórea (*Urusuarios ornatos*), lagartija cornuda cola redonda (*Phrynosoma modestum*), rana común (*Pelophylax perezii*), sapo común (*Bufo bufo*).

Entre los mamíferos más comunes se encuentra el venado cola blanca (*Odocoileus virginianus* var. *couessi*), zorra gris (*Urocyon cinereoargenteus*), gato montés o lince (*Lynx rufus*), coyote (*Canis latrans*), mapache (*Procyon lotor*), tejón (*Nasua narica*), zorrillo (*Mephitis macrura*), conejos (*Sylvilagus floridanus*), ardilla amarilla (*Sciurus niger*), ardilla gris (*Sciurus aureogaster*), ardilla pedrera (*Spermophilus variegatus*), chichimoco (*Eutamias sibiricus*), entre otros.

Entre los reptiles más comunes está la víbora de cascabel (*Crotalus bailiscusp*), el escorpión (*Barisia* sp) y camaleón común (*Chamaeleo chamaleon*) principalmente.

1.9. Objetivos

1.9.1. Objetivo general

Generar componentes de un Sistema de Crecimiento y Rendimiento Maderable (SCRM) para *Pinus arizonica* Engelmännii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham, *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer. y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* Shaw

para el Ejido San Diego de Tezains, Municipio de Santiago Papasquiaro, Durango.

1.9.2.Objetivos específicos

- i) Ajustar sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus arizonica* Engelmannii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* Shaw.
- ii) Ajustar y desarrollar modelos de crecimiento en diámetro normal para *Pinus arizonica* Engelmannii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham, *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer. y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* Shaw.
- iii) Derivar y ajustar y comparar una ecuación dinámica con polimorfismo complejo y múltiples asíntotas para el crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus arizonica* Engelmannii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* Shaw.
- iv) Modelar y generar un sistema dinámico de las distribuciones diamétricas con la función Weibull para mezcla de especies de *Pinus*.
- v) Implementar los modelos desarrollados a datos de inventario de manejo forestal; para predecir y simular el crecimiento en diámetro y altura, calcular los atributos de inventario (número de árboles, área basal y volumen) con los estimadores de razón de medias (RM) y media de razón (MR) en muestreo aleatorio estratificado (MAE), clasificar la productividad de los terrenos forestales y predecir los parámetros de la distribución Weibull en función variables del rodal.

1.10. Literatura citada

- Álvarez, J. G. y A. D. Ruiz. 1998. Análisis y modelización de las distribuciones diamétricas de *Pinus pinaster* Ait. En Galicia. Invest. Agrar.: Sist. Recur. For. 7(1 y 2): 123-137.
- Assman, E. 1970. The principles of forest and yield study. Studies in the organic production, structure, increment and yield of forest stands. Ed. Pergamon Press. Oxford, UK. 506 p.
- Bailey, R. L., and J. L., Clutter. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. For. Sci. 20(2): 155-159.
- Bailey, R. L. and T. R. Dell. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. For. Sci. 19(2): 97-104.
- Burkhart, H. E. 1997. Cubic-foot volumen of lobolly pine to any merchantable top limit. South. J. Appl. For. 1(2): 7-9.
- Burkhart, H. E. Tomé M. 2012. Modeling Forest tres and stands. Springer. New York, USA. 457 p.
- Cao, Q.V., H. E. Burkhart, T. A. Max. 1980. Evaluations of two methods for cubic-foot volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. For. Sci. 26(1): 71-80.
- Cieszewski, C. J., and R. L. Bailey. 2000. Generalized Algebraic Difference Approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. For. Sci. 46(1): 116- 126.
- CONAFOR (Comisión Nacional Forestal), 2009. El inventario nacional forestal y de suelos México 2004-2009. Una herramienta que da certeza a la planeación, evaluación y desarrollo forestal de México. 20 p
- Cruz C., F. 2007. Modelos de volumen y crecimiento en altura dominante para *Pinus cooperi* Blanco en el estado de Durango, México. Tesis de Doctorado en Ciencias. Colegio de Postgraduados. Montecillo, Edo de México, México. 69 p.

- Cruz-Cobos, F., H. M. De los Santos-Posadas, J. R. Valdez-Lazalde. 2008. Sistema Compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. *Agrociencia*. 42(4): 473-485.
- Clutter, J. L., J. C. Fortson, L. V. Pienaar, G. H. Brister, R. L. Bailey. 1983. Timber management: a quantitative approach. Krieger Publishing Company, New York, USA. 333 p.
- Diéguez-Aranda, U., A. Rojo, F. Castedo-Dorado, J. G. Álvarez, M. Barrio-Anta, F. Crecente-Campo, J. M. González, C. Pérez-Cruzado, R. Rodríguez, C. A. López-Sánchez, M. Á. Balboa-Miruas, J. J. Gorgoso, F. Sánchez. 2009. Herramientas selvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia. Dirección Xeral de Montes, Consellería do Medio Rural, Xunta de Galicia. 259 p.
- Demaerschalk, J. P. 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. *For. Sci.* 18 (1): 241–245.
- Fidalgo, T., C. Pacheco y B. R. Parresol. 2009. Describing maritime pine diameter distribution with Jhonson's SB distribution using a new all-parameter recovery approach. *For. Sci.* 55(4): 367-373.
- Gadow, K. V., S. Sánchez, J. G. Álvarez. 2007. Estructura y Crecimiento del Bosque. ISBN: 978-84-690-7535-7. 280 p.
- Galán, R., H. M. De los Santos, J. I. Valdez. Crecimiento y rendimiento de *Cedrela odorata* L. y *Tabebuia donnel-smithii* Rose en San José Chapala, Pochutla, Oaxaca. *Madera y Bosques*. 14(2): 65-82.
- García, M. E. 1981. Modificaciones al Sistema de Clasificación Climática de Köppen (para adaptarlo a las condiciones de la República Mexicana). Edición de E. García impresa en Talleres Larios. México, D. F. 252 p.
- García, A. y M. S. González. 2003. Pináceas de Durango. 2da. ed. Comisión Nacional Forestal-Instituto de Ecología, A.C. Durango, Durango. 187 p.

- Gorgoso, J. J., J. G. Álvarez, A. Rojo y J. A. Garandas-Arias. 2007. Modeling diameter distributions of *Betula alba* L. stands in northwest Spain with the two-parameter Weibull function. *Invest. Agrar.: Sist. Recur. For.* 16(2): 113-123.
- INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática), 1993a. Cartas climáticas. Esc. 1:250,000. G13-7, G13-8, G13-10 y G13-11.
- INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática), 1993b. Cartas de uso de suelo y vegetación. Esc. 1:250,000. G13-7, G13-8, G13-10 y G13-11.
- INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática), 1993c. Cartas Edafológicas. Esc. 1:250,000. G13-7, G13-8, G13-10 y G13-11.
- INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática), 1993d. Cartas Geológicas. Esc. 1:250,000. G13-7, G13-8, G13-10 y G13-11.
- Kozak, A. 1988. A variable-exponent taper equation. *Can. J. For. Res.* 18(11): 1363-1368.
- Kozak, A. 2004. My last words on taper equations. *For Chron.* 80 (4): 507-515.
- Kudus, K. A., M. I. Ahmad and J. Lopongan. 1999. Nonlinear regression approach to estimating Jhonson SB parameters for diameter data. *Can. J. For. Res.* 29(3): 310-314.
- Lee, W. K., J. H. Seo, Y. M. Son, K. H. Lee, K. V. Gadow. 2003. Modeling stem profiles for *Pinus densiflora* in Korea. *For. Ecol. Manage.* 172(1): 69-77.
- Lei, Y. 2008. Evaluation of three methods for estimating the Weibull distribution parameters of Chinese pine (*Pinus tabulaeformis*). *J. For. Sci.* 54(12): 566-571.
- Mendoza, M. A. 1983. Conceptos generales sobre modelaje matemático. In *Primera reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. SARH-SF-INIF. Publicación especial No. 44.* pp. 35-45.

- Nanang, D. M. 1998. Suitability of the Normal, Log-normal and Weibull distributions for fitting diameter distributions of neem plantations in Northern Ghana. *For. Ecol. Manage.* 103(1): 1-7.
- PMFS, 2006. Programa de Manejo Forestal Sustentable para el Ejido San Diego de Tezains, Municipio de Santiago Papasquiario, Durango. Unidad de Conservación y Desarrollo Forestal No. 14 "San Diego de Tenzaenz". Nuevo San Diego, Santiago Papasquiario, Durango. 141 p.
- SEMARNAT (Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales), 2011. Anuario estadístico de la producción forestal 2011. Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales. 226 p.
- Saborovski, J., Š. Šmelko, 1998. Zur Auswertung von Stichprobeninventuren mit variablen Probeflächengrößen. *Allg. Forst-u. J.-Ztg.* 169(4): 71-75.
- Šmelko, Š., j. Merganič, 2008. Some methodological aspects of the National Forest Inventory and Monitoring in Slovakia. *J. For. Sci.* 54(10): 476-483.
- Šmelko Š., J. Saborows, 1999. Evaluation of variable size sampling plots for monitoring of forest condition. *J. For. Sci.* 45(8): 341-347.
- Torres, J. M. y O. S. Magaña. 2001. Evaluación de plantaciones forestales. Limusa Noriega Editores. México, D. F. 472 p.
- Torres-Rojo, J. M., O. S. Magaña-Torres, y M. Acosta-Mireles. 2000. Metodología para mejorar la predicción de parámetros de la distribuciones diamétricas (Ensayo). *Agrociencia.* 34(5): 627-637.
- Vanclay, J. K. 1994. Modeling forest growth and yield. Applications to mixed tropical forests. CAB International, Wallingfor, UK. 312 p.
- Zepeda E. M. 1990. Predictor de rendimiento de maderables probables de *Pinus patula* Schiedey Deppe., de Perote, Ver., México. Tesis de Maestría. Colegio de Postgraduados, Montecillo, Edo de México, México. 331 p.
- Zhang, L., K. C. Packard and Ch. Liu. 2003. A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Jhonson's SB distributions to mixed spruce-

fir stands in northeastern North America. *Can. J. For. Res.* 33(7): 1340-1347.

CAPÍTULO II

2. SISTEMA COMPATIBLE DE AHUSAMIENTO Y VOLUMEN COMERCIAL PARA LAS PRINCIPALES ESPECIES DE *Pinus* EN DURANGO, MÉXICO

2.1. Resumen

(Manuscrito enviado a la revista *Agrociencia*).

La estimación del volumen total y comercial representa una herramienta básica en el manejo forestal. En este trabajo, se presenta la evaluación de 3 sistemas segmentados de ahusamiento y volumen comercial con corteza, ajustados como ecuaciones simultáneas para datos de las principales especies forestales comerciales de Durango, México. Los ajustes se realizaron desde tres perspectivas: i) específicos para cada especie en los tres sistemas estudiados, ii) ajustes globales combinando todas las especies (modelo reducido) y iii) ajuste global considerando variables indicadoras para cada especie (modelo completo). Los estimadores de los parámetros sugieren que la forma dendrométrica de neiloide a paraboloide sucede al 5%, mientras que el cambio de paraboloide a cono tiene lugar al 73% de la altura total. El *Pinus ayacahuite* presenta los fustes menos cilíndricos, debido a su temperamento tolerante y es una especie con poca poda natural. El *Pinus arizonica* presenta los fuste más cilíndricos, mientras que *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote* tienen una forma paraboloide similar. Por arriba del segundo punto de inflexión, *Pinus leiophylla* presenta los fuste más cónicos. Los coeficientes de forma globales del volumen de fuste muestran al *Pinus ayacahuite* con el coeficiente más bajo (49%), y con un coeficiente medio del 58% para el resto de las especies.

Palabras clave: *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla*, *Pinus teocote*, sistema compatible.

2.2. Abstract

The estimation of the total and merchantable volume represents a basic tool in forest management. In this paper, we present the evaluation of 3

segmented taper and merchantable volume with stem bark. The systems were fitted as simultaneous equations for major commercial tree species of Durango, Mexico. We used three approaches to fit the systems: i) specific fittings for each species in the three studied systems, ii) global fitting combining all species (reduced model) and iii) global fitting considering dummy variables for each species (full model). The parameters estimates suggest that the change of neiloid dendrometric form to paraboloid happens at 5% of height, while change from paraboloid form to cone occurs at 73% of the total height. *Pinus ayacahuite* has the least cylindrical stem because of its tolerant temperament, therefore it is a species with little natural pruning. *Pinus arizonica* presents the most cylindrical stem while *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla* and *Pinus teocote* have a similar parabolic form. Above the second inflection point, *Pinus leiophylla* is the most conical species. The overall stem form coefficients showed that *Pinus ayacahuite* had the lowest coefficient (49%) with a mean coefficient of 58% for the other species.

Key words: *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla*, *Pinus teocote*, compatible system.

2.3. Introducción

La estimación del volumen total y comercial de los árboles de un rodal, constituye una herramienta básica en los inventarios forestales, y es esencial en la planeación del manejo forestal (Corral-Rivas y Návar-Cháidez, 2009). Las estimaciones de volumen comercial permiten predicciones a cualquier diámetro sobre el fuste y altura deseados (Clutter *et al.*, 1983). La predicción del volumen comercial de árboles y masas forestales puede ser realizada a través de diferentes métodos; los más usuales, incorporan el uso de ecuaciones de razón del volumen y de ahusamiento. Las ecuaciones de razón de volumen predicen el volumen comercial de un árbol como un porcentaje del volumen total del fuste y las ecuaciones de ahusamiento son formulaciones matemáticas que describen la forma del fuste. La integración de las secciones aportadas por la ecuación de ahusamiento del suelo, hasta la altura total del árbol,

proporciona el volumen total del fuste. Si en lugar de la altura total del árbol se emplea una altura inferior, se obtendrá el volumen comercial hasta dicha altura. En ambos casos, el volumen comercial del rodal es determinado por la suma de los volúmenes comerciales de todos los árboles del rodal (Jordan *et al.*, 2005; Zakrzewski y MacFarlane, 2006; Crecente-Campo *et al.*, 2009).

La clasificación de los modelos de ahusamiento se define por la complejidad en las expresiones matemáticas y de acuerdo al número de variables y coeficientes involucrados en el modelo. De esta manera, se pueden distinguir los modelos más simples (Ormerod, 1973), los modelos de ahusamiento de forma variable (Newnhan, 1990; Kozak, 1988) y los modelos polinomiales segmentados (Bruce *et al.*, 1968; Max y Burkhart, 1976; Cao *et al.*, 1980). Por otro lado, la compatibilidad de los sistemas de ahusamiento y volumen refiere a que a través de la integración de la ecuación de ahusamiento se puede obtener la ecuación de volumen; de esta manera, para una ecuación de volumen comercial dada hay definida intrínsecamente una función de ahusamiento (Clutter, 1980).

El ajuste como un sistema de ecuaciones simultáneas puede complementarse con la adición de efectos aleatorios bajo el enfoque de modelos de efectos mixtos (MEM). En los modelos de ahusamiento y volumen comercial, el análisis mediante MEM permite un uso más eficiente de los datos al controlar la variación aleatoria individual del árbol y desplazar los problemas de heterocedasticidad y autocorrelación; además, es posible usar estimaciones de los efectos aleatorios para tener predicciones más precisas de observaciones contenidas en la base de datos y predicción específica de nuevas observaciones (Fang and Bailey, 2001; Cruz-Cobos *et al.*, 2008).

Los objetivos del presente estudio fueron ajustar tres sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial segmentados, como ecuaciones simultáneas a través de Máxima Verosimilitud con Información Completa (FIML) para *Pinus arizonica* Engelmännii, *Pinus ayacahuite* Ehrenb, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus leiophylla* et Schlecht Cham. y *Pinus teocote*

et Schlecht et Cham en Durango, México. Se modeló el sistema de Fang *et al.* (2000) sin diferenciar entre las especies (modelo reducido) y con diferencias entre las especies con variables indicadoras (modelo completo).

2.4. Materiales y métodos

2.4.1. Descripción del área de estudio

La base de datos se colectó dentro del Ejido San Diego de Tezains, el cual se ubica al noroeste del estado de Durango, en la Sierra Madre Occidental, entre las coordenadas extremas; 24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" de Latitud Norte y 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" de Longitud Oeste.

Los tipos de climas predominantes en el área son templado, cálido húmedo y templado subhúmedo, con una precipitación media anual de 1375 mm (García, 1981). Las temperaturas medias varían desde los 8° C en las zonas más altas hasta los 24° C en las zonas bajas, en las cuales la altitud media apenas llega a los 600 m. Las asociaciones de suelo predominantes son litosol, cambisol, luvisol, regosol, feozem, crómicos, háplicos y éutricos. Los principales tipos de vegetación en el área son los bosques de pino-encino.

2.4.2. Descripción de las variables

La descripción de las variables utilizadas en el presente trabajo se presenta a continuación.

d = Diámetro a la altura h (cm).

D = Diámetro normal (cm).

D_b = Diámetro del tocón (cm).

h = Altura (m), desde la base del árbol hasta el punto donde se alcanza el diámetro d .

H = Altura total del árbol (m).

h_b = Altura del tocón (m).

V_t = Volumen total del árbol (m³).

V_c = Volumen comercial (m^3), a un diámetro d

V_s = Volumen de la troza i (m^3), desde la base del árbol hasta la altura h .

$k = \pi/40,000$ Constante métrica cuando el diámetro es dado en centímetros y altura en metros o $\pi/4$ cuando el diámetro es dado en metros.

$z = h/H$.

2.4.3. Características de la base de datos

La base de datos utilizada fue de 785, 413, 1081, 506 y 768 mediciones de diámetro a diferentes alturas obtenidas de 46, 26, 69, 30 y 51 árboles de *Pinus arizonica* (Pa), *Pinus ayacahuite* (Pay), *Pinus durangensis* (Pd), *Pinus leiophylla* (Pl) y *Pinus teocote* (Pt) respectivamente. Estos datos provienen de análisis troncales de árboles seleccionados de acuerdo a la caracterización diámetrica del área de estudio, considerando cubrir todas las categorías existentes en el mínimo de árboles posibles, ya que se trata de un método destructivo de los árboles para la colecta de la información.

Los datos se obtuvieron derribando el árbol a la altura mínima posible del tocón, extrayendo tres secciones hasta llegar a la altura del diámetro normal (1.30 m), la primera a 30 cm del suelo, la segunda a 60 cm y la tercera el complemento para el diámetro normal, posteriormente se obtuvieron secciones posibles por las características de los fustes a cada 2 m hasta llegar a la punta del árbol. En cada troza se midieron los diámetros y longitud (l) y se calculó el área de la base (S_1) y la punta (S_2). Los volúmenes de las trozas fueron calculados con la fórmula de Smalian (2.1) y la parte final con la del cono (2.2), siendo S_b el área de la base de dicho cono y l su altura.

$$V_s = \frac{S_1 + S_2}{2} l \quad (2.1)$$

$$V_s = \frac{S_b}{3} l \quad (2.2)$$

En el Cuadro 2.1 se presenta el diagnóstico general de las variables de la base de datos usada en el ajuste de los sistemas compatibles de ahusamiento y

volumen comercial. En la Figura 2.1 se muestra el comportamiento de los datos del diámetro relativo (d/D) contra la altura relativa (h/H) para las especies estudiadas.

Cuadro 2.1. Valores de los estadísticos descriptivos de la base de datos utilizada.

Especie	Variable	D (cm)	d_i (cm)	h (m)	H (m)	H_b (m)	h_i (m)	V_c (m ³)	V_t (m ³)
<i>Pa</i>	Media	28.80	20.73	8.95	18.83	0.17	9.88	0.54	0.87
	SD	10.39	12.52	7.37	5.03	0.05	7.19	0.61	0.68
	Mínimo	14.00	0.00	0.00	8.30	0.05	0.00	0.00	0.08
	Máximo	51.00	68.00	30.51	30.51	0.30	30.51	2.38	2.38
<i>Pay</i>	Media	30.18	21.19	8.03	18.11	0.24	10.08	0.51	0.80
	SD	10.53	13.95	6.87	4.71	0.07	6.69	0.58	0.66
	Mínimo	12.00	0.00	0.00	9.37	0.10	0.00	0.00	0.08
	Máximo	50.00	69.00	25.46	25.46	0.40	25.46	2.11	2.11
<i>Pd</i>	Media	26.12	19.25	7.71	16.92	0.19	9.22	0.39	0.65
	SD	9.56	11.72	6.53	4.70	0.07	6.56	0.48	0.57
	Mínimo	13.00	0.00	0.00	8.72	0.07	0.00	0.00	0.07
	Máximo	46.00	64.00	26.50	26.50	0.39	26.50	2.34	2.34
<i>Pl</i>	Media	29.21	20.74	8.51	17.97	0.18	9.46	0.56	0.87
	SD	11.21	12.90	7.03	5.37	0.08	6.77	0.68	0.76
	Mínimo	13.00	0.00	0.00	10.64	0.09	0.00	0.00	0.09
	Máximo	52.00	63.00	27.55	27.55	0.49	27.55	2.80	2.80
<i>Pt</i>	Media	26.59	19.78	7.16	15.80	0.19	8.64	0.38	0.63
	SD	9.46	11.79	6.16	4.34	0.06	6.11	0.48	0.57
	Mínimo	13.00	0.00	0.00	7.85	0.10	0.00	0.00	0.08
	Máximo	49.00	62.00	26.60	26.60	0.35	26.60	2.38	2.38

Pa es *Pinus arizonica*, *Pay* es *Pinus ayacahuite*, *Pd* es *Pinus durangensis*, *Pl* es *Pinus leiophylla*, *Pt* es *Pinus teocote* y SD es la desviación estándar.

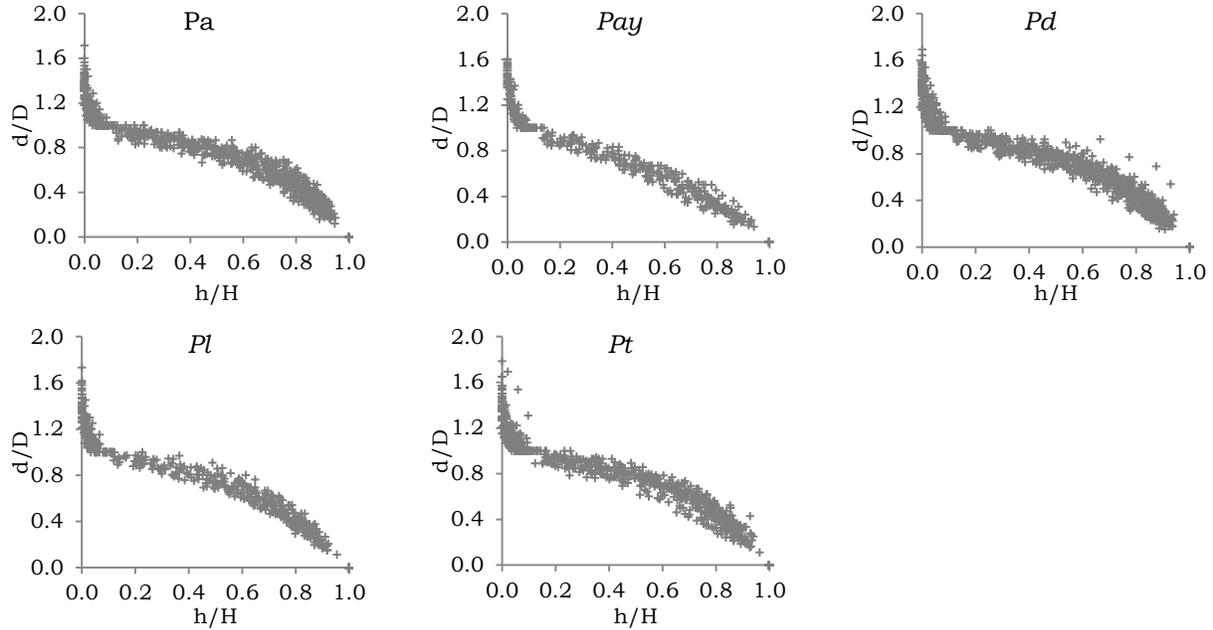


Figura 2.1. Diámetro relativo (d/D) contra altura relativa (h/H) de las especies analizadas.

2.4.4. Modelos utilizados

Los modelos segmentados de ahusamiento (d) y volumen comercial (V_c) ajustados como sistemas compatibles fueron los desarrollados por Max y Burkhardt, (1976), Clark *et al.*, (1991) y Fang *et al.*, (2000) 2.S1, 2.S2 y 2.S3 respectivamente. Las estructuras de los modelos se presentan en el Cuadro 2.2.

Cuadro 2.2. Sistemas de ahusamiento y volumen comercial ajustados a las especies de estudio.

Sistema	Ecuación
	$d = D(\beta_0(z-1) + \beta_1(z^2-1) + \beta_2(\rho_1-z)^2 I_1 + \beta_3(\rho_2-z)^2 I_2)^{0.5}$ <p>donde $I_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } q \leq \rho_1 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$, $I_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } q \leq \rho_2 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$</p>
2.S1	$V_c = kD^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta_1}{2} \left[\left(\frac{h^2}{H} - h \right) - \left(\frac{h_b^2}{H} - h_b \right) \right] + \frac{\beta_2}{3} \left[\left(\frac{h^3}{H^2} - h \right) - \left(\frac{h_b^3}{H^2} - h_b \right) \right] + \\ & \frac{\beta_3}{3} \left[\left(\rho_1 - \frac{h}{H} \right)^3 I_1 H - \left(\rho_1 - \frac{h_b}{H} \right)^3 I_1 H \right] + \frac{\beta_4}{3} \left[\left(\rho_2 - \frac{h}{H} \right)^3 I_2 H - \left(\rho_2 - \frac{h_b}{H} \right)^3 I_2 H \right] \end{aligned} \right\}$
2.S2	$d = \left\{ \begin{aligned} & I_S \left[D^2 \left(1 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 / D^3) ((1-h/H)^{\alpha_0} - (1-1.30/H)^{\alpha_0})}{1 - (1-1.30/H)^{\alpha_0}} \right) \right] + \\ & I_B \left[D^2 - \frac{(D^2 - F^2) ((1-1.30/H)^{\beta_0} - (1-h/H)^{\beta_0})}{(1-1.30/H)^{\beta_0} (1-5.30/H)^{\beta_0}} \right] + \\ & I_T \left[F^2 \left(\beta_2 \left(\frac{h-5.30}{H-5.30} - 1 \right)^2 + I_M \left(\frac{1-\beta_2}{\beta_1^2} \right) \left(\beta_1 - \frac{h-5.30}{H-5.30} \right)^2 \right) \right] \end{aligned} \right\}^{0.05}$

Sistema	Ecuación
	$\text{donde } I_S = \begin{cases} 1 & \text{si } h \leq 1.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, I_B = \begin{cases} 1 & \text{si } 1.30 \leq h < 5.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases},$ $I_T = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 1.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases},$ $I_M = \begin{cases} 1 & \text{si } h < (5.30 + \beta_2(H - 5.30)) \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$
	$V_c = \left\{ \begin{array}{l} I_1 D^2 \left[(1 - GW)(U_1 - L_1) + \frac{W((1-L_1/H)^{\alpha_0}(H-L_1) - (1-U_1/H)^{\alpha_0}(H-U_1))}{(\alpha_0+1)} \right] + \\ I_2 I_3 \left[T(U_2 - L_2) + \frac{q((1-L_2)^{\beta_0}(H-L_2) - (1-U_2/H)^{\beta_0}(H-U_2))}{(\beta_0+1)} \right] + \\ I_4 F^2 \left[\begin{array}{l} \beta_2(U_2 - L_2) - \frac{\beta_2((U_3-5.30)^2 - (L_3-5.30)^2)}{(H-5.30)} + \\ \frac{\beta_2/3((U_3-5.30)^3 - (L_3-5.30)^3)}{(H-5.30)^2} + \\ \frac{I_5/3(1-\beta_2/\beta_1^2)(\beta_1(H-5.30) - (L_3-5.30))^3}{(H-5.30)^2} - \\ \frac{I_6/3(1-\beta_2/\beta_1^2)(\beta_1(H-5.30) - (U_3-5.30))^3}{(H-5.30)^2} \end{array} \right] \end{array} \right\}$
	$\text{donde } I_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } h_b < 1.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, I_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } h_b < 5.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases},$ $I_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 1.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases},$ $I_4 = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 5.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, I_5 = \begin{cases} 1 & \text{si } (L_3 - 5.30) < \beta_2(H - 5.30) \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases},$ $I_6 = \begin{cases} 1 & \text{si } (U_3 - 5.30) < \beta_2(H - 5.30) \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad G = (1 - 1.30/H)^{\alpha_0},$ $W = (\alpha_1 + \alpha_2/D^3)/(1 - G), \quad x = (1 - 1.30/H)^{\beta_0}, \quad y = (1 - 5.30/H)^{\beta_0}, \quad q = \frac{(D^2 - F^2)}{(x-y)}, \quad T = D^2 - zx,$ $L_1 = \max(h_b, 0),$ $L_2 = \max(h_b, 1.30), \quad L_3 = \max(h_b, 5.30), \quad U_1 = \min(h, 1.30), \quad U_2 = \min(h, 5.30),$ $U_3 = \min(h, H) \text{ y } F = D(\Phi_1 + \Phi_2(5.30/H))^2$
2.S3	$d = c_1 \left(H^{(K-\beta_1)/\beta_1} (1-z)^{(K-R)/R} A_1^{(I_1+I_2)} A_2^{I_2} \right)^{0.5}$ $\text{donde } c_1 = (\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{(\alpha_2-K)/\beta_1} / [\beta_1(t_0 - t_1) + \beta_2(t_1 - A_1 t_2) + \beta_3 A_1 t_2])^{0.5},$ $t_0 = (1 - \rho_0)^{K/\beta_1}, \quad \rho_0 = H_b/H, \quad t_1 = (1 - \rho_1)^{K/\beta_1}, \quad t_2 = (1 - \rho_2)^{K/\beta_2}$ $A_1 = (1 - \rho_1)^{(\beta_2 - \beta_1)K/\beta_1 \beta_2}, \quad A_2 = (1 - \rho_2)^{(\beta_3 - \beta_2)K/\beta_2 \beta_3}, \quad R = \beta_1^{1-(I_1+I_2)} \beta_2^{I_1} \beta_3^{I_2}$ $I_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_1 \leq z \leq \rho_2 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_2 < z < 1 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$ $\rho_1 = h_1/H \text{ y } \rho_2 = h_2/H \text{ definen los dos puntos de inflexión, en la } h_1 \text{ y } h_2.$ $V_c = c_1^2 H^{(k/\beta_1)} [\beta_1 t_0 + (I_1 + I_2)(\beta_2 - \beta_1)t_1 + I_2(\beta_3 - \beta_2)A_1 t_2 - R(1-z)^{k/R} A_1^{I_1+I_2} A_2^{I_2}]$

Las cinco ecuaciones de volumen total con mejores resultados se muestran en el Cuadro 2.3 (Torres y Magaña, 2001).

Cuadro 2.3. Modelos de volumen total usados en el sistema 2.S3 (Fang et al., 2000).

Modelo	Nombre	Referencia	Ecuación
2.V1	Coficiente de forma constante	Torres y Magaña (2001)	$V_t = \alpha_0 D^2 H + e$
2.V2	Variable combinada	Spurr (1952)	$V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D^2 H + e$
2.V3	Thornber	Torres y Magaña (2001)	$V_t = \alpha_0 (H/D)^{\alpha_1} H^{\alpha_2} + e$
2.V4	Takata	Takata (1958)	$V_t = D^2 H / (\alpha_0 + \alpha_1 D) + e$
2.V5	Variable combinada no lineal	Spurr (1952)	$V_t = \alpha_0 (D^2 H)^{\alpha_1}$

Las variables indicadoras usadas en el modelo completo fueron consideradas como efectos aditivos a la especie de *Pinus durangensis*, ya que esta presenta el mayor número de observaciones usadas en el ajuste. El planteamiento usado para los parámetros globales del modelo fue expresado como 2.3.

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si } sp = j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (2.3)$$

donde I_j representa la variable indicadora para cada especie (sp), $j = 2$ *Pinus arizonica*, 3 *Pinus teocote*, 4 *Pinus leiophylla* y 5 *Pinus ayacahuite*.

Los parámetros del modelo de ahusamiento y volumen comercial fueron replanteados en función de las variables indicadoras, de forma tal que cada parámetro global α_i o β_i se puede escribir de manera general como $\alpha_i = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}I_2 + \alpha_{i3}I_3 + \alpha_{i4}I_4 + \alpha_{i5}I_5$ o $\beta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2}I_2 + \beta_{i3}I_3 + \beta_{i4}I_4 + \beta_{i5}I_5$, para $i = 1, 2$ y 3 de los parámetros del modelo de ahusamiento y volumen comercial. El modelo completo con variables indicadoras solo considera los parámetros significativos a un nivel de significancia del 5% en el proceso de modelado.

2.4.5. Estadísticos usados para medir el ajuste

La bondad de ajuste de los modelos analizados se midió a través del análisis de los residuales y con la obtención de estadísticos como el coeficiente de determinación ajustado (R_a^2), la raíz del cuadrado medio del error (RMSE), el sesgo promedio absoluto (\bar{E}) y el criterio de información de Akaike (Lu y Zhang, 2011). Para comparar el modelo completo contra el modelo reducido se usó la prueba de F generalizada (Washington et al., 2011).

$$R_a^2 = 1 - \left[\frac{n - 1 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right] \quad (2.4)$$

$$RMSE = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p} \right]^{0.5} \quad (2.5)$$

$$CV = \frac{[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n - 1]^{0.5}}{\bar{y}} \times 100 \quad (2.6)$$

$$\bar{E} = \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \right| \quad (2.7)$$

$$AIC = n \ln \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n \right] + 2p \quad (2.8)$$

$$F^* = \frac{(SSE_R - SSE_F) / df_R - df_F}{SSE_F / df_F} \quad (2.9)$$

donde y_i , \hat{y}_i e \bar{y} son los valores observado, predicho y medio de la variable dependiente, n es el número de observaciones, p es el número de parámetros del modelo, F^* es el valor de la prueba estadística que sigue una distribución F, SSE_R y SSE_F son la suma de cuadrados del error de los modelos reducido y completo y df_R y df_F son los grados de libertad del error los modelos reducido y completo respectivamente.

2.4.6. Metodología de ajuste de los modelos

Los sistemas compatibles de ecuaciones pueden ser ajustados por mínimos cuadrados ordinarios (OLS), ajustando una ecuación (ahusamiento o volumen comercial) y sustituyendo los valores de los parámetros estimados en la otra o ajustados simultáneamente con máxima verosimilitud con información completa (FIML) o regresión aparentemente no relacionada (SUR). Cuando se ajusta el sistema compatible con FIML o SUR se obtienen estimadores consistentes para las ecuaciones que forman el sistema, lo cual representa una ventaja sobre OLS, ya que en este último caso el modelador debe decidir si se minimiza el error en la ecuación de ahusamiento o en la volumen comercial, pero no en ambas (Borders, 1989; Fang *et al.*, 2000; Jiang *et al.*, 2005; Cruz-Cobos *et al.*, 2008; Brooks *et al.*, 2008). Para el sistema 2.S2 (Clark *et al.*, 1991), se estimó el diámetro d a la altura de 5.30 m con el modelo propuesto por Clark *et al.* (1991) ajustado de forma global a las especies estudiadas para las secciones en las cuales no se encontró esta característica.

Los modelos fueron ajustados simultáneamente para los componentes de ahusamiento y volumen comercial utilizando el Procedimiento Model SAS/ETS por la técnica FIML, optimizando el ajuste sobre la predicción de parámetros. Para el modelo reducido y completo se ajustó simultáneamente la ecuación de ahusamiento y volumen comercial con diámetros expresados en metros, con la finalidad de establecer diferencias observables entre los parámetros de las especies (SAS Institute Inc., 2011). En el Anexo 7.6.1 se presenta el código SAS para el ajuste del sistema 2.S3.

El sistema 2.S3 fue ajustado variando la ecuación de volumen total para evaluar la capacidad predictiva para cada especie ya que este sistema fue el que mejores resultados presentó a los datos usados en el estudio, al cual fue ajustado inicialmente con el modelo de volumen total desarrollado por Schumacher y Hall (1933), posteriormente de forma global a todas las especies (modelo reducido) y entre especies con variables indicadoras (modelo completo).

2.4.6.1. Multicolinealidad, autocorrelación y heterocedasticidad

Los tres problemas asociados con el ahusamiento, el volumen total y volumen comercial que violan los supuestos fundamentales de regresión, son la multicolinealidad, autocorrelación y heterocedasticidad (Bi, 2000; Castedo y Álvarez, 2003; Crecente-Campo *et al.*, 2009). Aunque la estimación de los coeficientes de regresión permanecen insesgadas y consistentes sobre la presencia de multicolinealidad, autocorrelación y heterocedasticidad, los coeficientes no son los más eficientes, lo cual puede afectar seriamente los errores estándar de los coeficientes de regresión, de tal manera que se invalidan las pruebas estadísticas usando las distribuciones de t o F y los intervalos de confianza (Neter *et al.*, 1996). La multicolinealidad se refiere a la existencia de correlaciones importantes entre las variables independientes en análisis de regresión, debido a que algunas de estas variables representan o miden un fenómeno similar. Una de las principales causas de la multicolinealidad es el uso de modelos complicados que incluyen varios

polinomios y términos de productos cruzados (Zimmerman y Núñez-Antón, 2001).

La presencia de multicolinealidad entre las variables de los sistemas analizados fue evaluada con la condición del número (CN), la cual se define como la raíz cuadrada del cociente entre el mayor y el menor autovalor de la matriz de correlación. De acuerdo con Belsey (1991), si el CN está dado por el intervalo de valores de 5-10 la colinealidad no representa problema, si se encuentra en el intervalo de 30-100 existen problemas asociados de multicolinealidad y si el valor del CN se encuentra entre el intervalo de 100-3000 existen fuertes problemas asociados a la multicolinealidad de variables.

Los problemas de autocorrelación en el componente de ahusamiento se corrigieron con una estructura de errores autorregresiva modificada, la cual consideró la distancia entre las mediciones de la altura comercial en cada uno de los árboles (Zimmerman y Núñez-Antón, 2001), la expresión es 2.10.

$$e_{ij} = d_1\gamma_1^{h_{ij}-h_{ij-1}}e_{ij-1} + d_2\gamma_2^{h_{ij}-h_{ij-2}}e_{ij-2} + \epsilon_{ij} \quad (2.10)$$

donde e_{ij} es el j residual ordinario en el árbol i , $d_i = 1$ para $j > 1$ y $d_i = 0$ para $j = 1$, γ_i es el parámetro autorregresivo de orden i y $h_{ij} - h_{ij-1}$ es la distancia de separación de la j a la $j - 1$ observación dentro de cada árbol.

La estructura de error CAR(2) fue programada en el procedimiento MODEL de SAS/ETSTM (SAS institute Inc., 2011), que permite la actualización dinámica de los residuales. La estructura CAR(2) implicó sensibilizar las pruebas de hipótesis de los parámetros en los sistemas ajustados, probando las diferencias de las formas dendrométricas de los fustes entre las especies de manera simultánea. La Figura 2.2 muestra la corrección de la autocorrelación de los errores de las mediciones de los diámetros y alturas en el mismo árbol en la ecuación de ahusamiento. El propósito principal del uso de una estructura de errores CAR(2) fue para mejorar la interpretación de las propiedades estadísticas del modelo de ahusamiento, pero no tiene una aplicación práctica a menos que se trabaje con varias medidas del diámetro a

diferentes alturas en el mismo árbol (Corral-Rivas *et al.*, 2007; Crecente-Campo *et al.*, 2009). Los valores del estadístico Durbin-Watson (Durbin and Watson, 1971) corroboran la corrección de la autocorrelación de los errores para el ahusamiento.

El problema de heterocedasticidad asociada al volumen comercial se corrigió con una función de potencia de la varianza del residual $\sigma_i^2 = (D^2H)^\phi$ con el D y la H como variables independientes (Furnival, 1961; Cailliez; 1980; Crecente-Campo *et al.*, 2009). El valor más razonable del término exponencial ϕ debería proveer la gráfica más homogénea de residuales estandarizados (Huang *et al.*, 2000). Este valor puede ser obtenido por pruebas de valores iterativos de ϕ o por optimización del valor usando el método sugerido por Harvey (1975), el cual consiste en el uso del error estimado del modelo no ponderado ($\hat{\epsilon}_i$) como la variable dependiente en la varianza del error del modelo $\hat{\epsilon}_i^2 = \phi_0(D^2H)^{\phi_1}$. Los parámetros fueron estimados y programados en el procedimiento MODEL de SAS/ETSTM (SAS Institute Inc., 2011) especificando $resid.V_c = resid.V_c / [(D^2H)^\phi]^{0.5}$.

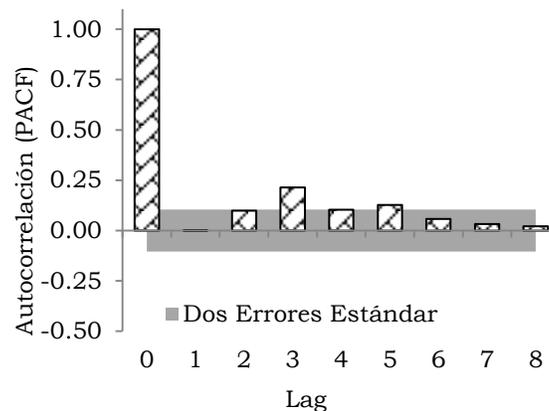


Figura 2.2. Gráfica de la Función de Autocorrelación Parcial del ajuste del modelo completo con un modelo autorregresivo continuo de segundo orden en la ecuación de ahusamiento.

2.5. Resultados y discusión

En el Cuadro 2.4 se presentan los estimadores de los parámetros y sus respectivos errores estándar para los sistemas ajustados simultáneamente en

el componente de ahusamiento y volumen comercial. Todos los parámetros fueron significativos a un nivel de significancia del 1%. En el Cuadro 2.5 se presentan los estadísticos de bondad de ajuste, en el que se puede observar la condición del número (CN) como medida de la colinealidad de las variables independientes involucradas en los componentes del sistema de ahusamiento y volumen comercial y la prueba de Durbin-Watson (*dw*) como medida de la corrección de la autocorrelación de los errores en el modelo de ahusamiento, debida a las mediciones de diámetro y altura en un mismo árbol.

El ajuste de los modelos de ahusamiento y volumen comercial como sistemas compatibles permitió minimizar simultáneamente el error en la ecuación de ahusamiento y volumen comercial (Borders, 1989; Jiang *et al.*, 2005; Brooks *et al.*, 2008; Cruz-Cobos *et al.*, 2008), lo cual es una ventaja cuando se ajusta ya sea la ecuación de ahusamiento o la de volumen comercial y se usan los estimadores de los parámetros para ambas. Con el ajuste simultáneo se logró optimizar los estimadores de los parámetros para ambos componentes.

Cuadro 2.4. Estimadores de los parámetros de los sistemas ajustados.

Sistema		Estimadores y error estándar											
		α_0	α_1	α_2	β_0	β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	γ_1	γ_2	
2.S1	Pa	θ_i	-	-	-	-8.893	4.290	310.2	-4.684	0.048	0.866	0.727	0.336
		ε_i	-	-	-	2.911	1.550	24.2	1.533	0.002	0.027	0.038	0.036
	Pay	θ_i	-	-	-	-4.397	2.122	396.4	-1.681	0.047	0.803	0.723	0.198
		ε_i	-	-	-	1.572	0.855	26.9	0.828	0.002	0.074	0.053	0.033
	Pd	θ_i	-	-	-	-7.061	3.362	580.9	-3.552	0.035	0.847	0.666	0.265
		ε_i	-	-	-	1.845	0.988	35.0	0.970	0.001	0.028	0.035	0.026
	Pl	θ_i	-	-	-	-6.431	3.139	814.8	-3.361	0.029	0.797	0.731	0.273
		ε_i	-	-	-	1.442	0.786	65.3	0.756	0.001	0.036	0.060	0.040
	Pt	θ_i	-	-	-	-8.032	3.878	784.3	-4.085	0.028	0.855	0.632	0.261
		ε_i	-	-	-	2.734	1.459	59.87	1.441	0.001	0.033	0.047	0.033
2.S2	Pa	θ_i	19.108	0.731	1785.3	0.677	0.825	4.595	-	-	-	0.670	0.486
		ε_i	1.553	0.012	180.4	0.022	0.014	0.290	-	-	-	0.032	0.045
	Pay	θ_i	34.276	1.047	1027.9	0.781	0.634	2.148	-	-	-	0.762	0.298
		ε_i	2.363	0.021	509.7	0.026	0.044	0.139	-	-	-	0.032	0.045
	Pd	θ_i	16.997	0.789	2163.9	0.719	0.776	3.712	-	-	-	0.641	0.389
		ε_i	1.142	0.012	142.5	0.027	0.013	0.157	-	-	-	0.030	0.036
	Pl	θ_i	21.433	0.830	2228.7	0.820	0.690	2.505	-	-	-	0.648	0.333
		ε_i	1.837	0.010	216.4	0.069	0.023	0.117	-	-	-	0.044	0.067
	Pt	θ_i	11.333	0.707	2958.1	0.607	0.777	3.661	-	-	-	0.668	0.458
		ε_i	1.043	0.015	159.1	0.026	0.020	0.234	-	-	-	0.036	0.047
2.S3	Pa	θ_i	8.2×10^{-5}	1.936	0.865	-	5.9×10^{-6}	4.2×10^{-5}	3.1×10^{-5}	0.045	0.706	0.606	0.271
		ε_i	1.1×10^{-6}	0.006	0.009	-	1.5×10^{-7}	5.6×10^{-7}	8.2×10^{-7}	0.001	0.016	0.051	0.039
	Pay	θ_i	3.5×10^{-5}	1.914	1.130	-	4.8×10^{-6}	3.3×10^{-5}	2.9×10^{-5}	0.041	0.723	0.676	0.166
		ε_i	1.6×10^{-6}	0.014	0.022	-	9.8×10^{-8}	4.8×10^{-7}	1.7×10^{-6}	0.001	0.067	0.055	0.031
	Pd	θ_i	7.1×10^{-5}	1.948	0.895	-	6.1×10^{-6}	4.0×10^{-5}	3.1×10^{-5}	0.047	0.709	0.592	0.183
		ε_i	9.0×10^{-7}	0.004	0.006	-	1.2×10^{-7}	4.6×10^{-7}	7.4×10^{-7}	0.001	0.014	0.040	0.028
	Pl	θ_i	9.4×10^{-5}	2.029	0.696	-	5.5×10^{-6}	4.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}	0.044	0.613	0.585	0.204
		ε_i	1.6×10^{-6}	0.007	0.008	-	1.5×10^{-7}	7.3×10^{-7}	8.5×10^{-7}	0.001	0.022	0.069	0.046
	Pt	θ_i	8.5×10^{-5}	1.908	0.880	-	6.1×10^{-6}	4.0×10^{-5}	3.1×10^{-5}	0.046	0.698	0.517	0.191
		ε_i	1.3×10^{-6}	0.011	0.012	-	1.8×10^{-7}	6.2×10^{-7}	9.0×10^{-7}	0.002	0.015	0.059	0.033

θ_i es el estimador del parámetro, ε_i es el error estándar del parámetro, Pa es *Pinus arizonica*, Pay es *Pinus ayacahuite*, Pd es *Pinus durangensis*, Pl es *Pinus leiophylla*, Pt es *Pinus teocote*.

Cuadro 2.5. Estadísticos de bondad de ajuste de los sistemas analizados.

Especie	Sistema	Componente	Estadísticos de ajuste						
			R_a^2	RMSE	\bar{E}	CV	AIC	dw	CN
Pa	2.S1	d	0.986	1.505	0.157	7.190	652	1.923	1661
		V_c	0.979	0.089	0.010	16.313	-3791	-	
	2.S2	d	0.985	1.550	0.361	7.239	698	2.002	16
		V_c	0.994	0.047	0.006	8.577	-4797	-	
	2.S3	d	0.986	1.470	0.142	7.093	617	1.8238	46
		V_c	0.987	0.069	0.013	12.842	-4180	-	
Pay	2.S1	d	0.990	1.401	0.240	6.451	288	1.920	708
		V_c	0.991	0.054	0.012	10.317	-2405	-	
	2.S2	d	0.986	1.645	0.499	7.325	421	1.876	7
		V_c	0.992	0.052	0.019	9.581	-2432	-	
	2.S3	d	0.989	1.460	0.284	6.886	324	1.8267	68
		V_c	0.992	0.052	0.011	10.362	-2427	-	
Pd	2.S1	d	0.985	1.432	0.087	7.402	787	1.955	1258
		V_c	0.989	0.050	0.0001	12.737	-6470	-	
	2.S2	d	0.982	1.554	0.431	7.728	963	1.956	14
		V_c	0.997	0.027	0.007	6.604	-7822	-	
	2.S3	d	0.985	1.426	0.218	7.408	780	1.9145	41
		V_c	0.992	0.042	0.008	10.639	-6862	-	
Pl	2.S1	d	0.988	1.389	0.032	6.647	342	1.928	526
		V_c	0.985	0.084	0.010	14.768	-2502	-	
	2.S2	d	0.988	1.390	0.319	6.476	343	2.010	9
		V_c	0.995	0.046	0.007	8.147	-3100	-	
	2.S3	d	0.990	1.295	0.172	6.242	273	2.0082	58
		V_c	0.997	0.038	0.013	6.866	-3287	-	
Pt	2.S1	d	0.981	1.636	0.050	8.230	767	2.039	1336
		V_c	0.983	0.063	0.004	16.445	-4242	-	
	2.S2	d	0.980	1.689	0.474	8.153	815	2.020	15
		V_c	0.996	0.030	0.006	7.586	-5399	-	
	2.S3	d	0.982	1.578	0.247	7.975	712	1.9877	53
		V_c	0.995	0.034	0.006	8.902	-5191	-	

El sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial desarrollado por Fang *et al.* (2000) ajustado para *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote*, como ajuste específico para cada especie, presentó ventajas en comparación con los sistemas desarrollados por Max y Burkhart (1976) y Clark *et al.* (1991). El sistema de Fang *et al.*, (2000) es muy versátil para la descripción de las formas de los fustes de los árboles y su implementación es relativamente sencilla para el cálculo de volúmenes en inventarios, facilitando su incorporación en los sistemas biométricos para el desarrollo de programas de manejo forestal en el Estado de Durango (Corral-Rivas *et al.*, 2007). El sistema de Fang *et al.* (2000) representa diversas bondades de aplicación para las especies que se desarrollan de forma

mezclada, ya que permite modelar el ahusamiento y volumen comercial de diferentes perspectivas; ajustes específicos para cada especie, con cambio de la ecuación de volumen total, ajuste global para todas las especies o con diferencias entre especies con el uso de variables indicadoras.

En el Cuadro 2.6 se presentan los estimadores de los parámetros del sistema 2.3 (Fang *et al.*, 2000). Con el cambio de la ecuación de volumen total, se observa que el uso del modelo de la Variable Combinada no Lineal (2.V5) presenta buenos resultados para *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote*, mientras que para *Pinus arizonica* el modelo de Takata (1958) (2.V3). En el Cuadro 2.7 se presentan los estadísticos de ajuste del sistema 3 (Fang *et al.*, 2000) con el cambio de la ecuación de volumen total. En los ajustes con la variación del modelo de volumen total, el uso del modelo de Schumacher and Hall, (1933) incorporado en el desarrollo del sistema 2.3 propuesto por Fang *et al.* (2000) sigue siendo superior para la mayoría de las especies, razón por la cual se usó dicha estructura para modelar globalmente a todas las especies (modelo reducido) y para establecer diferencias entre especies con variables indicadoras (modelo completo).

Cuadro 2.6. Estimadores y error estándar de los parámetros del sistema 2.S3 variando la ecuación de volumen total.

Sistema	Estimadores y error estándar										
		α_0	α_1	β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	γ_1	γ_2	
Pa	2.V1	θ_i	4.4x10 ⁻⁵	-	5.6x10 ⁻⁶	4.1x10 ⁻⁵	3.2x10 ⁻⁵	0.041	0.685	0.623	0.258
		ε_i	9.5x10 ⁻⁸	-	1.4x10 ⁻⁷	5.8x10 ⁻⁷	8.3x10 ⁻⁷	0.001	0.021	0.053	0.037
	2.V2	θ_i	1.9x10 ⁻²	4.2x10 ⁻⁵	5.5x10 ⁻⁶	4.1x10 ⁻⁵	3.1x10 ⁻⁵	0.041	0.707	0.608	0.258
		ε_i	4.9x10 ⁻⁴	7.7x10 ⁻⁸	1.3x10 ⁻⁷	5.5x10 ⁻⁷	8.1x10 ⁻⁷	0.001	0.016	0.051	0.037
	2.V3	θ_i	18970.57	119.09	5.5x10 ⁻⁶	4.2x10 ⁻⁵	3.2x10 ⁻⁵	0.042	0.694	0.621	0.271
		ε_i	92.155	2.387	1.3x10 ⁻⁷	5.7x10 ⁻⁷	8.2x10 ⁻⁷	0.001	0.018	0.050	0.037
	2.V4	θ_i	4.6x10 ⁻⁵	0.118	5.5x10 ⁻⁶	4.1x10 ⁻⁵	3.2x10 ⁻⁵	0.041	0.690	0.633	0.273
		ε_i	1.8x10 ⁻⁷	0.006	1.4x10 ⁻⁷	5.8x10 ⁻⁷	8.4x10 ⁻⁷	0.001	0.019	0.052	0.037
	2.V5	θ_i	7.7x10 ⁻⁵	0.943	5.5x10 ⁻⁶	4.1x10 ⁻⁵	3.1x10 ⁻⁵	0.041	0.729	0.613	0.268
		ε_i	9.4x10 ⁻⁷	0.001	1.3x10 ⁻⁷	5.1x10 ⁻⁷	8.4x10 ⁻⁷	0.001	0.014	0.051	0.037
Pay	2.V1	θ_i	3.8x10 ⁻⁵	-	4.8x10 ⁻⁶	3.3x10 ⁻⁵	2.9x10 ⁻⁵	0.041	0.715	0.671	0.166
		ε_i	8.0x10 ⁻⁸	-	9.8x10 ⁻⁸	4.8x10 ⁻⁷	1.7x10 ⁻⁶	0.001	0.067	0.054	0.032
	2.V2	θ_i	8.6x10 ⁻³	3.7x10 ⁻⁵	4.9x10 ⁻⁶	3.3x10 ⁻⁵	2.9x10 ⁻⁵	0.041	0.724	0.668	0.159
		ε_i	1.9x10 ⁻³	1.1x10 ⁻⁷	9.9x10 ⁻⁸	4.7x10 ⁻⁷	1.7E-06	0.001	0.064	0.054	0.031
	2.V3	θ_i	26415.49	0.711*	4.8x10 ⁻⁶	3.3x10 ⁻⁵	2.9x10 ⁻⁵	0.041	0.721	0.672	0.166
		ε_i	301.5	7.306	9.8x10 ⁻⁸	4.7x10 ⁻⁷	1.7x10 ⁻⁶	0.001	0.066	0.055	0.032
	2.V4	θ_i	4.0x10 ⁻⁵	0.075	4.8x10 ⁻⁶	3.3x10 ⁻⁵	3.0x10 ⁻⁵	0.041	0.721	0.676	0.165
		ε_i	3.5x10 ⁻⁷	0.015	9.8x10 ⁻⁸	4.7x10 ⁻⁷	1.7x10 ⁻⁶	0.001	0.071	0.054	0.031

Cuadro 2.7. Estimadores y error estándar de los parámetros del sistema 2.S3 variando la ecuación de volumen total continuación.

Sistema	Estimadores y error estándar									
		α_0	α_1	β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	γ_1	γ_2
2.V5	θ_i	3.9x10 ⁻⁵	0.998	4.8x10 ⁻⁶	3.3x10 ⁻⁵	2.9x10 ⁻⁵	0.041	0.720	0.671	0.165
	ε_i	1.5x10 ⁻⁶	0.004	9.8x10 ⁻⁸	4.7x10 ⁻⁷	1.7x10 ⁻⁶	0.001	0.067	0.055	0.032
2.V1	θ_i	4.3x10 ⁻⁵	-	5.1x10 ⁻⁶	3.9x10 ⁻⁵	3.0x10 ⁻⁵	0.037	0.704	0.603	0.216
	ε_i	5.1x10 ⁻⁸	-	1.1x10 ⁻⁷	3.9x10 ⁻⁷	7.4x10 ⁻⁷	0.001	0.015	0.041	0.026
2.V2	θ_i	1.8x10 ⁻²	4.2x10 ⁻⁵	6.0x10 ⁻⁶	4.0x10 ⁻⁵	3.1x10 ⁻⁵	0.047	0.703	0.590	0.182
	ε_i	4.2x10 ⁻⁴	5.1x10 ⁻⁸	1.2x10 ⁻⁷	4.6x10 ⁻⁷	7.1x10 ⁻⁷	0.001	0.014	0.040	0.027
Pd 2.V3	θ_i	20265.5	87.5	6.0x10 ⁻⁶	4.0x10 ⁻⁵	3.1x10 ⁻⁵	0.047	0.703	0.598	0.191
	ε_i	90.573	2.314	1.2x10 ⁻⁷	4.6x10 ⁻⁷	7.2x10 ⁻⁷	0.001	0.014	0.040	0.027
2.V4	θ_i	4.4x10 ⁻⁵	0.041	5.1x10 ⁻⁶	3.9x10 ⁻⁵	3.0x10 ⁻⁵	0.037	0.704	0.609	0.222
	ε_i	1.4x10 ⁻⁷	0.005	1.1x10 ⁻⁷	3.9x10 ⁻⁷	7.5x10 ⁻⁷	0.001	0.015	0.041	0.027
2.V5	θ_i	6.8x10 ⁻⁵	0.954	3.3x10 ⁻⁶	3.8x10 ⁻⁵	3.1x10 ⁻⁵	0.020	0.715	0.632	0.284
	ε_i	8.0x10 ⁻⁷	0.001	6.9x10 ⁻⁸	3.2x10 ⁻⁷	8.3x10 ⁻⁷	0.001	0.019	0.038	0.026
2.V1	θ_i	4.1x10 ⁻⁵	-	5.1x10 ⁻⁶	3.9x10 ⁻⁵	2.9x10 ⁻⁵	0.040	0.604	0.588	0.216
	ε_i	8.9x10 ⁻⁸	-	1.4x10 ⁻⁷	8.9x10 ⁻⁷	9.4x10 ⁻⁷	0.001	0.027	0.073	0.050
2.V2	θ_i	2.5x10 ⁻²	4.0x10 ⁻⁵	5.2x10 ⁻⁶	4.0x10 ⁻⁵	2.9x10 ⁻⁵	0.042	0.611	0.579	0.196
	ε_i	8.7x10 ⁻⁴	8.6x10 ⁻⁸	1.3x10 ⁻⁷	7.6x10 ⁻⁷	8.7x10 ⁻⁷	0.001	0.022	0.066	0.046
Pl 2.V3	θ_i	19116.8	133.0	5.4x10 ⁻⁶	4.0x10 ⁻⁵	2.9x10 ⁻⁵	0.042	0.612	0.621	0.223
	ε_i	177.7	4.651	1.4x10 ⁻⁷	7.6x10 ⁻⁷	8.4x10 ⁻⁷	0.001	0.022	0.065	0.048
2.V4	θ_i	4.3x10 ⁻⁵	0.094	5.1x10 ⁻⁶	3.9x10 ⁻⁵	2.9x10 ⁻⁵	0.040	0.603	0.613	0.224
	ε_i	2.7x10 ⁻⁷	0.010	1.4x10 ⁻⁷	8.9x10 ⁻⁷	9.3x10 ⁻⁷	0.001	0.027	0.070	0.050
2.V5	θ_i	8.3x10 ⁻⁵	0.932	5.3x10 ⁻⁶	4.0x10 ⁻⁵	3.0x10 ⁻⁵	0.043	0.610	0.602	0.212
	ε_i	1.7x10 ⁻⁶	0.002	1.4x10 ⁻⁷	7.3x10 ⁻⁷	8.4x10 ⁻⁷	0.001	0.022	0.066	0.047
2.V1	θ_i	4.3x10 ⁻⁵	-	5.5x10 ⁻⁶	4.0x10 ⁻⁵	3.0x10 ⁻⁵	0.041	0.682	0.528	0.205
	ε_i	6.6x10 ⁻⁸	-	1.7x10 ⁻⁷	6.7x10 ⁻⁷	8.9x10 ⁻⁷	0.002	0.017	0.060	0.034
2.V2	θ_i	2.3x10 ⁻²	4.1x10 ⁻⁵	5.7x10 ⁻⁶	4.0x10 ⁻⁵	3.0x10 ⁻⁵	0.042	0.689	0.532	0.205
	ε_i	6.8x10 ⁻⁴	6.3x10 ⁻⁸	1.6x10 ⁻⁷	5.8x10 ⁻⁷	8.9x10 ⁻⁷	0.001	0.015	0.059	0.036
Pt 2.V3	θ_i	18506.54	131.62	6.1x10 ⁻⁶	4.1x10 ⁻⁵	3.1x10 ⁻⁵	0.046	0.689	0.539	0.204
	ε_i	123.0	3.222	1.7x10 ⁻⁷	6.3x10 ⁻⁷	9.1x10 ⁻⁷	0.002	0.016	0.058	0.033
2.V4	θ_i	4.6x10 ⁻⁵	0.145	5.5x10 ⁻⁶	4.0x10 ⁻⁵	3.0x10 ⁻⁵	0.041	0.682	0.555	0.224
	ε_i	3.7x10 ⁻⁷	0.012	1.6x10 ⁻⁷	6.8x10 ⁻⁷	8.7x10 ⁻⁷	0.001	0.016	0.059	0.034
2.V5	θ_i	8.4x10 ⁻⁵	0.934	6.1x10 ⁻⁶	4.1x10 ⁻⁵	3.1x10 ⁻⁵	0.046	0.693	0.527	0.197
	ε_i	1.3x10 ⁻⁶	0.002	1.7x10 ⁻⁷	6.3x10 ⁻⁷	9.0x10 ⁻⁷	0.002	0.016	0.058	0.033

θ_i es el estimador del parámetro, ε_i es el error estándar del parámetro, * parámetros no significativos al 5% de significancia.

Cuadro 2.8. Estadísticos de bondad de ajuste del Sistema 2.S3 variando la ecuación de volumen total.

Sistema	Especie	Componente	Estadísticos de ajuste						
			R_a^2	RMSE	\bar{E}	CV	AIC	dw	CN
Pa	2.V1	d	0.985	1.539	0.073	7.423	686	1.761	4
		V_c	0.982	0.082	0.001	15.27	-3911	-	
	2.V2	d	0.986	1.489	0.091	7.185	636	1.798	4
		V_c	0.985	0.076	0.01	14.002	-4046	-	
	2.V3	d	0.986	1.465	0.14	7.068	610	1.844	7
		V_c	0.988	0.068	0.012	12.574	-4215	-	
	2.V4	d	0.985	1.52	0.081	7.332	668	1.783	5
		V_c	0.983	0.079	0.003	14.721	-3967	-	
	2.V5	d	0.986	1.465	0.132	7.066	610	1.832	24
		V_c	0.987	0.069	0.013	12.85	-4180	-	
Pay	2.V1	d	0.989	1.46	0.276	6.887	323	1.812	4
		V_c	0.991	0.054	0.012	10.67	-2405	-	
	2.V2	d	0.989	1.456	0.325	6.868	321	1.818	4
		V_c	0.991	0.055	0.013	10.936	-2383	-	
	2.V3	d	0.989	1.462	0.278	6.897	325	1.812	11
		V_c	0.991	0.054	0.012	10.685	-2402	-	
	2.V4	d	0.989	1.455	0.308	6.865	321	1.823	9
		V_c	0.991	0.054	0.012	10.645	-2406	-	
	2.V5	d	0.989	1.462	0.285	6.895	324	1.809	35
		V_c	0.991	0.054	0.012	10.72	-2400	-	
Pd	2.V1	d	0.984	1.477	0.01	7.672	853	1.970	4
		V_c	0.991	0.045	0.007	11.458	-6704	-	
	2.V2	d	0.985	1.429	0.178	7.422	782	1.935	4
		V_c	0.992	0.043	0.009	11.022	-6787	-	
	2.V3	d	0.985	1.434	0.201	7.449	790	1.936	9
		V_c	0.991	0.045	0.007	11.469	-6701	-	
	2.V4	d	0.984	1.471	0.029	7.643	846	1.986	6
		V_c	0.991	0.046	0.007	11.72	-6654	-	
	2.V5	d	0.986	1.395	0.065	7.248	731	1.965	27
		V_c	0.992	0.044	0.009	11.217	-6749	-	
Pl	2.V1	d	0.987	1.448	0.146	6.98	384	1.865	4
		V_c	0.992	0.06	0.012	10.727	-2837	-	
	2.V2	d	0.989	1.343	0.028	6.476	309	1.926	4
		V_c	0.994	0.053	0.015	9.401	-2970	-	
	2.V3	d	0.99	1.301	0.136	6.276	278	1.990	8
		V_c	0.995	0.05	0.012	8.896	-3026	-	
	2.V4	d	0.988	1.436	0.099	6.922	377	1.872	8
		V_c	0.991	0.062	0.011	11.131	-2799	-	
	2.V5	d	0.99	1.291	0.143	6.224	269	2.002	26
		V_c	0.995	0.046	0.014	8.211	-3107	-	
Pt	2.V1	d	0.98	1.678	0.091	8.48	805	2.000	4
		V_c	0.99	0.048	0.01	12.579	-4661	-	
	2.V2	d	0.982	1.575	0.113	7.961	709	2.021	4
		V_c	0.993	0.041	0.01	10.833	-4890	-	
	2.V3	d	0.982	1.568	0.235	7.926	702	2.003	9
		V_c	0.995	0.034	0.006	9.067	-5163	-	
	2.V4	d	0.981	1.636	0.042	8.271	767	2.012	9
		V_c	0.99	0.048	0.011	12.521	-4668	-	
	2.V5	d	0.982	1.567	0.241	7.922	701	1.995	27
		V_c	0.995	0.034	0.007	9.04	-5168	-	

El modelo reducido que describe el ajuste global para todas las especies con el sistema 2.3 (Fang *et al.*, 2000) y la ecuación de volumen total de Schumacher and Hall (1933) considera la forma de los fustes menos cilíndricos, ya que el segundo punto de inflexión sucede al 73% de la altura total con relación al promedio que se obtiene para el ajuste individual por especie (Cuadro 2.4). En el Cuadro 2.8 se pueden observar los estimadores de los parámetros, sus errores estándar y los estadísticos de ajuste para el ahusamiento y volumen comercial de manera global. El ajuste fue considerando la medición del diámetro en metros, lo que ayudó a obtener los coeficientes de las formas dendrométricas de manera más directa.

Cuadro 2.9. Estimadores, error estándar de los parámetros y estadísticos del modelo reducido del Sistema 2.S3.

Estadístico	Estimadores, error estándar y estadísticos de ajuste									
	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	γ_1	γ_2
θ_i	0.642	1.953	0.845	0.062	0.388	0.306	0.048	0.731	0.725	0.285
ε_i	0.019	0.006	0.008	0.001	0.002	0.005	0.001	0.008	0.018	0.016
Componente	R_a^2		RMSE		\bar{E}		CV		AIC	
d	0.9840		0.0156		2.6E-03		7.77		-29532	
V_c	0.9909		0.0532		7.7E-03		11.60		-20830	

θ_i es el estimador del parámetro, ε_i es el error estándar del parámetro.

El uso del modelo de volumen total de Schumacher y Hall (1933) dentro del sistema de Fang *et al.* (2000) mantiene los mejores resultados (Cuadro 2.5), ya que es un modelo más flexible para la estimación del volumen total (Clutter *et al.*, 1983; Fonweban *et al.*, 2012). Sin embargo, el uso del modelo de la variable combinada no lineal (Spurr, 1952) y el de Takata (Takata, 1958) generan resultados realistas y se reduce de 3 a 2 parámetros la ecuación de volumen total y a 5 la del sistema compatible. La precisión del sistema de ahusamiento y volumen comercial indudablemente depende de la precisión de la ecuación de volumen total utilizada (Diéguez-Aranda *et al.*, 2006), si la ecuación de volumen total tiene menos parámetros, el sistema compatible presenta mejor parsimonia.

El modelo completo que describe las diferencias entre los parámetros del volumen total y los que describen la forma del ahusamiento, ajustado con

variables indicadoras de efectos aditivos para *Pinus durangensis*, resultó estadísticamente mejor que el modelo reducido, de acuerdo a la prueba de F generalizada (Washington *et al.*, 2011) a un nivel de significancia del 1%. El modelo completo asume fustes menos esbeltos que el modelo reducido. De acuerdo a los valores de los puntos de inflexión, las diferencias de los estimadores de los parámetros en el modelo completo fueron más observables escalando los estimadores con el diámetro medido en metros (Cuadro 2.9).

Cuadro 2.10. Estimadores, error estándar de los parámetros y estadísticos del modelo completo del Sistema 2.S3.

Parámetro	Propiedades de los estimadores y estadísticos de ajuste									
	θ_i	ε_i	t	Pr> t	Comp	R_a^2	RMSE	\bar{E}	CV	AIC
$\alpha_0(d)$	0.6722	0.0183	36.74	<.0001						
$\alpha_0(ay)$	-0.3103	0.0208	-14.95	<.0001						
$\alpha_0(l)$	0.1916	0.0295	6.51	<.0001						
$\alpha_0(t)$	-0.0388	0.0071	-5.45	<.0001						
$\alpha_1(d)$	1.9872	0.0058	341.89	<.0001	d	0.9857	0.0148	2.7E-03	7.35	-29914
$\alpha_1(a)$	-0.0172	0.0027	-6.45	<.0001						
$\alpha_1(t)$	-0.0507	0.0085	-5.98	<.0001						
$\alpha_2(d)$	0.8477	0.0075	112.37	<.0001						
$\alpha_2(ay)$	0.1649	0.0164	10.03	<.0001						
$\alpha_2(l)$	-0.0875	0.0118	-7.43	<.0001						
$\beta_1(d)$	0.0634	0.0010	63.75	<.0001						
$\beta_1(ay)$	-0.0080	0.0014	-5.68	<.0001						
$\beta_2(d)$	0.3926	0.0023	170.31	<.0001						
$\beta_2(a)$	0.0221	0.0037	5.95	<.0001						
$\beta_2(ay)$	-0.0667	0.0042	-16.05	<.0001						
$\beta_3(d)$	0.3120	0.0044	71.49	<.0001	V_c	0.9924	0.0486	5.4E-03	10.58	-21470
$\beta_3(l)$	-0.0467	0.0086	-5.43	<.0001						
ρ_1	0.0485	0.0007	64.87	<.0001						
ρ_2	0.7254	0.0071	102.63	<.0001						
γ_1	0.6689	0.0198	33.72	<.0001						
γ_2	0.2484	0.0153	16.24	<.0001						

En el modelo completo se redujo la raíz del error medio cuadrático en 5% y 9% para el ahusamiento y volumen comercial, respectivamente, comparado con los estadísticos del modelo reducido. Así el modelo completo presenta mejor capacidad de predicción del ahusamiento y volumen comercial para las especies estudiadas.

El ajuste específico (Cuadro 2.9) muestra que *Pinus arizonica* presenta fustes más cilíndricos (factor de forma $ff=0.528$ para el segmento medio, calculado como $ff=\beta_1i \times k^{-1}$) y *Pinus ayacahuite* los fustes más cónicos ($ff=0.415$),

mientras que *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote* presentan fustes estadísticamente iguales con forma de paraboloides casi perfecta ($ff=0.499$). Esta cualidad responde tanto a las características de la poda natural de los árboles y como al hecho de ser las especies más apreciadas por su madera y abundancia en la región. En contraste, *Pinus ayacahuite* es la especie que presenta menor poda natural, ya que es una especie de baja importancia económica por las propiedades estructurales de la madera y el manejo forestal para esta especie fundamentalmente considera principios ecológicos y de conservación. La forma paraboloides casi perfecta en las especies estudiadas se fundamenta en las acciones de manejo forestal a las áreas de estudio. La aplicación de podas y manejo de la densidad (aclareos) han contribuido en la obtención de fustes más cilíndricos y de mejor calidad para la industria del aserrío.

En la Figura 2.3 se muestra la distribución de los residuales en forma de gráficas de caja y alambre del modelo completo para el ahusamiento (d), por categorías de porcentaje de ala altura relativa (Hm/H) y volumen comercial (V_c) por categoría diámetrica (CD).

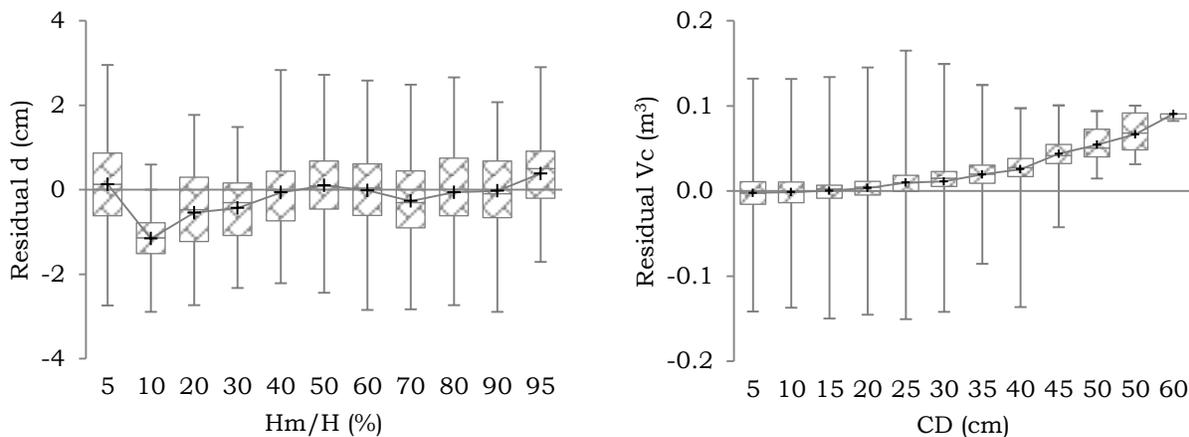


Figura 2.3. Distribución de los residuales en gráficas de caja y alambre para el ahusamiento y volumen comercial, + representa la media del residual y - representa la mediana del residual.

La distribución de los residuales por categoría de porcentaje de la altura relativa para el ahusamiento y por categorías de diámetro (5 cm) para el volumen a las diferentes alturas comerciales observadas, indican que el modelo

completo es muy preciso cuando se quiere obtener volumen comercial a diámetros de punta de 25 cm y diámetros menores, la aplicación no es práctica para diámetros y alturas por abajo del diámetro normal. Corral-Rivas *et al.* (2007) encontraron para el ahusamiento encontraron una distribución muy cercana al 0 para las especies estudiadas de la región de El Salto, Durango, México; sin embargo, no presentan la categoría relativa de alturas del 10%, para la cual en el presente estudio se encontraron los errores más altos.

El modelo completo con el uso de variables indicadoras para las especies de estudio presenta ventajas importantes en cuanto al modelo reducido, ya que el modelo completo asume las diferencias en los parámetros de la ecuación de volumen total (Schumacher and Hall, 1933) y las diferencias en los parámetros que definen el ahusamiento y volumen comercial para las especies estudiadas. Corral-Rivas *et al.* (2007) en su estudio comparan el ajuste del modelo de ahusamiento de Fang *et al.* (2000) para cinco especies forestales, asumiendo la comparación entre todos los pares posibles de las especies estudiadas (*Pinus cooperi*, *Pinus durangensis*, *Pinus engelmannii*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote*). Estos autores reportan 10 comparaciones (modelos completos) y encontraron diferencias para todos los casos entre el modelo completo y el modelo reducido. La estrategia seguida en este estudio fue encontrar las diferencias entre todas las especies; el modelo completo describe las diferencias por adicción a *Pinus durangensis* de los parámetros que describen la forma del ahusamiento y volumen total y comercial, los parámetros para las adiciones que no fueron significativas al 5% de significancia se asumen iguales. El modelo completo crece a 19 parámetros más 2 que representan al modelo autorregresivo de errores de segundo orden y describe las diferencias y similitudes de los parámetros globales y específicos entre las especies estudiadas (Cuadro 2.9).

El modelo completo fue ajustado bajo el enfoque de Modelos con Efectos Mixtos (MEM), para esto se utilizó una formulación bivariada con efecto aleatorio debido al árbol, asumiendo efectos fijos y aleatorios al parámetro que describe la forma paraboloides del fuste (β_2). Se usó una estructura como la

propuesta por Hall and Clutter (2004) y estudiada por Cruz-Cobos *et al.* (2008) para el ajuste de un sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial. Sin embargo, los resultados obtenidos sugieren que la estructura del modelo completo es estadísticamente confiable para modelar los componentes del sistema para las especies estudiadas, ya que con el ajuste bajo MEM se logra minimizar el cuadrado medio del error del modelo de ahusamiento, más no el de volumen comercial y el sesgo promedio aumentaba considerablemente para el componente del volumen comercial. Por esta razón y considerando que la estructura bivariada compensa por el doble de grados de libertad, no se presentan los resultados del ajuste del modelo bajo este enfoque. Debido a que el objetivo del estudio consideró ajustes como sistemas compatibles y el ajuste del ahusamiento o volumen comercial bajo MEM, no incorporaba la reducción de la variabilidad debida al árbol para ambos componentes simultáneamente.

2.6. Conclusiones

El sistema desarrollado por Fang *et al.* (2000) de acuerdo a los estadísticos de ajuste, fue mejor que el desarrollado por Max y Burkhart (1976), así como el sistema de Clark *et al.* (1991). El uso del modelo completo con variables indicadoras muestra las diferencias en el volumen total y la forma del fuste para *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote*. El uso de esta estructura predice el ahusamiento y volumen comercial estadísticamente confiable y de forma realista para las especies de estudio y ayudará en la caracterización del volumen total, comercial y determinación de diámetros a alturas deseadas, así como alturas a diámetros específicos con la ecuación que relaciona a la altura comercial.

Los resultados del modelo completo muestran que los parámetros que modelan el volumen y ahusamiento son muy similares para *Pinus durangensis*, *Pinus arizonica* y *Pinus teocote*, ya que en la mayoría de los parámetros no tienen adición al parámetro global base (*Pinus durangensis*), las similitudes se fundamentan en que estas especies comparten espacios de crecimiento, se desarrollan de forma mezclada y la silvicultura aplicada es similar. El uso de

una estructura de este tipo hace eficiente el ajuste del sistema compatible, se utilizan todos los datos en el ajuste, los errores estándar de los parámetros disminuyen y se vuelven altamente significativos. Los coeficientes de forma para el volumen total de fuste obtenidos con el modelo completo son de 49% para *Pinus ayacahuite* y de 58% para el resto de las especies.

Los diferentes modelos de volumen total utilizados en el sistema compatible de Fang *et al.* (2000) muestra las bondades de predicción del sistema de ahusamiento y volumen comercial que con diferentes modelos de volumen total. Esta es una ventaja respecto a los otros sistemas cuyo modelo de volumen total implícito siempre es de la forma $V_t = \alpha \times D^2 H$. Es interesante notar como el modelo de la variable combinada no lineal y el de Takata mostraron buenos resultados para las especies estudiadas y modelos con más parsimonia.

2.7. Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), número de beca 247171, del Postgrado en Ciencias Forestales del Colegio de Postgraduados, Campus Montecillo, con el apoyo de la Escuela Politécnica Superior de Lugo, Universidad de Santiago de Compostela, España, así como del Ejido San Diego de Tezains por la gran disponibilidad en el uso de la información.

2.8. Literatura citada

- Belsey, D. A. 1991. Conditioning diagnostic, collinearity and weak data in regression. John Wiley & Sons Inc. New York. 396 p.
- Bi, H. 2000. Trigonometric variable-form taper equations for Australian eucalyptus. For. Sci. 46: 397-409.
- Borders, B. E. 1989. Systems of equations in forest stand modeling. For. Sci. 35(2): 548-556.

- Brooks, J. R., L. Jiang, and R. Özcelik. 2008. Compatible stem volumen and taper equations for Brutian pine Cedar of Lebanon, and Cilicica fir in Turkey. *For. Ecol. Manage.* 256: 147-151.
- Bruce, R., L. Curtis, and C. Van Coevering. 1968. Development of a system of taper and volume tables for red alder. *For. Sci.* 14: 339–350.
- Cailliez, F. 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento. Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO). Roma, Italia. *Montes*, 22/1. 92 p.
- Cao, Q. V., H. E. Burkhart, and T. A. Max. 1980. Evaluations of two methods for cubic-foot volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* 26: 71–80.
- Castedo D., F., y J. G. Álvarez G. 2003. Construcción de una Tarifa de Cubicación con Clasificación de productos para *Pinus Radiata* D. Don en Galicia basado en una función de perfil del tronco. *Invest. Agrar. Sist. Recur. For.* 9(2): 253–268.
- Clark, A., R. A. Souter, and B. E. Schalaegel. 1991. Stem profile equations for southern tree species. USDA For. Serv. Res. Pap. SE-282. 113 p.
- Clutter, J. L. 1980. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations *For Sci.* 26: 117-120.
- Clutter, J. L., J. C. Forston, L. V. Pienar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. *Timber management*. Wiley, New York. 333 p.
- Corral-Rivas, J. J., U. Diéguez-Aranda, S. Corral R., and F. Castedo D. 2007. A merchantable volume system for major pine species in El Salto, Durango (México). *For. Ecol. Manage.* 238: 118-129.
- Corral-Rivas, S., y J. J. Návar-Chaidez. 2009. Comparación de técnicas de estimación de volumen fustal total para cinco especies de Durango, México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente* 15(1): 5-13.

- Crecente-Campo, F., A. Rojo A., and U. Diéguez-Aranda. 2009. A merchantable volumen system for *Pinus sylvestris* L. in the major mountains ranges of Spain. *Ann. For. Sci.* 66(808): 1-12.
- Cruz-Cobos, F., H. M. De los Santos-Posadas, y J. R. Valdéz-Lazalde, 2008. Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango México. *Agrociencia* 42: 473-485.
- Diéguez-Aranda, U., F. Castedo-Dorado, J. G. Álvarez-González, y A. Rojo A. 2006. Compatible taper function for scots pine plantations in northwestern Spain. *Can. J. For. Res.* 36: 1190-1205.
- Durbin, J., and G. S. Watson. 1971. Testing for serial correlation in least squares regression III. *Biometrika* 58: 1-19.
- Fang, Z., and R. L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural tratements. *For. Sci.* 47(3): 287-300.
- Fang, Z., B. E. Borders, and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for Loblolly and Slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *For. Sci.* 46(1): 1-12.
- Fonweban, J., B. Gardiner, and D. Auty. 2012. Variable-top merchantable volumen equations for Scots pine (*Pinus sylvestris*) and Sitka spruce (*Picea sitchensis* Bong. Carr.) in Northern Britain. *Forestry.* 85(2): 237-253.
- Furnival, G. M. 1961. An index for comparing equations used in constructing volumen tables. *For. Sci.* 7: 337-341.
- García, E. 1981. Modificaciones al Sistema de Clasificación Climática de Köppen (para adaptarlo a las condiciones de la República Mexicana). Edición de E. García impresa en Talleres Larios, México, D. F. 252 p.
- Hall, D. B., and M. Clutter. 2004. Multivariate multilevel nolinear Mixed Effects Models for timber yield predictions. *Biometrics.* 60: 16-24.

- Harvey, W. R. 1975. Least-Squares Analysis of Data with Unequal Subclass Numbers, Report ARS H-4: USDA.
- Huang, S., D. Price, and S. J. Titus. 2000. Development of ecoregion-based height-diameter models for White spruce in boreal forests. *For. Ecol. Manage.* 129: 125-141.
- Jiang, L., J. R. Brooks, and J. Wang. 2005. Compatible taper and volume equation for yellow-poplar in West Virginia. *For. Ecol. Manage.* 213: 399-409.
- Jordan, L., K. Berenhaut, R. Souter, and R. F. Daniels. 2005. Parsimonious and completely compatible taper, total and merchantable volume models. *For. Sci.* 51(6): 578–584.
- Kozak, A. 1988. A variable-exponent taper equation. *Can. J. For. Res.* 18: 363-1368.
- Lu, J., and L. Zhang. 2011. Modeling of Tree Height-Diameter Relationships Using Spatial Autorregressive. Models. *For. Sci.* 57(3): 252-264.
- Max, T. A., and H. E. Burkhart. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *For. Sci.* 22(3): 283–289.
- Neter, J., H. K. Michael, J. Ch. Nachtsheim, and W. Wasserman. 1996. *Applied Linear Regression Models*. Third edition. United States of America. 720 p.
- Newnhan, R. 1990. *Mesure du défilement de forme variable*. Forests Canada. Institut Forestier National de Petawawa. Rapport information PI-X-83-F, 31p.
- Ormerod, D. 1973. A simple bole model. *For. Chro.* 49: 136-138.
- SAS Institute Inc., 2011. *SAS/ETS® 9.3 User's Guide*. Cary, NC:, SAS Institute Inc. pp 1023-1355.
- Schumacher, E. X., and F. D. S. Hall. 1933. Logarithmic expression of timber-tree volumen. *J. Agr. Res.* 4: 719-734.
- Spurr, H., 1952. *Forest inventory*. Ronald Press, New York, USA. 476 p.

- Takata, K., 1958. Construction of universal diameter-height-curves. J. Jap. For. Soci. 40(1): 1-6.
- Torres R., y J. M., O. S. Magaña T. 2001. Evaluación de plantaciones forestales. Limusa Noriega Editores, México, D. F. 472 p.
- Washington, S. P., M. G. Karlaftis, and F. L. Mannering. 2011. Statistical and Econometric Methods for Transportation Data Analysis. Chapman & Hall Book/CRC Taylor & Francis Group. Second Edition. New York, NY, U.S. pp. 106-109.
- Zakrzewski, W. T., and D. W. MacFarlane. 2006. Regional stem profile model for cross-border comparisons of harvested Red pine (*Pinus resinosa* Ait.) in Ontario and Michigan. For. Sci. 52: 468–475.
- Zimmerman, D. L., and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modeling of growth curve data: an overview (with discussion). Test 10: 1–73.

CAPÍTULO III

3. CRECIMIENTO EN DIÁMETRO NORMAL PARA *Pinus* EN DURANGO

3.1. Resumen

(Manuscrito enviado a la Revista Mexicana de Ciencias Forestales).

Los modelos de crecimiento y rendimiento son considerados una herramienta muy valiosa en la planeación y manejo de los bosques, ya que ayudan a proyectar las condiciones futuras del rodal y son la base para la elaboración y seguimiento de los programas de manejo forestal. En el presente trabajo se muestran los resultados de la evaluación de 3 modelos de crecimiento en diferencia algebraica (ADA) y 3 en diferencia algebraica generalizada (GADA) para predecir el crecimiento en diámetro normal en función de la edad para 6 de las principales especies comerciales de *Pinus* en Durango. Para el ajuste de los modelos se utilizó información de 44,302 virutas de crecimiento, colectadas de 15,609 sitios de inventario forestal. El modelo polimórfico de Chapman-Richards predice mejor el crecimiento de *Pinus lumholtzii*, el modelo GADA con tasas de crecimiento y asíntotas variables derivado de Strand Generalizado resulto el mejor para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*, mientras que para *Pinus ayacahuite* un modelo GADA basado en Verhulst-Logística predice mejor el crecimiento en diámetro normal. Todos los modelos fueron corregidos por autocorrelación usando una estructura autorregresiva continua de segundo orden. Los patrones de crecimiento en diámetro sugieren que *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* y *Pinus durangensis* son las especies que presentan las tasas de crecimiento más altas, ya que crecen en condiciones de calidad de estación muy similares, *Pinus teocote* presenta patrones de crecimiento medios y *Pinus leiophylla* y *Pinus lumholtzii* las menores tasas de crecimiento porcentual.

Palabras clave: Área basal, diámetro normal, crecimiento, incremento, modelo dinámico, *Pinus*.

3.2. Abstract

Growth and yield models are considered valuable tools in the planning and management of forests since they help to project future stand conditions and provide the basis for most forest management programs. In this paper we present the evaluation of three algebraic difference approach (ADA) and three Generalized Algebraic Difference models (GADA) use to predict growth in diameter at breast height as a function of age for six of the main commercial species *Pinus* in Durango. All the models fitted using data from 44,302 increment cores collected at 5,609 forest inventory plots. The polymorphic Chapman –Richards model was the best to predict the dbh growth of *Pinus lumholtzii*, the GADA model with growth rates and asymptotes variables derived from Strand Generalized model was the best for *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* and *Pinus leiophylla*, while for the *Pinus ayacahuite* a GADA model based on Logistic-Verhulst model was the best to predicts dbh growth. All models were corrected for autocorrelation using a continuous second-order autoregressive structure. The diameter growth patterns suggest that *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* and *Pinus durangensis* have the highest growth rates, while growing in similar site conditions, *Pinus teocote* is closer to the global mean growth patterns while *Pinus leiophylla* and *Pinus lumholtzii* have the slowest growth rates.

Key words: Basal area, diameter at breast heights, growths, incremento, dynamic Model, *Pinus*.

3.3. Introducción

Un bosque manejado es un sistema biológico dinámico continuamente en cambio, como resultado de los procesos naturales y de actividades silvícolas específicas que tienen lugar. El uso de los modelos de crecimiento e incremento permite actualizar la información de inventarios forestales, predicción de incrementos y la exploración de alternativas de manejo (Falcao y Borges, 2005; Castedo-Dorado *et al.*, 2007).

Uno de los temas fundamentales de la investigación forestal es predecir el crecimiento de las masas forestales y su respuesta a las actividades silvícolas es. El manejo forestal asume que el crecimiento de la masa es predecible (hasta cierto punto) ya que de otra forma es imposible establecer estrategias de manejo en el corto y largo plazo logrando anticiparse a las consecuencias de una acción sobre el manejo de los bosques (Castedo *et al.*, 2007).

Los modelos de crecimiento y rendimiento pueden ser clasificados en dos categorías principales: Modelos a nivel rodal que usan características del rodal, como el área basal, volumen y distribuciones diamétricas, para simular el crecimiento y rendimiento del rodal. Los modelos de árbol individual usan árboles como la unidad básica para la simulación del crecimiento y mortalidad; los valores a nivel rodal son estimados sumando las estimaciones de todos los árboles (Peng, 2000). La ventaja de usar modelos de árbol individual es que el rodal puede ser ilustrado con más profundidad y con mayor diversidad de tratamientos. Los modelos de árbol individual pueden ser dependientes o independientes de la distancia (Trasobares *et al.*, 2004).

La técnica para derivar ecuaciones dinámicas conocida como método de diferencia algebraica (ADA), involucra esencialmente la sustitución de un parámetro del modelo base para expresarlo como una función del índice de sitio o de una condición inicial de la variable de interés (en este caso el diámetro normal). Con el uso de esta metodología se asume que las condiciones iniciales contienen suficiente información acerca de la trayectoria de las masas forestales para poder realizar estimaciones con exactitud (Amaro *et al.*, 1998).

La metodología ADA solo admiten una hipótesis de crecimiento respecto a los parámetros, es decir, se tiene una sola asíntota común (modelos polimórficos) o se tienen asíntotas variables (modelos anamórficos), pero no es posible incluir ambas hipótesis en un modelo (Bailey and Clutter, 1974). El método de las ecuaciones de diferencias algebraicas generalizado (GADA), se basa en que la ecuación base puede ser expandida de acuerdo con diversas

teorías sobre el crecimiento, como la tasa de crecimiento y la potencialidad máxima, lo que permite que más de un parámetro de cada modelo dependa del sitio, y así las familias de curvas de crecimiento son más flexibles (Cieszewski and Bailey, 2000; Cieszewski, 2001). Con la metodología GADA se pueden obtener familias de curvas con polimorfismo y múltiples asíntotas (Cieszewski, 2002; Cieszewski, 2004).

El objetivo del presente trabajo fue desarrollar ecuaciones dinámicas de crecimiento e incremento en diámetro normal con la metodología de diferencia algebraica y diferencia algebraica generalizada (ADA y GADA), para *Pinus arizonica* Engelmännii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht. Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. & Cham, *Pinus lumholtzii* Rob. & Fer, y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. Var. *brachypter* Shaw en el Ejido San Diego de Tezains, Durango, México, con información de 44,302 virutas de crecimiento, distribuidas en árboles dominantes, intermedios y suprimidos de 15,609 sitios temporales de inventario de manejo forestal.

3.4. Materiales y métodos

3.4.1. Descripción del área de estudio

El estudio se realizó en las masas forestales del Ejido San Diego de Tezains (Figura 1.1), en el Estado de Durango, México, el cual se ubica en la Sierra Madre Occidental, entre las coordenadas extremas 24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" N y 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" O. Los tipos de climas predominantes son templado, cálido húmedo y templado subhúmedo, con una precipitación media anual de 1375 mm. Las temperaturas medias varían desde los 8° C en las zonas más altas, hasta los 24° C en las zonas bajas, en las cuales la altitud media llega a 600 m.

3.5. Caracterización de la base de datos

La base de datos fue del inventario de manejo forestal del año 2006 de 44,302 virutas de crecimiento de árboles a la altura de 1.30 m extraídas con el taladro de Pressler. En cada sitio se colectaron 3 virutas de crecimiento

distribuidos mediante un diseño de muestreo aleatorio estratificado. Las muestras se obtuvieron de árboles considerando la clasificación de copas de Kraft, que define la dominancia de los árboles en el piso forestal (Kraft, 1884). La muestra consideró un árbol dominante-codominante, un intermedio y un suprimido por sitio, en el caso de no encontrar definida la estructura vertical dentro del sitio, se consideró un árbol de diámetro mayor, uno de diámetro medio y uno de diámetro menor. Las muestras fueron obtenidas para las especies comerciales de *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* y *Pinus ayacahuite* distribuidas en los sitios de muestreo.

El análisis de las virutas de crecimiento se desarrolló de acuerdo al siguiente procedimiento: i) se contabilizó el número de anillos en la viruta (NS) del centro hacia la corteza, ii) se utilizó una categoría de edad de 10 años (CE=10), iii) se dividió el número de anillos entre la categoría de edad para definir los grupos de anillos ($GA=NS/CE$), redondeando el resultado para obtener el número de anillos por grupo (GA) y la fracción como el residual (R), iv) se contó el número del residual (R) del centro hacia la corteza y posteriormente los grupos de anillos. Tomando como ejemplo una viruta con 24 anillos de crecimiento, el $GA=24/10=2.4$, siendo, $GA=2$ y $R=4$, por tanto, se contaron cuatro anillos del centro a la hacia la corteza como residual y a partir de ahí 10 grupos de 2 anillos. Se midieron los radios R1-R10, los cuales posteriormente fueron convertidos a diámetros. En la Figura 3.1 se ilustra el análisis de una viruta con 24 anillos de crecimiento.

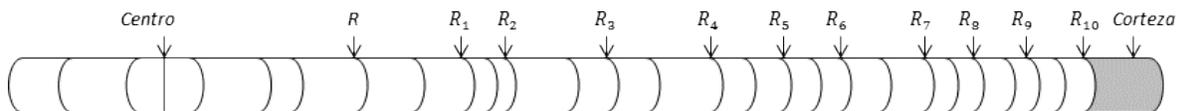


Figura 3.1. Análisis de una viruta de crecimiento.

En el Cuadro 3.1 se presentan los estadísticos descriptivos de la base de datos utilizada para el ajuste de los modelos de crecimiento, el número de árboles usados (virutas de crecimiento) y el total de pares de observaciones (Dn-edad) usadas en el ajuste para las especies consideradas.

Cuadro 3.1. Valores de los estadísticos descriptivos de la base de datos utilizada.

Especie	Árboles	Datos	Estadístico	Diámetro (cm)	Edad (años)
<i>Pa</i>	4525	45250	Mínimo	0.60	1.00
			Máximo	59.40	275.00
			Media	14.64	39.89
			SD	8.45	27.59
<i>Pd</i>	17956	179560	Mínimo	0.40	1.00
			Máximo	61.80	293.00
			Media	13.55	41.81
			S.D.	8.09	31.45
<i>Pt</i>	11095	110950	Mínimo	0.20	1.00
			Máximo	59.80	288.00
			Media	13.42	40.66
			SD	7.92	29.78
<i>Pl</i>	4206	42060	Mínimo	0.20	2.00
			Máximo	53.00	217.00
			Media	13.19	39.64
			SD	7.44	25.58
<i>Plu</i>	2658	26580	Mínimo	0.60	2.00
			Máximo	54.80	269.00
			Media	12.05	45.78
			SD	7.13	33.40
<i>Pay</i>	3862	38620	Mínimo	0.60	2.00
			Máximo	68.00	263.00
			Media	11.28	31.58
			SD	6.76	20.86

SD es la desviación estándar de la media, *Pa* es *Pinus arizonica*, *Pd* es *Pinus durangensis*, *Pt* es *Pinus teocote*, *Pl* es *Pinus leiophylla*, *Plu* es *Pinus lumholtzii* y *Pay* es *Pinus ayacahuite*.

3.6. Modelos utilizados

Los modelos de crecimiento utilizados relacionan el diámetro normal en función de la edad en forma ADA y GADA (Cuadro 3.2), los cuales fueron derivados de modelos de crecimiento base reportados por (Zeide, 1993; Kiviste *et al.*, 2002) y estos han sido comúnmente usados en la modelación de diferentes variables (diámetro, área basal, altura y altura dominante) en función de la edad para diferentes especies forestales (Amaro *et al.*, 1998; Cieszewski, 2002; Barrio y Diéguez, 2005; Krumland and Eng, 2005; De los Santos-Posadas *et al.*, 2006; Álvarez-González *et al.*, 2010; Sharma *et al.*, 2011).

La expresión del incremento corriente anual para los modelos estudiados, dado que $D_2 = f(D_1, t_1, t_2)$, se derivó con respecto a la edad $\frac{\partial D_2}{\partial t_2}$ para obtener la tasa instantánea de crecimiento en diámetro.

Para la interpretación de los modelos dinámicos se consideró como Índice de Diámetro (IDiam), el diámetro medio que alcanza una masa forestal a la edad de referencia de 60 años o el índice que representa cada árbol en función de su diámetro y edad a una edad de referencia, lo cual implica el aspecto de producción e indirectamente el de productividad.

3.7. Metodología de ajuste de los modelos

Los modelos ajustaron simultáneamente los parámetros globales y específicos del sitio siguiendo el procedimiento “nested iterative procedure” descrito por Tait *et al.*, (1988) con una edad de referencia de 60 años, el método consiste en el siguiente proceso iterativo: i) se ajustaron los parámetros globales para cada modelo estudiado, usando valores iniciales de diámetro normal de 25 cm (D_1) para cada árbol (viruta de crecimiento), el valor del diámetro normal fue definido como la categoría diámetrica promedio de los árboles a la edad de referencia de 60 años, ii) los valores de los parámetros globales se consideran como constantes y el parámetro específico del sitio (D_1) fue estimado para cada árbol. Los valores observados para cada árbol (D_1) son usados como valores de inicio para el procedimiento de ajuste. Después, los valores estimados (D_1) se convierten en valores observados y los parámetros globales son ajustados nuevamente. El procedimiento se repite hasta estabilizar los parámetros globales (Cieszewski *et al.* 2000). En este estudio se utilizó como criterio que la reducción del error medio cuadrático del modelo entre dos iteraciones fuera menor de 0.0001 (Vargas *et al.*, 2010).

Cuadro 3.2. Ecuaciones dinámicas ajustadas a los datos de las especies estudiadas.

Modelo	Modelo base	Parámetro específico del sitio	Solución	Modelo dinámico
Hoosfeld IV (Zeide, 1993)				
3.M1	$D = \frac{t^{\alpha_3}}{\alpha_2 + \frac{t^{\alpha_3}}{\alpha_1}}$	α_2	$\alpha_2 = \frac{t_1^{\alpha_3}(\alpha_1 - D_1)}{D_1 \alpha_1}$	$D_2 = \frac{t_2^{\alpha_3}}{\frac{t_1^{\alpha_3}(\alpha_1 - D_1)}{D_1 \alpha_1} + \frac{t_2^{\alpha_3}}{\alpha_1}}$
Levakovic II (Levakovic, 1935)				
3.M2	$D = \alpha_1 \left(\frac{t}{\alpha_2 + t}\right)^{\alpha_3}$	α_2	$\alpha_2 = t_1 \left[-1 + \left(\frac{D_1}{\alpha_1}\right)^{-\frac{1}{\alpha_3}}\right]$	$D_2 = \alpha_1 \left[\frac{t_2}{t_1 \left[-1 + \left(\frac{D_1}{\alpha_1}\right)^{-\frac{1}{\alpha_3}}\right] + t_2}\right]^{\alpha_3}$
Chapman-Richards (Richards, 1959)				
3.M3	$D = \alpha_1 (1 - e^{-\alpha_2 t})^{\alpha_3}$	α_2	$\alpha_2 = -\frac{\text{Ln}\left[1 - \left(\frac{D_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_3}}\right]}{t_1}$	$D_2 = \alpha_1 \left[1 - \left(1 - \left(\frac{D_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_3}}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}\right]^{\alpha_3}$ (Amaro, 1998)
Strand Generalizado (Strand, 1964)				
3.M4	$D = \left(\frac{t}{\alpha_1 + \alpha_2 t}\right)^{\alpha_3}$	$\alpha_1 = \chi$ $\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \chi$ $\alpha_3 = \beta_3$	$\chi = \frac{t_1 \left(D_1^{-\frac{1}{\beta_3}} - \beta_1\right)}{1 + \beta_2 t_1}$	$D_2 = \left[\frac{t_2}{\chi + (\beta_1 + \beta_2 \chi) t_2}\right]^{\beta_3}$ (Sharma <i>et al.</i> , 2011)
Hossfel IV (Peschel, 1938)				
3.M5	$D = \frac{t^{\alpha_1}}{\alpha_2 + \alpha_3 t^{\alpha_1}}$	$\alpha_1 = \beta_3$ $\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \chi$ $\alpha_3 = \chi$	$\chi = \frac{\frac{t_1^{\beta_3}}{D_1} - \beta_1}{\beta_2 + t_1^{\beta_3}}$	$D_2 = \frac{t_2^{\beta_3}}{\beta_1 + \beta_2 \chi + \chi t_2^{\beta_3}}$ (Krumland y Eng, 2005)
Verhulst- Logística (Verhulst, 1838)				
3.M6	$D = \frac{\alpha_1}{(1 + \alpha_2 e^{t^{-\alpha_3}})}$	$\alpha_1 = \beta_1 + \chi$ $\alpha_2 = \beta_2 \chi$ $\alpha_3 = \beta_3$	$\chi = \frac{D_1 - \beta_1}{1 - \beta_2 D_1 t_1^{-\beta_3}}$	$D_2 = \frac{\beta_1 + \chi}{1 + \beta_2 \chi t_2^{-\beta_3}}$ (Álvarez <i>et al.</i> , 2010)

D , D_1 y D_2 , es el Diámetro normal del modelo base y modelo dinámico (cm) a la edad t , a la edad inicial t_1 y a la edad final t_2 (años) respectivamente, α_1 , α_2 y α_3 son los parámetros de los modelos base y dinámicos (ADA), β_1 , β_2 , y β_3 son los parámetros de los modelos dinámicos (GADA) y χ es la solución de la ecuación dinámica para diámetro y edad iniciales.

El problema de autocorrelación de los con datos longitudinales de las virutas de crecimiento, fue corregido con una estructura de errores autorregresiva modificada de segundo orden CAR(2), la cual consideró la distancia entre las mediciones del diámetro en las virutas de crecimiento (Zimmerman and Núñez-Antón, 2001).

$$e_{ij} = d_1 \rho_1^{h_{ij}-h_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \rho_2^{h_{ij}-h_{ij-2}} e_{ij-2} + \epsilon_{ij} \quad (3.1)$$

donde e_{ij} es el j residual ordinario en la observación i , $d_1 = 1$ para $j > 1$, $d_2 = 1$ para $j > 2$, $d_1 = 0$ para $j = 1$, $d_2 = 0$ para $j \leq 2$, $h_{ij} - h_{ij-1}$ y $h_{ij} - h_{ij-2}$, son las distancias de separación de la j a la $j - 1$ y de la j a $j - 2$ observaciones dentro de cada viruta de crecimiento, $h_{ij} > h_{ij-1}$ y $h_{ij} > h_{ij-2}$, ρ_1 y ρ_2 , son los parámetros autorregresivos de primero y segundo orden a ser estimados y ϵ_{ij} es el error independiente que sigue una distribución normal con media cero y varianza constante.

Con el uso de una estructura autorregresiva de errores se obtienen estimadores de los parámetros eficientes e insesgados (Parresol and Vissage, 1998).

Los modelos de crecimiento en diámetro normal, más la estructura del modelo autorregresivo de segundo orden fueron programados y ajustados simultáneamente con el procedimiento MODEL de SAS/ETS™ (SAS institute Inc., 2004), que permite la actualización dinámica de los residuales. En el Anexo 7.6.2 se presenta el código SAS para el ajuste del modelo 3.M4.

3.8. Estadísticos utilizados en el ajuste

La bondad de ajuste de los modelos estudiados se midió a través del análisis numérico y gráfico de los residuales, con la obtención de estadísticos como el coeficiente de determinación ajustado (R_a^2), la raíz del cuadrado medio del error ($RMSE$), el sesgo promedio absoluto (\bar{E}), el coeficiente de variación expresado en porcentaje (CV) y el criterio de información de Akaike (AIC), para el cual se utilizó la versión de mínimos cuadrados ordinarios (Lu and Zhang,

2011). Además se analizaron gráficamente las predicciones de los modelos para observar si eran biológicamente realistas a los datos utilizados (Goelz and Burk, 1992; Sharma *et al.*, 2011).

La presencia de autocorrelación en los datos usados en el ajuste de los modelos, fue medida con el estadístico de Durbin-Watson (Durbin and Watson, 1951) calculado con el procedimiento siguiente: i) modelo dinámico, ii) modelo dinámico más estructura autorregresiva de primer orden y iii) modelo dinámico más estructura autorregresiva de primer y segundo orden.

$$R_a^2 = 1 - \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 / n - p}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / n - 1} \right] \quad (3.2)$$

$$RMSE = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n - p} \right)^{0.5} \quad (3.3)$$

$$\bar{E} = \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})}{n} \right| \quad (3.4)$$

$$CV = \left[\frac{(\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 / n - 1)^{0.5}}{\bar{y}} \right] \times 100 \quad (3.5)$$

$$AIC = 2p + n[\ln(RSS/n)] \quad (3.6)$$

$$dw = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=2}^n e_i^2} \quad (3.7)$$

donde y_i , \hat{y} e \bar{y} son los valores observado, predicho y medio en número de árboles por categoría diamétrica, n es el número de observaciones, p es el número de parámetros del modelo, $RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ es la suma de cuadrados del residual y e el valor residual del modelo ajustado.

3.9. Resultados y discusión

En el Cuadro 3.3 se presentan los valores de los estimadores de los parámetros y los estadísticos de ajuste de los modelos analizados para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* y *Pinus ayacahuite*. En general los 6 modelos ajustados a las 6 especies mostraron buena bondad de ajuste estadística y fueron biológicamente realistas (análisis gráfico de las predicciones de los modelos a los datos observado) para predecir el crecimiento en diámetro normal en función de la

edad. Para todos los casos los parámetros fueron altamente significativos a un nivel de significancia del 1%, con valores de probabilidad de rechazo menores a 0.0001. El uso del error medio cuadrático del modelo como criterio para estabilizar el proceso iterativo de ajuste, cuando este fuera menor a 0.0001 entre un paso anterior y el siguiente (Vargas-Larreta *et al.*, 2010), reflejó la disminución en el error del modelo y evito que los estimadores de los parámetros se encontraran en un mínimo local, similar a lo que propuso (Cieszewski *et al.*, 2000) con el uso del criterio de convergencia de los parámetros de 0.0000001. La estructura autorregresiva continua CAR(2) corrigió la autocorrelación positiva debida a los datos longitudinales usados en el ajuste de los modelos dinámicos, resultados similares a los encontrados por (Barrio y Diéguez 2005; Vargas-Larreta *et al.*, 2010) en sus estudios de modelación de altura dominante e índice de sitio.

El modelo 3.M3 predice mejor el crecimiento del diámetro normal para *Pinus lumholtzii*, el modelo 3.M4 resulto mejor para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*, mientras que para *Pinus ayacahuite* el modelo 3.M6 presentó mejores resultados de ajuste (Cuadro 3.3). En la Figura 3.2 se presentan las familias de curvas de crecimiento en diámetro normal por IDiam construidas con los modelos seleccionados, las familias obtenidas presentan tasas relativas de crecimiento y potencialidades del sitio variables para las especies *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*, modeladas con 3.M4; para *Pinus ayacahuite* con el modelo 3.M6 (polimórficas con asíntotas variables), mientras que para la especie *Pinus lumholtzii* con el modelo 3.M3 se obtuvieron familias de curvas con tasas de crecimiento variables y potencialidades del sitio constantes (asíntota común). Para *Pinus durangensis* se encontraron valores del estadístico de Durbin-Watson (*dw*) en: i) modelo dinámico (0.67), ii) modelo dinámico más estructura autorregresiva de primer orden (1.49) y iii) modelo dinámico más estructura autorregresiva segundo orden (1.80), para *Pinus arizonica*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*; con el modelo 3.M4 se encontraron

valores de la prueba dw de (0.65, 1.44 y 1.76), (0.67, 1.47 y 1.79) y (0.68, 1.48 y 1.81), respectivamente, para *Pinus lumholtzii* con el modelo 3.M3 valores de 0.66, 1.48 y 1.80 y para *Pinus ayacahuite* 0.67, 1.49 y 1.80 con el modelo 3.M6 respectivamente, para el procedimiento de ajuste. Las familias de curvas de crecimiento en Diámetro normal (Dn) se construyeron con IDiam de 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 y 45 cm a la edad de referencia de 60 años, las gráficas muestran que las familias de curvas de crecimiento se adaptan bien a las trayectorias mostradas por los datos utilizados en el ajuste.

En el Cuadro 3.4 se presentan las ecuaciones obtenidas para el cálculo del incremento corriente anual (ICA) en diámetro normal, para los modelos seleccionados. En la Figura 3.3 se muestran las familias de IMA en área basal (AB) contra el crecimiento en diámetro por IDiam, se puede apreciar el máximo IMA de las curvas con IDiam mayor a 25 cm. El criterio de IMA en AB se utilizó para determinar el turno técnico en diámetro, ya que el diámetro por ser una variable unidimensional y por los sobresaltos de crecimiento a lo largo de la vida de los árboles no fue posible encontrar el punto de unión entre el ICA e IMA por IDiam o de cohortes de árboles dentro de un rodal. Lo anterior permite establecer objetivos de producción maderable para bosques incoetáneos con manejo irregular.

Cuadro 3.3. Parámetros estimados, errores estándar y estadísticos de los modelos ajustados.

SP	Modelo	α_1	α_3	β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	R_a^2	RMSE	AIC	CV	\bar{E}		
Pa	3.M1	θ_i	284.882	0.756	-	-	-	0.989	0.954	0.991	0.808	-19310	5.517	0.011	
		ε_i	8.647	0.002	-	-	-	0.0005	0.0006						
	3.M2	θ_i	172.008	0.746	-	-	-	0.989	0.954	0.991	0.807	-19376	5.513	0.011	
		ε_i	3.244	0.002	-	-	-	0.0006	0.0006						
	3.M3	θ_i	106.776	0.746	-	-	-	0.989	0.953	0.991	0.807	-19402	5.511	0.011	
		ε_i	1.791	0.001	-	-	-	0.0006	0.0006						
	3.M4	θ_i	-	-	0.002	-0.001	0.736	0.989	0.953	0.991	0.805	-19610	5.499	0.011	
		ε_i	-	-	0.00004	0.00004	0.002	0.0006	0.0006						
	3.M5	θ_i	-	-	1.323	-196.247	0.743	0.989	0.953	0.991	0.806	-19481	5.507	0.009	
		ε_i	-	-	0.038	6.209	0.002	0.0006	0.0006						
	3.M6	θ_i	-	-	177.573	1.474	0.742	0.989	0.953	0.991	0.806	-19536	5.503	0.009	
		ε_i	-	-	4.174	0.054	0.002	0.0006	0.0006						
	Pd	3.M1	θ_i	241.477	0.767	-	-	-	0.987	0.955	0.992	0.746	-105369	5.504	0.006
			ε_i	2.883	0.001	-	-	-	0.0003	0.0003					
		3.M2	θ_i	156.671	0.756	-	-	-	0.987	0.955	0.992	0.745	-105678	5.500	0.006
			ε_i	1.206	0.001	-	-	-	0.0003	0.0003					
		3.M3	θ_i	97.434	0.756	-	-	-	0.987	0.955	0.992	0.745	-105812	5.498	0.006
			ε_i	0.659	0.001	-	-	-	0.0003	0.0003					
3.M4		θ_i	-	-	0.002	-0.002	0.739	0.986	0.955	0.992	0.739	-108575	5.455	0.006	
		ε_i	-	-	0.00002	0.00001	0.001	0.0003	0.0003						
3.M5		θ_i	-	-	1.338	-155.984	0.746	0.987	0.955	0.992	0.740	-107909	5.466	0.007	
		ε_i	-	-	0.014	1.596	0.001	0.0003	0.0003						
3.M6		θ_i	-	-	121.402	1.383	0.746	0.987	0.955	0.992	0.740	-108129	5.462	0.007	
		ε_i	-	-	0.790	0.015	0.001	0.0003	0.0003						
Pt		3.M1	θ_i	212.661	0.790	-	-	-	0.989	0.957	0.992	0.727	-70768	5.416	0.009
			ε_i	2.878	0.001	-	-	-	0.0003	0.0004					
		3.M2	θ_i	147.474	0.777	-	-	-	0.989	0.957	0.992	0.726	-70954	5.412	0.009
			ε_i	1.329	0.001	-	-	-	0.0003	0.0004					
		3.M3	θ_i	91.737	0.776	-	-	-	0.989	0.957	0.992	0.726	-71035	5.410	0.010
			ε_i	0.730	0.001	-	-	-	0.0003	0.0004					
	3.M4	θ_i	-	-	0.003	-0.001	0.764	0.988	0.956	0.992	0.722	-72188	5.381	0.010	
		ε_i	-	-	0.00003	0.00002	0.001	0.0003	0.0004						
	3.M5	θ_i	-	-	1.707	-190.288	0.774	0.988	0.956	0.992	0.724	-71778	5.391	0.010	
		ε_i	-	-	0.023	2.675	0.001	0.0003	0.0004						
	3.M6	θ_i	-	-	120.051	1.744	0.773	0.988	0.956	0.992	0.723	-71946	5.387	0.010	
		ε_i	-	-	1.048	0.026	0.001	0.0003	0.0004						

Cuadro 3.3. Parámetros estimados, errores estándar en cursiva y estadísticos de los modelos ajustados continuación.

SP	Modelo	α_1	α_3	β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	R_a^2	RMSE	AIC	CV	\bar{E}	SP	
<i>Pl</i>	3.M1	θ_i	177.937	0.790	-	-	-	0.987	0.952	0.992	0.684	-31911	5.186	0.0005	
		ε_i	3.816	0.002	-	-	-	0.0006	0.0007						
	3.M2	θ_i	126.683	0.775	-	-	-	0.986	0.952	0.992	0.684	-31980	5.181	0.0001	
		ε_i	1.825	0.002	-	-	-	0.0006	0.0007						
	3.M3	θ_i	80.287	0.771	-	-	-	0.987	0.952	0.992	0.684	-31995	5.180	0.004	
		ε_i	1.030	0.002	-	-	-	0.0006	0.0007						
	3.M4	θ_i	-	-	0.003	-0.002	0.747	0.986	0.951	0.992	0.676	-32941	5.122	0.003	
		ε_i	-	-	0.00006	0.00004	0.002	0.0006	0.0007						
	3.M5	θ_i	-	-	1.351	-131.963	0.754	0.986	-0.951	0.992	0.677	-32866	5.127	0.001	
		ε_i	-	-	0.031	3.158	0.002	0.0006	0.0007						
	3.M6	θ_i	-	-	98.230	1.357	0.754	0.986	0.951	0.992	0.676	-32891	5.125	0.004	
		ε_i	-	-	1.218	0.032	0.002	0.0006	0.0007						
	<i>Plu</i>	3.M1	θ_i	138.635	0.820	-	-	-	0.988	0.957	0.992	0.627	-24835	5.201	0.004
			ε_i	2.310	0.002	-	-	-	0.0006	0.0007					
		3.M2	θ_i	107.363	0.804	-	-	-	0.988	0.957	0.992	0.627	-24840	5.201	0.003
			ε_i	1.210	0.002	-	-	-	0.0006	0.0007					
		3.M3	θ_i	71.137	0.795	-	-	-	0.988	0.957	0.992	0.627	-24841	5.201	0.004
			ε_i	0.735	0.002	-	-	-	0.0006	0.0007					
3.M4		θ_i	-	-	0.004	-0.001	0.787	0.988	0.957	0.992	0.625	-24982	5.187	0.005	
		ε_i	-	-	0.00008	0.00004	0.002	0.0006	0.0007						
3.M5		θ_i	-	-	3.040	-307.999	0.799	0.988	-0.957	0.992	0.625	-24962	5.189	0.005	
		ε_i	-	-	0.106	12.263	0.002	0.0006	0.0007						
3.M6		θ_i	-	-	100.512	3.545	0.804	0.988	0.957	0.992	0.625	-24993	5.186	0.004	
		ε_i	-	-	1.521	0.142	0.002	0.0006	0.0007						
<i>Pay</i>		3.M1	θ_i	154.897	0.876	-	-	-	0.982	0.939	0.991	0.641	-34347	5.684	0.004
			ε_i	2.338	0.002	-	-	-	0.0008	0.0009					
		3.M2	θ_i	132.148	0.864	-	-	-	0.982	0.939	0.991	0.641	-34345	5.685	0.004
			ε_i	1.509	0.002	-	-	-	0.0008	0.0009					
		3.M3	θ_i	81.565	0.852	-	-	-	0.982	0.939	0.991	0.642	-34249	5.692	0.004
			ε_i	0.805	0.002	-	-	-	0.0008	0.0009					
	3.M4	θ_i	-	-	0.852	0.004	-0.001	0.982	0.940	0.991	0.641	-34381	5.682	0.001	
		ε_i	-	-	0.002	0.00009	0.00005	0.0008	0.0009						
	3.M5	θ_i	-	-	0.861	3.443	-371.860	0.982	-0.940	0.991	0.641	-34321	5.686	0.001	
		ε_i	-	-	0.002	0.131	15.561	0.0008	0.0009						
	3.M6	θ_i	-	-	127.753	4.588	0.862	0.982	0.939	0.991	0.640	-34425	5.679	0.0004	
		ε_i	-	-	1.898	0.273	0.002	0.0008	0.0009						

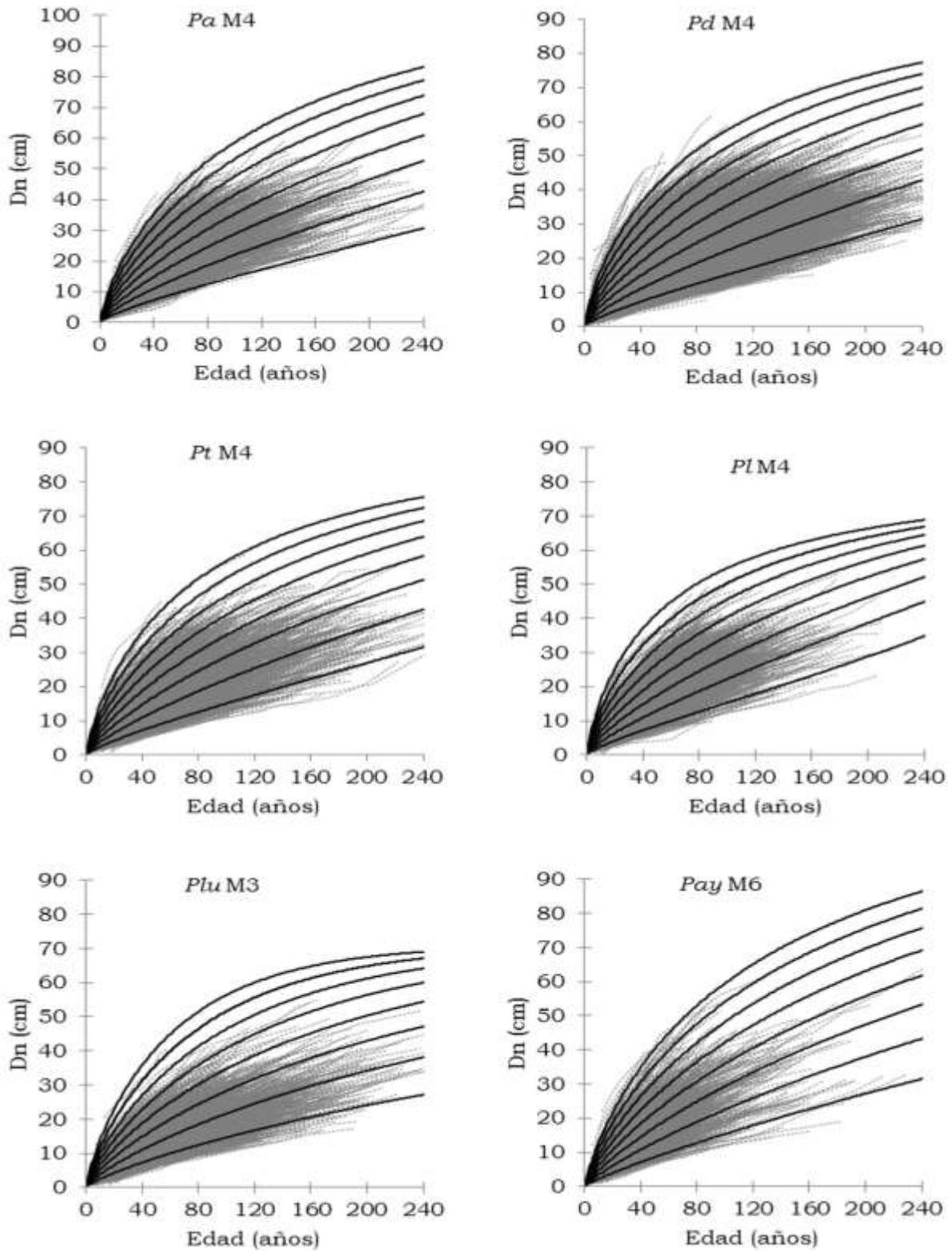


Figura 3.2. Familias de curvas de crecimiento por IDiam de 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, y 45 cm para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus leiophylla* y *Pinus lumholtzii* a la edad de referencia de 60 años.

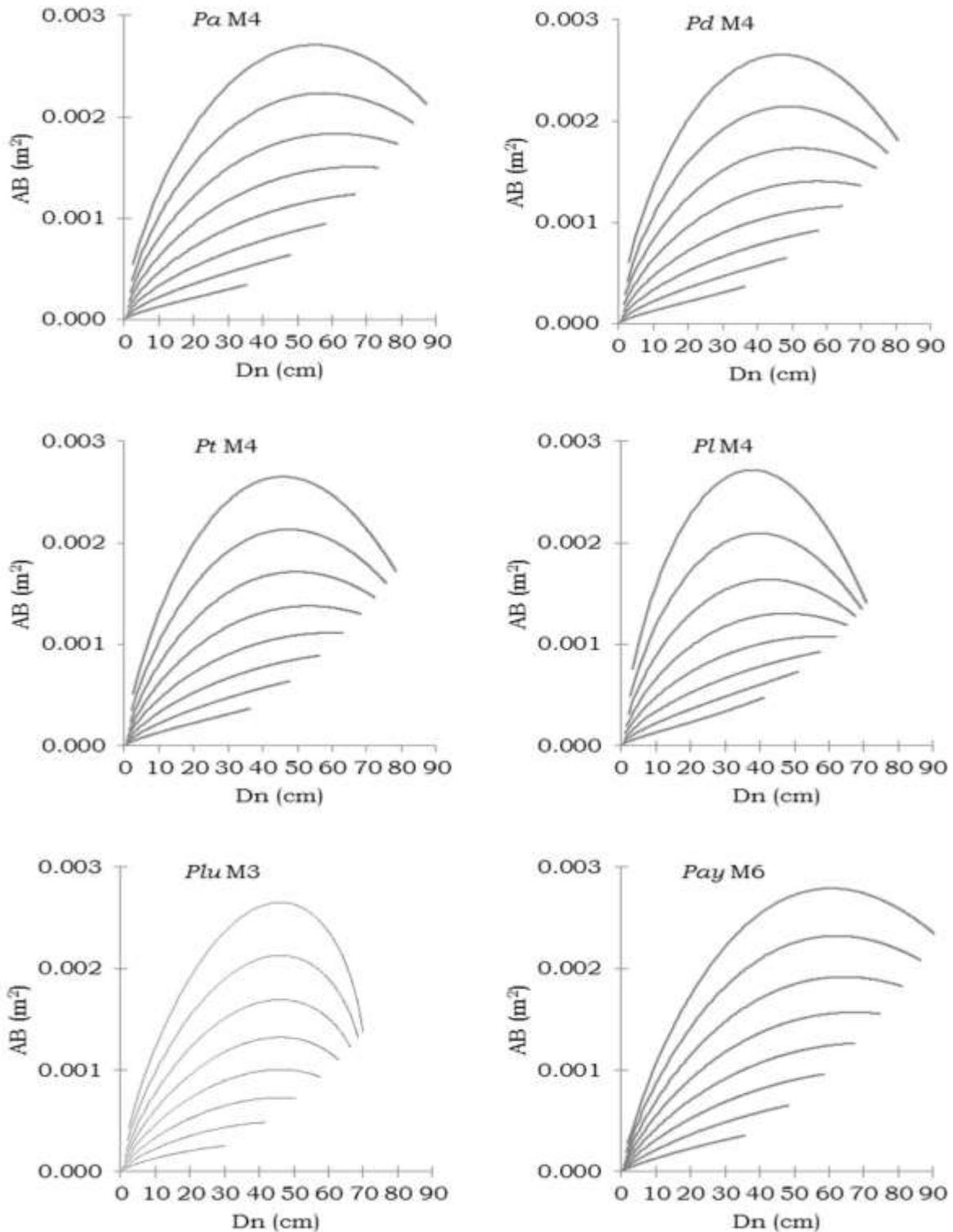


Figura 3.3. Familias de curvas de incremento medio anual (IMA) en Área Basal (AB) contra crecimiento en Dn por IDiam de 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, y 45 cm para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus leiophylla* y *Pinus lumholtzii* a la edad de referencia de 60 años.

Cuadro 3.4. Ecuaciones de incremento corriente anual (ICA) para los modelos estudiados.

Modelo	Ecuación
3.M3	$ICA_{M3} = - \frac{\alpha_1 \left[1 - \left(1 - \left(\frac{D_1}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_3}} \right)^{\frac{t_2}{t_1}} \right]^{\alpha_3 - 1} \alpha_3 \left[1 - \left(\frac{D_1}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_3}} \right]^{\frac{t_2}{t_1}} \text{Ln} \left[1 - \left(\frac{D_1}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_3}} \right]}{t_1}$
3.M4	$ICA_{M4} = \frac{\left[\frac{t_2}{\chi + \beta_1 t_2 + \beta_2 t_2 \chi} \right]^{\beta_3} \beta_3 \chi}{(\chi + \beta_1 t_2 + \beta_2 t_2 \chi) t_2}$
3.M6	$ICA_{M6} = \frac{\beta_3 (\beta_1 + \chi) \beta_2 \chi_1 t_2^{-\beta_3}}{t_2 (1 + \beta_2 \chi t_2^{-\beta_3})^2}$

En el Cuadro 3.5 se presentan los tiempos de paso promedio de las clases diamétricas de 5 cm para las especies estudiadas, calculados a través del despeje de la Edad 2 (t_2) del modelo de crecimiento seleccionado para cada especie, proyectando el crecimiento en diámetro para pasar de una categoría diamétrica inferior (*CDI*) a una categoría diamétrica superior (*CDS*) y obteniendo la edad (años) a la que sucede el crecimiento, los datos iniciales de Diámetro 0 y Edad 0 (D_0 t_1) fueron los promedios de la edad por categoría diamétrica del primer cuartil de la base de datos utilizada, el Diámetro 1 (D_1) fue la categoría diamétrica superior (*CDS*) para la cual se calculó el tiempo de paso (años).

Cuadro 3.5. Tiempos de paso promedio obtenidos con los modelos de crecimiento seleccionados.

<i>CDI</i> (cm)	<i>CDS</i> (cm)	Tiempo de paso (años)					
		<i>Pa</i>	<i>Pd</i>	<i>Pt</i>	<i>Pl</i>	<i>Plu</i>	<i>Pay</i>
5	10	11.3	12.4	12.1	13.38	14.15	10.97
10	15	11.7	12.9	12.3	13.57	14.45	11.07
15	20	12.0	13.0	12.9	13.81	15.41	11.25
20	25	12.2	13.5	13.4	14.37	16.21	11.29
25	30	12.8	14.3	14.0	15.23	17.52	11.38
30	35	13.2	15.0	14.8	16.13	18.85	11.95
35	40	13.5	15.8	15.9	17.08	19.85	11.97
40	45	14.1	17.0	16.9	19.20	21.94	12.16
45	50	15.0	17.8	18.8	20.48	25.86	12.70
50	55	15.2	19.9	21.4	24.38	28.26	14.24
55	60	18.1	21.9	23.6	26.78	31.97	15.63
60	65	21.8	20.8	26.9	28.61	33.30	17.03

CDI es la Categoría diamétrica inferior, *CDS* es la Categoría diamétrica superior.

Los tiempos de paso indican que *Pinus ayacahuite* y *Pinus arizonica* son las especies de más rápido crecimiento, *Pinus lumholtzii* y *Pinus leiophylla* las especies de más lento crecimiento en diámetro y de medio crecimiento *Pinus durangensis* y *Pinus teocote*. Para las categorías de diámetro mayores a 40 cm *Pinus lumholtzii*, *Pinus leiophylla* crecen muy lento, lo que indican que son especies de poca importancia comercial, en contraste *Pinus durangensis*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* y en menor medida *Pinus teocote* son las especies de mayor importancia para la industria forestal. Los tiempos de paso promedio para categorías de diámetro de 5 a 60 cm, calculados con los modelos de crecimiento fueron de 14.2, 16.2, 16.9, 18.6, 21.5 y 12.6 años para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* y *Pinus ayacahuite*, respectivamente.

El turno técnico por IDiam obtenido con el IMA en Área Basal (punto máximo de IMA) para las especies de rápido crecimiento (*Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* y *Pinus durangensis*) se encuentra a edades más grandes que para las especies de lento crecimiento (*Pinus lumholtzii*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote*), lo que representa que las especies de lento crecimiento cesan el crecimiento en diámetro más rápido que las especies de rápido crecimiento. Para el IDiam de 35 cm, el turno técnico fue de 159, 123, 113, 87, 98 y 169 años, obteniendo a dicha edad árboles con diámetro de 61, 52, 50, 43, 46 y 64 cm para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* y *Pinus ayacahuite*, respectivamente, para el IDiam de 40 cm, en promedio para las especies estudiadas se tiene que el turno técnico sucede a los 92 años, cuando los diámetros son de 50 cm, para el IDiam de 45 cm el turno técnico sucede a los 70 años con árboles de diámetro de 49 cm (Figura 3.3). Las trayectorias de los residuales obtenidos con los modelos seleccionados para cada especie, indican que a medida que aumenta la edad el residual disminuye (Figura 3.4), los residuales en general, no rebasan un categoría diamétrica de 5 cm, lo que mostró la bondad de ajuste de los modelos seleccionados para las especies estudiadas.

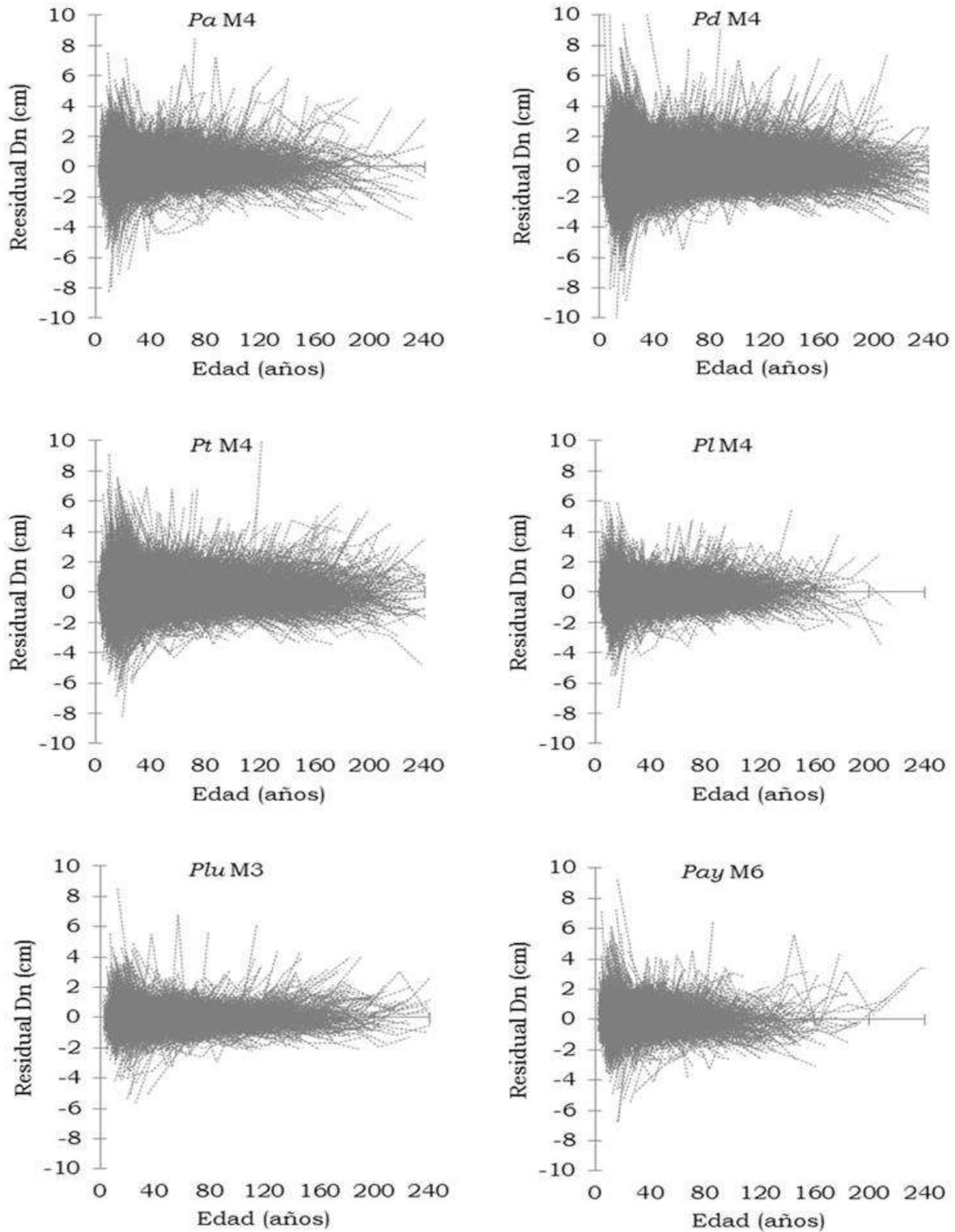


Figura 3.4. Graficas de residuales contra la edad para las especies estudiadas, con los modelos seleccionados.

3.10. Conclusiones

Si bien los resultados sugieren que el crecimiento en diámetro es muy variable entre las especies y dentro de especies por IDiam, es posible ver que una de las implicaciones del análisis sugiere fuertemente que en masas coetáneas se debe de mantener la densidad de la masa vía aclareos por lo bajo. Esto es evidente en las curvas que muestran que los árboles con IDiam mayores tenderán a ocupar más rápidamente el espacio de crecimiento dejando poco espacio para los árboles con IDiam menores, los cuales nunca recuperaran crecimiento, aun aplicando aclareos intensos por lo alto. De manera similar en masas incoetáneas es crítico poder definir el IDiam. Idealmente para todos los arboles de un rodal incoetáneo, a pesar de tener tamaño y edad diferente deberían pertenecer al mismo IDiam que garantizara el máximo uso del sitio, o en caso de masas coetáneas. Sin lugar a dudas faltaría incluir a modelos de este tipo el factor de calidad de estación de alguna manera, aunque ello añadiría complejidad a los modelos planteados.

El uso del IMA en Área Basal para los modelos dinámicos de crecimiento en diámetro ayudo a encontrar los turnos técnicos por clase de IDiam, lo que no fue posible encontrar con el crecimiento en diámetro, ya que por los constantes cambios en el crecimiento en diámetro de las especies estudiadas, no se encontró el punto de cruce entre el ICA e IMA. Los turnos técnicos por IDiam sugieren que el crecimiento en diámetro cesa más rápido para *Pinus lumholtzii*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote*, mientras que para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis* y *Pinus ayacahuite* se encontraron turnos ascendentes más largos, este criterio es congruente con los tiempos de paso encontrados, lo que sitúa a *Pinus ayacahuite* con los periodos de tiempo más cortos, seguido de *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla* y *Pinus lumholtzii*, para reducir los tiempos de paso para las especies de interés comercial es recomendable realizar aclareos por lo bajo en la etapa de brinzal y latizal.

Los resultados indican que *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis* y *Pinus teocote* son las especies con mayor potencial maderable, por las tasas de crecimiento en diámetro, tiempos de paso y turnos técnicos, sin embargo por la calidad de la madera y objetivos de manejo forestal, *Pinus durangensis*, *Pinus arizonica* y *Pinus teocote* son las especies de mayor interés comercial. Sin duda un adecuado manejo de la densidad permitirá ubicar una buena cantidad de árboles de alto valor maderable en un IDiam favorable por largos periodos de tiempo.

3.11. Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), a través de la beca mixta (247171), del Postgrado en Ciencias Forestales del Colegio de Postgraduados Campus Montecillo; de la Escuela Politécnica superior de Lugo de la Universidad de Santiago de Compostela, así como del Ejido San Diego de Tezains por la gran disponibilidad en el uso de la información.

3.12. Referencias

- Álvarez-González J. G., A. Zingg, and K. Gadow V., 2010. Estimating growth in beech forests: a study based on long term experiments in Switzerland. *Ann. For. Sci.* 67(307): 1-17.
- Álvarez-González J. G., A. Zingg, and K. Gadow V., 2010. Estimating growth in beech forests: a study based on long term experiments in Switzerland. *Ann. For. Sci.* 67(307): 1-17.
- Amaro, A., D. Reed, M. Tome, and L. Themido. 1998. Modelling dominant height growth: Eucalyptus plantations in Portugal. *For. Sci.* 44(1): 37-46.
- Bailey, R. L., and J. L. Clutter. 1974 Base-age invariant polymorphic site curves. *For. Sci.* 20: 155-159.

- Barrio A., M., and U. Diéguez-Aranda. 2005. Site quality of pedunculate Oak (*Quercus robur* L.) stands in Galicia (Northwest Spain). *Eur. J. For. Res.* 124(1): 19-28.
- Castedo-Dorado, F., U. Diéguez-Aranda, and J. G. Álvarez-González. 2007. A growth model for *Pinus radiata* D. Don stands in north-western Spain. *Ann. For. Sci.* 64(4): 453-465.
- Cieszewski, C. J. 2001. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Can. J. For. Res.* 31(1): 165-173.
- Cieszewski, C. J. 2002. Comparing fixed- and variable-base-age site equation having single versus multiple asymptotes. *For. Sci.* 48(1): 7-23.
- Cieszewski, C. J. 2004. GADA derivations of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from Richards, Weibull, and others exponential functions. Daniel B. Warnell School of Forest Resources, University of Georgia Athens, Georgia Plantation Management Research Cooperative (PMRC) Technical Report 2004-5. 16 p.
- Cieszewski, C. J., and R. L. Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *For. Sci.* 46(1): 116-126.
- Cieszewski, C. J., M. Harrison, and S. W. Martin. 2000. Practical methods for estimating non-biased parameters in self-referencing growth and yield models. Daniel B. Warnell School of Forest Resources, University of Georgia Athens, Georgia Plantation Management Research Cooperative (PMRC) Technical Report 2000-7. 11 p.
- De los Santos-Posadas, H. M., M. Montero-Mata, y M. Kanninen. 2006. Curvas dinámicas de crecimiento en altura dominante para *Terminalia amazonia* (Gmel) Excell en Costa Rica. *Agrociencia* 40(4): 521-532.

- Durbin, J., and G. S. Watson. 1971. Testing for serial correlation in least squares regression III. *Biometrika* 58(1): 1-19.
- Falcao, O. A., and J. Borges G. 2005. Designing decision support tools for Mediterranean forest ecosystems management: a case study in Portugal, *Ann. For. Sci.* 62(7): 751–760.
- García, E. M. 1981. Modificaciones al Sistema de Clasificación Climática de Köppen. México, D. F. 252 p.
- Goelz, J. C. G., and T. E., Burk. 1992. Development of a well-behaved site index equation: jack pine in north central Ontario. *Can. J. For. Res.* 22(6): 776–784.
- Kiviste, K., J. G. Álvarez G., A. Rojo A., y A. D. Ruiz G. 2002. Funciones de crecimiento de aplicación en el ámbito forestal. Monografía INIA: Forestal no 4. Ministerio de Ciencia y Tecnología. Instituto Nacional de Investigación y Tecnología Agraria y Alimentaria (INIA), Madrid, España. 190 p.
- Kraft, G. 1884. Beitrage zur Lehre von den Durchforstungen. Schlagstellungen und Linchtungshieben. (Contribution to the knowledge of thinning. Clear felling and selection system). In *Durchforstungen*. Hannover, Germany. 147 p.
- Krumland, B., and H. Eng. 2005. Site index systems for major young-growth forest and woodland species in northern California. Department of Forest and Fire Protection, Sacramento, Ca. Forestry Report 4. 219 p.
- Levakovic, A. 1935. An analytical form of growth law. *Glasnik za sumske pokuse*. Zagreb. (In Serbo-Croat). 4: 189-282.
- Lu, J., and L. Zhang. 2011. Modeling and prediction of tree height-diameter relationships using spatial autorregressive models. *For. Sci.* 57(3): 252-264.
- Parresol, B. R., and J. S. Vissage. 1998. White Pine site index for southern forest survey. Res. Pap. SRS-10. Department of Agriculture, Forest Service, Southern Research Station. Asheville, NC. U.S. 10 p.

- Peng, C. 2000. Growth and yield models for uneven-aged stands: past, present and future. *For. Ecol. Manage.* 132(2-3): 259–279.
- Peschel, W. 1938. Die mathematischen Methoden zur Herleitung der Wachstums-gesetze von Baum und Bestand und die Ergebnisse ihrer Anwendung. *Tharandter Forstliches Jahrbuch* 89: 169-247.
- Richards, F. J. 1959. A flexible growth curve for empirical use. *J. Exp. Bot.* 10(2): 290-301.
- SAS Institute Inc., 2004. SAS/ETS® User's guide, Release 9.1 Edition. Cary, NC., SAS Institute Inc.
- Sharma, R. P., A. Brunner, T. Eid, and O. Bernt-Havard. 2011. Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time series and large age error. *For. Ecol. Manage.* 262(12): 2162-2175.
- Strand, L. 1964. Numerical Construction of site curves. *For. Sci.* 10(4): 410-414.
- Tait, D. E., C. J. Cieszewski, and I. E. Bella. 1988. The stand dynamic of lodgepole pine. *Can. J. For. Res.* 18(10): 1255-1260.
- Trasobares, A., T. Pukkala, and J. Miina. 2004. Growth and yield model for uneven-aged mixtures of *Pinus sylvestris* L. and *Pinus nigra* Arn. in Catalonia, north-east Spain. *Ann. For. Sci.* 61(1): 9-24.
- Vargas-Larreta, B., J. G. Álvarez-González, J. J. Corral-Rivas, y O. A. Aguirre C. 2010. Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco. *Fitotecnia Mexicana.* 33(4): 343-351.
- Verhulst, P. F. 1838. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathematique et Physique.* 10: 113-121.
- Zeide, B. 1993. Analysis of growth equations. *For. Sci.* 39(3): 594-616.

Zimmerman, D. L., and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modeling of growth curve data: An overview. *Test*. 10(1): 1–73.

CAPÍTULO IV

4. ECUACIÓN DINÁMICA CON POLIMORFISMO COMPLEJO Y MÚLTIPLES ASÍNTOTAS PARA EL CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE DE MASAS FORESTALES DE DURANGO, MÉXICO

4.1. Resumen

(Manuscrito enviado a la revista *Agrociencia*)

En este estudio se presenta la derivación de una ecuación dinámica a partir del modelo base de Chapman-Richards, considerando el parámetro que representa a la asíntota y al de la tasa de cambio como una función de la calidad de estación, bajo el supuesto lineal inverso. La ecuación dinámica es invariante de la edad base e invariante del camino de simulación y genera familias de curvas con polimorfismo complejo y múltiples asíntotas. La ecuación dinámica fue ajustada para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla* y *Pinus ayacahuite* de forma global y por especie con variables indicadoras y se comparó con dos ecuaciones en forma GADA con mismo número de parámetros, basadas en el modelo de Chapman Richards y Korf que han sido usadas frecuentemente en la modelación de altura dominante e índice de sitio. Los resultados muestran que la ecuación derivada presenta mejor parsimonia en la expresión algebraica que describe la productividad del sitio y considera la variabilidad de la potencialidad del sitio como una función de la asíntota. El uso de variables indicadoras refleja que la ecuación dinámica puede usarse para predecir el crecimiento en altura dominante e índice de sitio para las masas mezcladas del área de estudio, con tasas de crecimiento muy similares para *Pinus durangensis*, *Pinus ayacahuite* y *Pinus arizonica*, lo cual responde al grado de asociación entre estas especies, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla* presentan las tasas de crecimiento más bajas.

Palabras clave: *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla*, *Pinus teocote*, GADA.

4.2. Abstract

In this study we report the derivation of a dynamic equation based on the Chapman-Richards model, considering the parameter representing the asymptote and the change rate as a function of site quality, assuming a linear inverse model. The dynamic equation is invariant of base age and invariant of path simulation and generates curve families with complex polymorphism and multiple asymptotes. The dynamic equation was adjusted for *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus ayacahuite* and *Pinus leiophylla* globally and by species with indicator variables and compared with two GADA equations with the same number of parameters, based on the model of Chapman Richards and Korf model which had been used frequently in modeling dominant height and site index. The results show that the derived equation is more parsimony in algebraic expression than the other, it describing the productivity of the site and considering the potential variability of the site as a function of the asymptote, which represents an advantage with respect to other structures which are based on inflection point parameters and rate of change. The Using indicator variables reflect that the dynamic equation can be used to predict the height growth and site index for mixed stands of the study area, with growth rates similar to *Pinus durangensis*, *Pinus arizonica* and *Pinus ayacahuite*, which responds to the degree of association between these species, *Pinus leiophylla* and *Pinus teocote* Shows lower growth rates.

Key words: *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla*, *Pinus teocote*, GADA.

4.3. Introducción

La calidad de estación se refiere a la capacidad de un lugar determinado para sustentar el crecimiento de los árboles (o de cualquier otra vegetación) y en el caso de bosques se relaciona directamente con la productividad forestal. Estimaciones precisas de la productividad son un elemento clave en el manejo forestal, ya que contribuyen a determinar la cosecha, el turno y la periodicidad

de las intervenciones silvícolas (Vargas-Larreta *et al.*, 2010). La productividad forestal es un concepto biológicamente complejo que no puede ser descrito directamente con una expresión matemática. En masas forestales la productividad es estimada indirectamente con el uso de modelos de crecimiento en altura dominante (Martín-Benito *et al.*, 2008). El crecimiento de altura dominante de un rodal monoespecífico y coetáneo es poco afectado por la densidad y seguirá un patrón determinado que además tiene buena correlación con la producción volumétrica (Clutter *et al.*, 1983).

Para etiquetar a los rodales de acuerdo a su calidad de estación se utiliza el patrón de crecimiento de altura dominante referido a una altura dominante esperada a cierta edad. A esta definición “localizada” del crecimiento en altura dominante se le denomina el índice de sitio (Vanclay, 1994; Torres y Magaña, 2001; Martín-Benito, *et al.*, 2008). Una caracterización eficaz de la calidad de sitio contribuye al manejo forestal sustentable, facilita la identificación y clasificación de la productividad del sitio, así como la actualización y proyección de inventarios forestales y la planeación de las intervenciones silvícolas (Cieszewski *et al.*, 2000a; Vargas-Larreta *et al.*, 2010).

Los modelos de índice de sitio requieren de la elección de un modelo de crecimiento, el cual se rescribe para reflejar la condición específica del crecimiento en altura dominante. Bailey and Clutter (1974) formalizaron una técnica para derivar ecuaciones dinámicas a partir de modelos de crecimiento conocida como el Método de Diferencia Algebraica (Algebraic Difference Approach o ADA por sus siglas en inglés) que involucra esencialmente la sustitución de un parámetro del modelo base para expresarlo como una función del sitio. Este enfoque permite construir modelos invariantes de la edad base e invariantes del camino de simulación, lo que da propiedades lógicas a las proyecciones del crecimiento. Con la metodología ADA la mayoría de los modelos derivados son anamórficos o polimórficos, es decir, la hipótesis específica solo permite variar la potencialidad máxima o las tasas de crecimiento, pero no ambas (Bailey y Clutter, 1974; Cieszewski and Bailey,

2000). El método de las ecuaciones en Diferencia Algebraica Generalizada (GADA por sus siglas en inglés) considera que la ecuación base puede ser expandida para permitir que más de un parámetro dependa de la calidad de estación y las familias de curvas obtenidas sean más flexibles (Cieszewski and Bailey, 2000; Cieszewski, 2001). Con la metodología GADA se pueden obtener familias de curvas que sean a la vez polimórficas y con múltiples asíntotas (Cieszewski, 2002). Las ecuaciones con polimorfismo complejo describen mejor los patrones de crecimiento en altura que los modelos anamórficos o polimórficos simples (Cieszewski, 2003). Las ecuaciones derivadas de esta manera son invariantes de la edad de referencia y con respecto al camino de simulación, preservando propiedades lógicas para la proyección del crecimiento (Clutter *et al.*, 1983).

Las ecuaciones dinámicas tienen la forma general $H_1 = f(t_1, t_0, H_0, \beta)$, donde H_1 y H_0 son los valores de la condición inicial en función de los valores de la edad t_1 y t_0 y β es el vector de parámetros de la ecuación (Cieszewski, 2003). El principal reto en el desarrollo de ecuaciones dinámicas bajo el enfoque GADA depende de la disponibilidad de soluciones analíticas para la variable dependiente de la calidad de estación y por tanto, el número potencial de posibles derivaciones es limitado (Cieszewski and Strub, 2008).

Para el ajuste de ecuaciones dinámicas, es necesario el uso de información colectada en dos estados diferentes o bases de datos de series de tiempo temporales (Dielman, 1989), la información puede ser obtenida a través de medidas repetidas en parcelas permanentes de muestreo o de análisis troncales reconstruyendo el crecimiento pasado de los árboles con los anillos anuales de crecimiento (Diéguez-Aranda *et al.*, 2006).

Los objetivos del presente trabajo se centraron en: i). Derivar y plantear una ecuación dinámica en forma GADA a partir de la ecuación base de Chapman-Richards (Richards, 1959), ii). Comparar la ecuación desarrollada con dos formas GADA basada en el modelo de Chapman-Richards (Krumland y Eng, 2005) y otra en el modelo de Korf (Barrio-Anta *et al.*, 2006; Sharma *et al.*,

2011) con ajuste global para *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus arizonica* Engelmännii, *Pinus teocote* Schlecht et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* Shaw (modelo reducido) y iii). Ajustar la ecuación dinámica con el uso de variables indicadoras (modelo completo) para determinar diferencias y similitudes en los patrones de crecimiento de las especies estudiadas.

4.4. Materiales y métodos

La base de datos utilizada se colectó en las masas forestales del Ejido San Diego de Tezains, en el Estado de Durango, México, el cual se ubica en la Sierra Madre Occidental, entre las coordenadas extremas 24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" de latitud Norte y 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" de longitud Oeste. Los tipos de climas predominantes son templado, cálido húmedo y templado subhúmedo, con una precipitación media anual de 1375 mm (García, 1981). Las temperaturas medias varían desde los 8° C en las zonas más altas hasta los 24° C en las zonas bajas, en las cuales la altitud media apenas llega a los 600 m.

La base de datos utilizada fue de 707, 948, 691, 441 y 348 mediciones de altura y edad de 45, 67, 49, 29 y 24 árboles dominantes-codominantes derribados y analizados como análisis troncales para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla* y *Pinus ayacahuite*, respectivamente. Los datos se obtuvieron derribando el árbol a la altura mínima posible del tocón, extrayendo tres secciones hasta llegar a la altura del diámetro normal (1.30 m), la primera a 30 cm del suelo, la segunda a 60 cm y la tercera el complemento para el diámetro normal. Posteriormente se obtuvieron secciones cada 2 m, de ser posible, por las características de los fustes, hasta llegar a la punta del árbol. En el Cuadro 4.1 se presenta la descripción general de los datos usados.

Debido a que los datos utilizados son de análisis troncales y la altura a la edad en la sección de corte del árbol no es la altura verdadera, la altura

verdadera fue calculada con el procedimiento propuesto por Carmean (1972). Este método se basa en dos supuestos: Primero, se supone crecimiento anual constante en altura, el crecimiento en altura está completamente o parcialmente contenido dentro del corte transversal. Segundo, se asume que, en promedio, un corte transversal tendrá lugar a la mitad del crecimiento en altura del año en análisis (Dyer y Bailey, 1987). Este método genera resultados coherentes y es el más preciso para la estimación de alturas con datos de análisis troncales (Dyer and Bailey, 1987; Machado *et al.*, 2010), el algoritmo es dado por 4.1.

$$H_{ij} = h_i + (h_{i+1} - h_i)/[2(r_i - r_{i+1})] + (j - 1)(h_{i+1} - h_i)/(r_i - r_{i+1}) \quad (4.1)$$

donde H_{ij} es la altura del árbol a la edad t_{ij} , n es la edad total del árbol, h_i es la altura al corte transversal i , t_{ij} es la edad del árbol asociada con el anillo interior de crecimiento j , al corte transversal i ($t_{ij} = n - r + j$), j es cada uno de los anillos de crecimiento desde la medula de cada corte transversal i extraído del árbol ($j = 1,2,3, \dots, r$), r_i es el número de anillos de crecimiento en el corte transversal i .

Cuadro 4.1. Diagnóstico de los datos usados en el ajuste.

Especie	Variable	Mínimo	Máximo	Media	SD	Árboles	Observaciones
<i>Pa</i>	<i>t</i>	3.00	199.00	38.34	29.05	45.00	707.00
	<i>H</i>	0.09	30.51	9.76	7.23		
<i>Pd</i>	<i>t</i>	3.00	173.00	39.34	30.48	67.00	948.00
	<i>H</i>	0.12	26.50	8.50	6.43		
<i>Pt</i>	<i>t</i>	3.00	172.00	36.21	27.03	49.00	691.00
	<i>H</i>	0.13	26.60	7.97	6.04		
<i>Pl</i>	<i>t</i>	3.00	170.00	45.76	33.26	29.00	441.00
	<i>H</i>	0.13	27.55	9.38	6.94		
<i>Pay</i>	<i>t</i>	3.00	180.00	40.05	29.90	24.00	348.00
	<i>H</i>	0.12	25.46	8.84	6.77		
<i>Todas</i>	<i>t</i>	3.00	199.00	39.44	29.93	214.00	3104.00
	<i>H</i>	0.09	30.51	8.84	6.68		

Pa es *Pinus arizonica*, *Pd* es *Pinus durangensis*, *Pt* es *Pinus teocote*, *Pl* es *Pinus leiophylla* y *Pay* es *Pinus ayacahuite*, *t* es la edad en años, *H* es la altura en metros, SD es la desviación estándar de la media.

4.4.1. Modelos utilizados

4.4.1.1. Modelo propuesto

Para el desarrollo del modelo dinámico en forma GADA se consideran los siguientes pasos: i). Se selecciona una ecuación base y se identifican los que serán dependientes de la productividad del sitio, ii). Los parámetros seleccionados se expresan como funciones de la calidad de estación definida por la variable χ (variable no observable e independiente que describe la productividad del sitio como resultado de la suma de factores como; regímenes de manejo, condiciones del suelo y factores ecológicos y climáticos) y los nuevos parámetros, iii). La ecuación base bidimensional seleccionada es expandida a una ecuación explícita tridimensional de índice de sitio y iv). Se despeja el valor de χ a partir de condiciones iniciales de la estación, es decir, de valores de partida de edad y altura, de forma que el modelo pueda ser definido implícitamente y aplicable en la práctica (Cieszewski and Bailey, 2000; Cieszewski, 2002).

Para el modelo de Chapman-Richards (Richards, 1959), el cual es muy flexible y ha sido ampliamente utilizado en la construcción de curvas de índice de sitio y crecimiento en altura en relación a la edad, representado como 4.2.

$$H(t, \alpha_i) = \alpha_1(1 - e^{-\alpha_2 t})^{\alpha_3} \quad (4.2)$$

donde H es la altura dominante a la edad t , α_1 es el parámetro que representa la asíntota horizontal, α_2 representa a la tasa de crecimiento y α_3 representa la tasa de cambio.

Bajo el supuesto que los parámetros que representan la asíntota y la tasa de cambio, pueden ser expresados como funciones de la calidad de estación, definidos por la variable χ , de acuerdo a un modelo lineal inverso (Kiviste *et al.*, 2002), representados como m y b , para α_1 y α_3 , respectivamente (Cieszewski y Strub, 2008). La función lineal inversa considera hipotéticamente que los parámetros pueden ser modelados en función de la inversa de la variable no

observable que representa la calidad de estación, la cual no ha sido estudiada para la derivación de ecuaciones dinámicas, dada como 4.3.

$$m(\chi) = m_1 + m_2 \frac{1}{\chi} \text{ y } b(\chi) = b_1 + b_2 \frac{1}{\chi} \quad (4.3)$$

La ecuación GADA con tasas de crecimiento variables y múltiples asíntotas cuando $b_1 = 0$ y $b_2 = 1$ y renombrando el parámetro α_2 como β_3 para ser expresado como parámetros de ecuaciones dinámicas de crecimiento dado en 4.4.

$$\alpha_1(\chi) = e^{(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi})}, \alpha_3(\chi) = \frac{1}{\chi} \text{ y } \alpha_2 = \beta_3 \quad (4.4)$$

la expresión (4.1) es reparametrizada y se escribe en el estado inicial $H_0 = f(t_0, \chi, \beta_i)$ y queda como 4.5.

$$H_0(t_0, \chi, \beta_i) = e^{(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi})} (1 - e^{-\beta_3 t_0})^{\frac{1}{\chi}} \quad (4.5)$$

a la ecuación se le aplican logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación (semi-linealizada) 4.2 y queda como 4.6.

$$\ln(H_0) = \ln \left[e^{(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi})} (1 - e^{-\beta_3 t_0})^{\frac{1}{\chi}} \right] \quad (4.6)$$

de la ecuación anterior se resuelve para χ y se encontró la expresión dada por (4.7).

$$\chi = \frac{\ln(1 - e^{-\beta_3 t_0}) + \beta_2}{\ln(H_0) - \beta_1} \quad (4.7)$$

en el estado $H_1 = f(t_1, \chi, \beta_i)$ de la ecuación se sustituye la solución y se obtiene la derivación de la ecuación dinámica basada en la ecuación de Chapman-Richards, la cual provee familias de curvas polimórficas invariantes de la edad base y asíntotas variables, dada por la siguiente expresión.

$$H_1(t_0, t_1, H_0, \beta_i) = e^{(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi})} (1 - e^{-\beta_3 t_1})^{\frac{1}{\chi}} \quad (4.E1)$$

La ecuación dinámica de crecimiento GADA posee un punto de inflexión a la edad t_1 y expresión del incremento corriente anual (ICA) expresadas en 4.8 y 4.9, respectivamente.

$$t_1 = -\frac{\ln(\chi)}{\beta_3} \quad (4.8)$$

$$ICA_{H_1} = \frac{e^{(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi})} (1 - e^{-\beta_3 t_1}) \beta_3 e^{-\beta_3 t_1}}{\chi (1 - e^{-\beta_3 t_1})} \quad (4.9)$$

La ecuación derivada fue comparada en el ajuste global para todas las especies, con dos ecuaciones dinámicas usadas frecuentemente por su flexibilidad en la modelación de altura dominante, las ecuaciones están basadas en los modelos de Chapman-Richards (Richards, 1959), la cual ha sido utilizada en la construcción de curvas dinámicas de crecimiento para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México (Vargas-Larreta *et al.*, 2010) y el modelo de Korf (Korf, 1933), ambas ecuaciones han sido usadas en diferentes estudios de altura dominante, índice de sitio y área basal por diferentes investigadores (Cieszewski and Bailey, 2000; Krumland and Eng, 2005; Diéguez-Aranda *et al.*, 2006; Barrio-Anta *et al.*, 2006; Sevillano-Marco *et al.*, 2009; Sharma *et al.*, 2011; Nunes *et al.*, 2011).

4.4.1.2. Modelos usados en la comparación

La primera ecuación GADA utilizada para la comparación de la expresión propuesta, es basada en la ecuación (4.1) cuando α_1 y α_3 se asumen como dependientes de la variable χ . Para facilitar la derivación de la ecuación dinámica, el modelo base es reparametrizado tomando como $\alpha_1 = e^\chi$, $\alpha_2 = \beta_2 + \frac{\beta_3}{\chi}$ y $\alpha_3 = \beta_1$. Considerando la ecuación en la condición inicial t_0 y H_0 dado por 4.10 y aplicando logaritmos naturales a ambos lados la formulación es dada por 4.11.

$$H_0 = e^\chi (1 - e^{-\beta_1 t_0})^{(\beta_2 + \frac{\beta_3}{\chi})} \quad (4.10)$$

$$\ln(H_0) = \ln \left[e^\chi (1 - e^{-\beta_1 t_0})^{(\beta_2 + \frac{\beta_3}{\chi})} \right] \quad (4.11)$$

La solución para χ_0 implica encontrar la raíz de una ecuación de segundo grado y seleccionar la raíz más apropiada para sustituir en la ecuación

dinámica (Cieszewski and Bailey, 2000). La solución para χ_0 en la expresión 4.11 es dada en 4.12.

$$\chi = \frac{\ln H_0 - \beta_2 \ln(1 - e^{-\beta_1 t_0}) + \left([\ln H_0 - \beta_2 \ln(1 - e^{-\beta_1 t_0})]^2 - 4\beta_3 \ln(1 - e^{-\beta_1 t_0}) \right)^{1/2}}{2} \quad (4.12)$$

La raíz más probable real y positiva y asumiendo la ecuación 4.10 en el estado t_1 y H_1 y despejando e^χ , resulta la siguiente ecuación dinámica que presenta curvas polimórficas con asíntotas variables (Krumland and Eng, 2005).

$$H_1 = H_0 \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 t_1}}{1 - e^{-\beta_1 t_0}} \right)^{\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{\chi} \right)} \quad (4.E2)$$

La segunda ecuación utilizada se basa en el modelo base de Korf 4.13 propuesto por Korf (1939). Donde α_1 es la asíntota, α_2 y α_3 refieren al punto de inflexión y la tasa de crecimiento.

$$H = \alpha_1 e^{(-\alpha_2 t^{-\alpha_3})} \quad (4.13)$$

Los parámetros α_1 y α_2 , se asumen dependientes de la variable χ , dados por $\alpha_1 = e^\chi$, $\alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi$, cambiando $\alpha_2 = \beta_3$ y asumiendo la expresión en la condición inicial t_0 y H_0 , queda la ecuación 4.14.

$$H_0 = e^\chi e^{(-(\beta_1 + \beta_2/\chi)t_0^{-\beta_3})} \quad (4.14)$$

La solución para χ_0 (4.15), que al incorporarla a la ecuación 4.14 en el estado t_1 y H_1 , resulta la ecuación 4.E3, la cual presenta curvas polimórficas con asíntotas variables (Barrio-Anta *et al.*, 2006; Sharma *et al.*, 2011).

$$\chi = \frac{1}{2} t_0^{-\beta_3} \left[\left(\beta_1 + t_0^{-\beta_3} \ln(H_0) \right) + \left(4\beta_2 t_0^{-\beta_3} + \left(\beta_1 + t_0^{-\beta_3} \ln(H_0) \right)^2 \right)^{1/2} \right] \quad (4.15)$$

$$H_1 = e^\chi e^{(-\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right)t_1^{-\beta_3})} \quad (4.E3)$$

4.4.1.3. Comparación de modelos

La bondad de ajuste de la ecuación dinámica derivada y las utilizadas para la comparación inicial, se midió a través del análisis numérico y gráfico de

los residuales, con la obtención de estadísticos como el coeficiente de determinación ajustado (R_a^2), la raíz del cuadrado medio del error (RMSE), el sesgo promedio absoluto (\bar{E}), el coeficiente de variación expresado en porcentaje (CV) y el criterio de información de Akaike (AIC) usando la versión de mínimos cuadrados ordinarios (Lu and Zhang, 2011). Además se analizaron gráficamente las predicciones del modelo para revisar si eran biológicamente realistas a los datos utilizados (Goelz and Burk, 1992; Sharma *et al.*, 2011). Para medir la presencia de autocorrelación se utilizó el valor de la prueba de Durbin-Watson (Durbin and Watson, 1971).

Para comparar el modelo completo (ajustado con variables indicadoras para las cinco especies) contra el modelo reducido (ajustado englobando a las cinco especies) se utilizó la suma de cuadrados extra no lineales, utilizando la prueba estadística de F generalizada (Washington *et al.*, 2011).

$$R_a^2 = 1 - \left[\frac{n - 1 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n - p \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right] \quad (4.16)$$

$$RMSE = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n - p} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

$$\bar{E} = \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})}{n} \right| \quad (4.18)$$

$$CV = \frac{(\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 / n - 1)^{\frac{1}{2}}}{\bar{y}} \times 100 \quad (4.19)$$

$$AIC = 2p + n[\ln(RSS/n)] \quad (4.20)$$

$$dw = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (4.21)$$

$$F^* = \frac{(SSE_R - SSE_F) / df_R - df_F}{SSE_F / df_F} \quad (4.22)$$

donde y_i , \hat{y} e \bar{y} son los valores observado, predicho y medio de la altura, n es el número de observaciones, p es el número de parámetros del modelo, $RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ suma de cuadrados del residual, e_i el valor residual del modelo ajustado, F^* es el valor de la prueba estadística que sigue una distribución F , SSE_R y SSE_F son la suma de cuadrados del error de los modelos reducido y

completo y df_R y df_F son los grados de libertad de los modelos reducido y completo respectivamente.

4.4.1.4. Supuestos de ajuste del modelo

La modelación de la ecuación dinámica propuesta se basó en los patrones de crecimiento de las cinco especies estudiadas, considerando los siguientes supuestos:

- i) El ajuste del modelo puede ser generalizado.
- ii) El ajuste del modelo debe ser específico para cada especie.
- iii) El ajuste del modelo puede combinarse entre especies.
- iv) El modelo puede ser ajustado para todas las especies asumiendo variables indicadoras para cada especie.

4.4.2. Análisis de las ecuaciones dinámicas

4.4.2.1. Ajuste de los parámetros

La estimación de parámetros para modelos de altura e índice de sitio implica diferentes consideraciones estadísticas como criterio de ajuste, estructuras e independencia de errores, homogeneidad de varianzas y el balance en los datos utilizados (Diéguez-Aranda *et al.*, 2006).

Los modelos fueron ajustados considerando invariante a la edad base, ajustando simultáneamente parámetros globales y específicos del sitio, se usó el procedimiento iterativo (nested iterative procedure) descrito por Tait *et al.* (1988), este procedimiento genera buenos resultados cuando se usan bases de datos con más de 800 pares de altura edad (Cieszewski, 2003; Krumland and Eng, 2005; Diéguez-Aranda *et al.*, 2006). El procedimiento consiste en el siguiente proceso iterativo: i) se ajustaron los parámetros globales y se considera constante el parámetro local (H_0) que varía para cada árbol y al que inicialmente se le asignó el valor de la altura media observada a la edad de 60 años, ii) los valores de los parámetros globales se consideraron como

constantes y el parámetro específico del sitio (H_0) fue reajustado. Los valores observados para cada árbol (H_0) son usados como valores de inicio para el procedimiento de ajuste. Después los valores estimados (H_1) se convierten en valores observados y los parámetros globales son ajustados nuevamente. El procedimiento se repite hasta que las estimaciones sucesivas de los parámetros globales se estabilizan (Cieszewski *et al.*, 2000b). Se utilizó como criterio que la reducción del cuadrado medio del error entre dos iteraciones fuera menor de 0.0001 para estabilizar el procedimiento de ajuste (Vargas-Larreta *et al.*, 2010). Cieszewski *et al.* (2000b) indican, que los enfoques de invarianza de la edad base son similares a la modelación con efectos mixtos. Los parámetros locales o específicos del sitio son los parámetros de los efectos aleatorios con media diferente de cero, igual a los efectos fijos que representan la altura dominante promedio en referencia a una edad base dada. Estos parámetros no son modelados explícitamente, pero pueden ser fácilmente recuperados después del ajuste de la ecuación dinámica, para expresar el efecto aleatorio referente a los diferentes escenarios que representan la variabilidad de la productividad del sitio. Todos los otros efectos fijos son simplemente los parámetros globales del modelo (Álvarez-González *et al.*, 2010).

Los modelos fueron ajustados usando en los residuales una estructura autorregresiva continua CAR(3), considerando la distancia entre las mediciones de altura para cada árbol para corregir la autocorrelación del término del error (Zimmerman and Núñez-Antón, 2001; Nord-Larsen, 2006; Crecente-Campo *et al.*, 2009). Con el uso de una estructura autorregresiva de errores se obtienen estimadores de los parámetros eficientes e insesgados (Parresol and Vissage, 1998), la estructura usada fue 4.23

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=x} I_k \rho_k^{h_{ij}-h_{ij-k}} e_{ij-k} + \epsilon_{ij} \quad (4.23)$$

donde e_{ij} es el j residual ordinario en la observación i , e_{ij-k} es el $j - k$ residual ordinario de la observación i , $I_k = 1$ cuando $j > k$ y 0 cuando $j \leq k$, ρ_k es el

orden del k parámetro autorregresivo continuo a ser estimado y $h_{ij} - h_{ij-k}$ es la distancia de separación de la observación de la altura j a la $j - k$ en cada árbol i , con $h_{ij} > h_{ij-k}$. Así ϵ_{ij} es el error independiente que sigue una distribución normal con media cero y varianza constante.

Para corregir el problema de heterocedasticidad, la varianza del error fue asumida como una función de potencia de la altura predicha (Huang *et al.*, 2000). El factor de peso utilizado fue $w_i = \hat{H}_1^k$, donde k es una constante que puede tomar valores de -2, -1.5, -1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 o cualquier otro valor fijo (Huang *et al.*, 2000; Corral *et al.*, 2004). En este estudio para lograr la homogeneidad de varianzas en la gráfica de residuales estandarizados contra los valores predichos se utilizó el valor de 0.05.

Para ajustar la ecuación dinámica propuesta, diferenciando el crecimiento entre especies, para los parámetros globales se usaron variables indicadoras para las especies, considerando a *Pinus durangensis* como la especie base por ser la que mayor número de observaciones presenta, las variables indicadoras fueron definidas como 4.24.

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si } sp = j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (4.24)$$

donde I_j representa la variable indicadora para cada especie (sp), por tanto, ($j = 2$ *Pinus arizonica*, 3 *Pinus teocote*, 4 *Pinus leiophylla* y 5 *Pinus ayacahuite*).

Los parámetros de la expresión (4.E1) fueron replanteados en función de las variables indicadoras siendo los efectos de las especies diferentes a *P. durangensis* aditivos, de forma tal que cada parámetro global β_i se puede escribir de manera general como:

$$\beta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2}I_2 + \beta_{i3}I_3 + \beta_{i4}I_4 + \beta_{i5}I_5 \quad (4.25)$$

para $i = 1, 2, 3$, de los parámetros de la ecuación dinámica derivada.

El modelo completo con el uso de variables indicadoras es dado por 4.E4, el cual solo considera los parámetros significativos a un nivel de significancia del 5% para las especies estudiadas.

$$H_1 = e^{\left(\frac{\beta_{11} + \beta_{12}I_2 + \beta_{15}I_5 + (\beta_{21})^{\frac{1}{\chi}}}{\chi}\right)} (1 - e^{-(\beta_{31} + \beta_{32}I_2 + \beta_{33}I_3 + \beta_{34}I_4)t_1})^{\frac{1}{\chi}} \quad (4.E4)$$

Las ecuaciones dinámicas de crecimiento en altura, más la estructura del modelo autorregresivo de tercer orden, la función de potencia de la varianza del error y las variables indicadoras para el modelo propuesto fueron programadas y ajustadas simultáneamente con el procedimiento MODEL de SAS/ETS[®] (SAS Institute Inc., 2011), que permite la actualización dinámica de los residuales. En el Anexo 7.6.3 se presenta el código SAS para el ajuste de la ecuación dinámica 4.E1 con variables indicadoras.

4.5. Resultados y discusión

En relación a los objetivos planteados y con la finalidad de comparar la bondad de ajuste de la ecuación dinámica con polimorfismo y múltiples asíntotas, en referencia a las ecuaciones utilizadas, en el Cuadro 4.2 se presentan los parámetros estimados, sus errores estándar y los estadísticos de ajuste para todos los pares de edad altura (combinando todas las especies), todos los parámetros fueron significativos al 1% de significancia.

Cuadro 4.2. Parámetros estimados, error estándar y estadísticos de ajuste de las ecuaciones dinámicas ajustadas a todos los pares de edad altura.

Modelo		β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	R_a^2	RMSE	\bar{E}	CV	AIC	dw
4.E1	θ_i	5.01	-1.04	0.02	0.99	0.89	0.79	0.992	0.60	0.04	6.73	-3200	1.83
	ϵ_i	0.15	0.10	0.001	0.01	0.01	0.01						
4.E2	θ_i	0.02	0.32	3.55	1.150	0.95	0.86	0.996	0.40	0.03	4.50	-5695	1.62
	ϵ_i	0.001	0.08	0.201	0.01	0.012	0.01						
4.E3	θ_i	-2.172	54.59	0.45	0.99	0.88	0.79	0.992	0.60	0.05	6.76	-3163	1.81
	ϵ_i	0.14	0.88	0.02	0.01	0.010	0.01						

R_a^2 es el coeficiente de determinación ajustado, $RMSE$ es la raíz del error medio cuadrático (cm), \bar{E} es el sesgo promedio absoluto (cm), CV es el coeficiente de variación, AIC Criterio de Información de Akaike, dw es el valor del estadístico de Durbin-Watson, θ_i es el estimador y ϵ_i es el error estándar del estimador.

La bondad de ajuste y los parámetros estimados para el modelo propuesto con variables indicadoras (tomando como base a *Pinus durangensis*) se presentan en el Cuadro 4.3. Solo los parámetros significativos por especie del

modelo completo fueron utilizados. El uso de la ponderación basada en la función de potencia ($w_i = \hat{H}_1^k$) corrigió la heterocedasticidad de los datos usados en los modelos estudiados.

Cuadro 4.3. Parámetros estimados, error estándar y estadísticos de ajuste del modelo completo.

Modelo	Parm	θ_i	ϵ_i	$\Pr t $	R_a^2	<i>RMSE</i>	\bar{E}	<i>CV</i>	AIC	dw
	$\beta_{1(1)}$	5.261	0.181	<0.0001						
	$\beta_{1(2)}$	0.208	0.070	0.0031						
	$\beta_{1(5)}$	0.400	0.086	<0.0001						
	$\beta_{2(1)}$	-1.224	0.124	<0.0001						
	$\beta_{3(1)}$	0.016	0.001	<0.0001						
4.E4	$\beta_{3(2)}$	0.010	0.001	<0.0001	0.993	0.59	0.04	6.62	-3284	1.86
	$\beta_{3(3)}$	0.007	0.001	<0.0001						
	$\beta_{3(4)}$	0.003	0.001	0.0052						
	ρ_1	0.994	0.011	<0.0001						
	ρ_2	0.883	0.010	<0.0001						
	ρ_3	0.785	0.011	<0.0001						

Parm es el parámetro del modelo con variables indicadoras, θ_i es el estimador del parámetro, ϵ_i es el error estándar del parámetro estimado, $\Pr|t|$ es el valor de probabilidad de la distribución t de student.

Comparando el modelo reducido (4.E1) con el modelo completo (4.E4), en el Cuadro 4.4 se presenta la prueba de F de Snedecor, la cual indica que el modelo completo es significativamente diferente al modelo reducido con un valor de rechazo menor al 1%.

Cuadro 4.4. Prueba de F para el modelo completo y reducido.

Modelo	Parámetros	GL	SSE	IGL (%)	ISSE (%)	F*	F($\alpha=0.05$)	Pr F
Completo	11	3093	1067.1					
Reducido	6	3098	1102.1	0.16	3.28	20.29	1.09	<0.0001

GL son los grados de libertad del modelo, SSE es la suma de cuadrados del error, IGL es el incremento en grados de libertad del modelo completo conforme al modelo reducido, ISSE es el incremento en la SSE del modelo completo conforme al modelo reducido, F* es el valor calculado de la prueba de F, F ($\alpha=0.05$) es el valor de la distribución F al nivel de significancia de 5% con 5 grados de libertad en el numerador y 3093 en el denominador y Pr|F| es la probabilidad calculada.

Las familias de curvas de crecimiento en altura obtenidas con el modelo completo (4.E4) y tomando categorías de índices de sitio de 8 a 24 m con intervalos de 2 m, para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus ayacahuite* y de 8 a 20 m para *Pinus leiophylla*, a una edad de referencia de 60 años, muestran gráficamente las tendencias de los datos utilizados (Figura 4.1).

En el Cuadro 4.5 se presentan los valores de la edad (t_1) a la que suceden los puntos de inflexión en las familias de curvas de índice de sitio, marcando el punto de cambio de las curvas de convexas a cóncavas, dados por la expresión 4.8.

Cuadro 4.5. Edad a la cual suceden los puntos de inflexión en las familias de curvas de crecimiento por índice de sitio a la edad de referencia de 60 años.

Especie	Edad del punto de inflexión al Índice de sitio (IS)								
	8	10	12	14	16	18	20	22	24
<i>Pa</i>	32.6	29.9	27.6	25.6	23.7	21.9	20.3	18.8	17.4
<i>Pd</i>	39.1	34.5	30.5	26.9	23.6	20.6	17.7	14.9	12.4
<i>Pt</i>	32.8	29.6	26.7	24.2	21.8	19.7	17.7	15.7	13.9
<i>Pl</i>	36.1	32.2	28.8	25.8	23.0	20.4	18.0	15.7	13.6
<i>Pay</i>	46.3	42.3	38.7	35.6	32.7	30.1	27.7	25.4	23.2

Pa es *Pinus arizonica*, *Pd* es *Pinus durangensis*, *Pt* es *Pinus teocote*, *Pl* es *Pinus leiophylla* y *Pay* es *Pinus ayacahuite*.

Con la implementación de la expresión del incremento corriente anual (ICA) y el crecimiento medio anual (IMA) se construyeron las familias de curvas de incrementos para las especies estudiadas (Figura 4.2). Resulta interesante conocer la edad a la cual se logra la máxima producción (Turno técnico) en

crecimiento en altura, referido a categorías de índice de sitio. Debido a que la ecuación base no tiene una expresión algebraica de la edad (t) a la cual el ICA y el IMA son iguales, la ecuación dinámica tampoco presenta esta cualidad a la edad (t_1). Los turnos técnicos para las categorías de índice de sitio fueron obtenidos iterativamente por la diferencia del ICA e IMA, dando un valor inicial a la edad (t_1) y cambiándolo iterativamente hasta que la diferencia entre el ICA e IMA fuera 0.

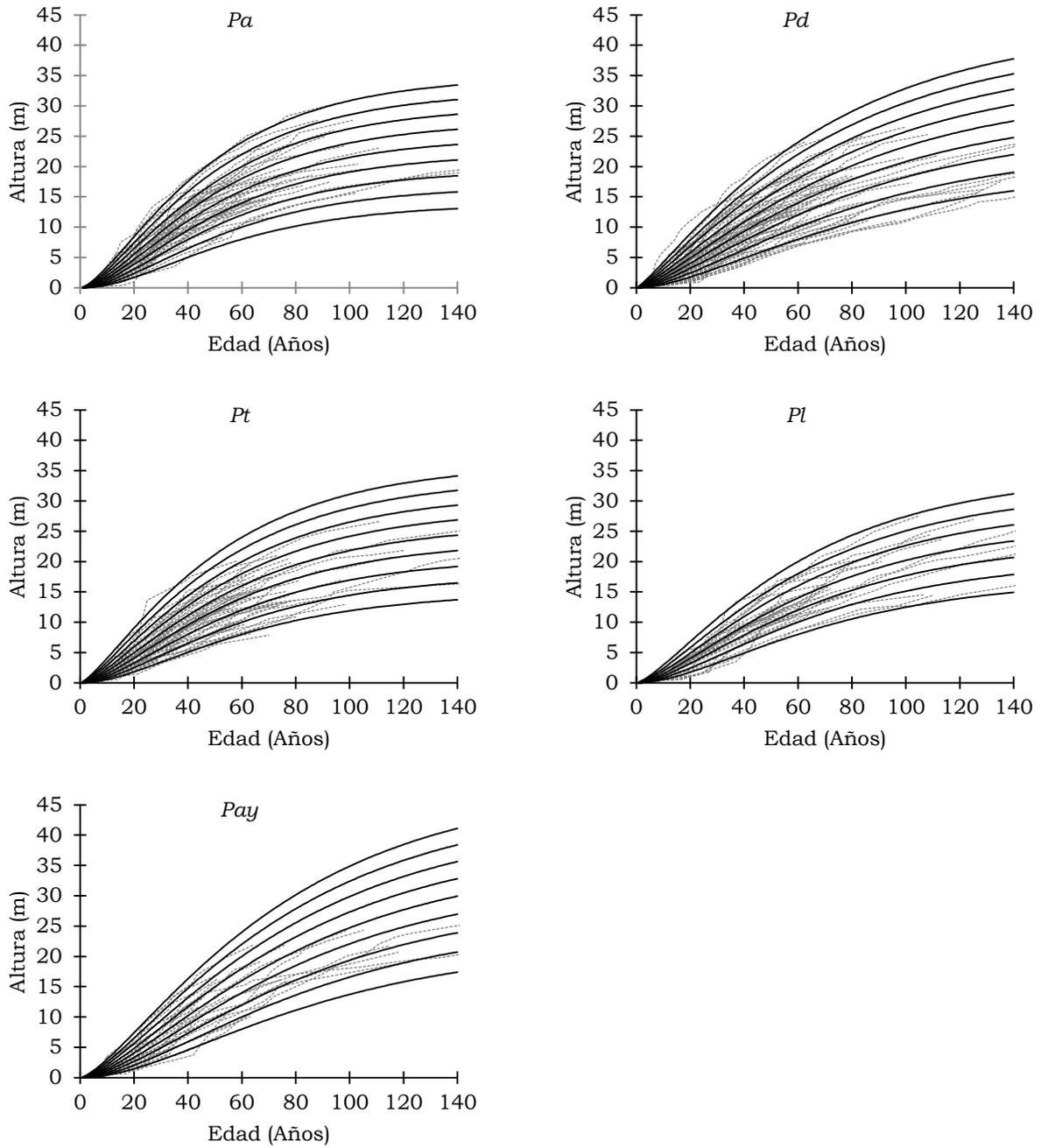


Figura 4.1. Familias de curvas de crecimiento en altura para categorías de índice de sitio de 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y 24 m para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus ayacahuite* y categorías de índice de sitio de 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20 m para *Pinus leiophylla*.

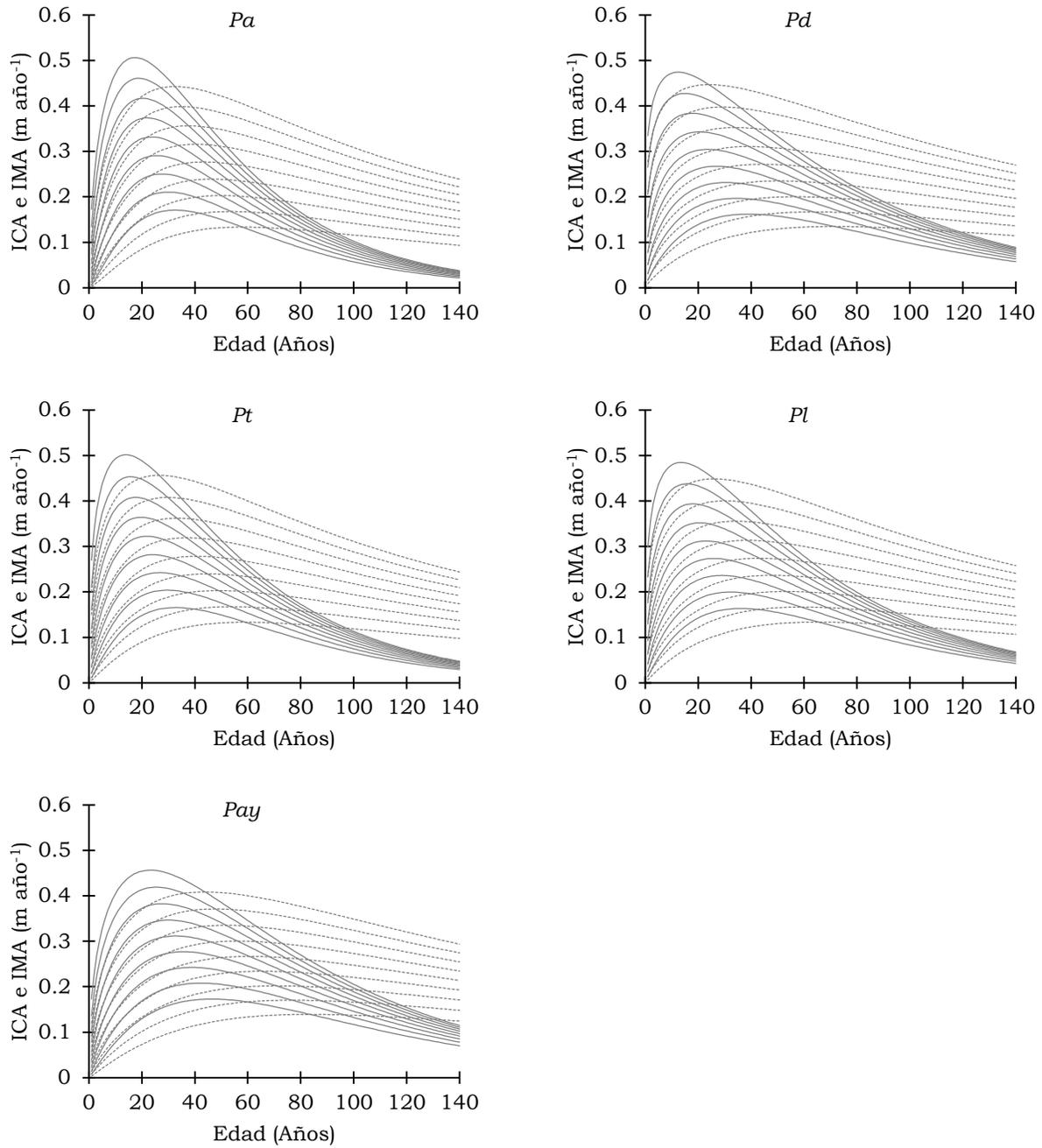


Figura 4.2. Familias de curvas de incremento corriente anual en altura (ICA) l\u00ednea continua e incremento medio anual (IMA) l\u00ednea discontinua, considerando categor\u00edas de \u00edndice de sitio de 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y 24 m.

En el Cuadro 4.6 se presentan los valores de la edad a la cual sucede el turno técnico por categorías de índice de sitio a la edad de referencia de 60 años, lo cual se puede apreciar gráficamente en la Figura 4.2.

Cuadro 4.6. Edad a la cual sucede el turno técnico en las familias de curvas de crecimiento por índice de sitio a la edad de referencia de 60 años.

Especie	Turno técnico al Índice de sitio (IS)								
	8	10	12	14	16	18	20	22	24
<i>Pa</i>	58.0	53.7	50.0	46.5	43.4	40.4	37.7	35.0	32.5
<i>Pd</i>	71.4	63.6	56.7	50.4	44.5	39.1	33.8	28.8	24.0
<i>Pt</i>	59.1	53.7	49.0	44.6	40.6	36.8	33.2	29.8	26.4
<i>Pl</i>	65.5	58.8	53.1	47.8	43.0	38.4	34.1	30.0	26.0
<i>Pay</i>	83.5	76.8	70.9	65.6	60.7	56.1	51.8	47.7	43.8

Pa es *Pinus arizonica*, *Pd* es *Pinus durangensis*, *Pt* es *Pinus teocote*, *Pl* es *Pinus leiophylla* y *Pay* es *Pinus ayacahuite*.

En la Figura 4.3 se presentan las gráficas de los residuales estandarizados contra la altura predicha, la tendencia no da evidencia de heterocedasticidad de varianzas. También se puede observar el sesgo promedio por categoría de edad y especies ajustadas con variables indicadoras.

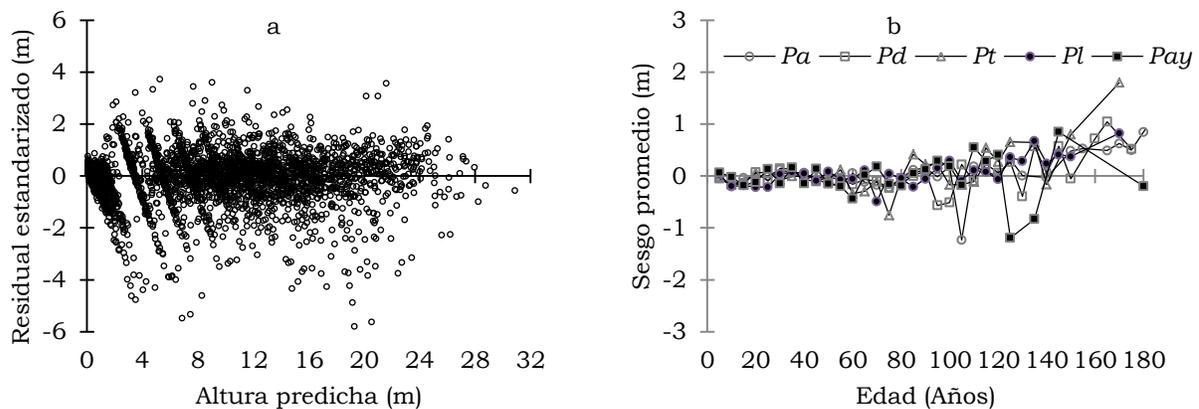


Figura 4.3. Gráficas de residuales estandarizados contra los valores predichos (a) y sesgo promedio por categoría de edad (b) considerando el ajuste global con variables indicadoras.

En la Figura 4.4 se presentan los gráficos de la función de autocorrelación parcial (PACF), obtenidas de los ajustes del modelo completo, se usaron 8 retardos de los residuales (Lag) para cada árbol, se observa que pasa de un correlograma con autocorrelación positiva de tercer orden hasta una gráfica sin

evidencia de autocorrelación obtenida con el ajuste de la ecuación dinámica con una estructura autorregresiva de errores de tercer orden CAR(3).

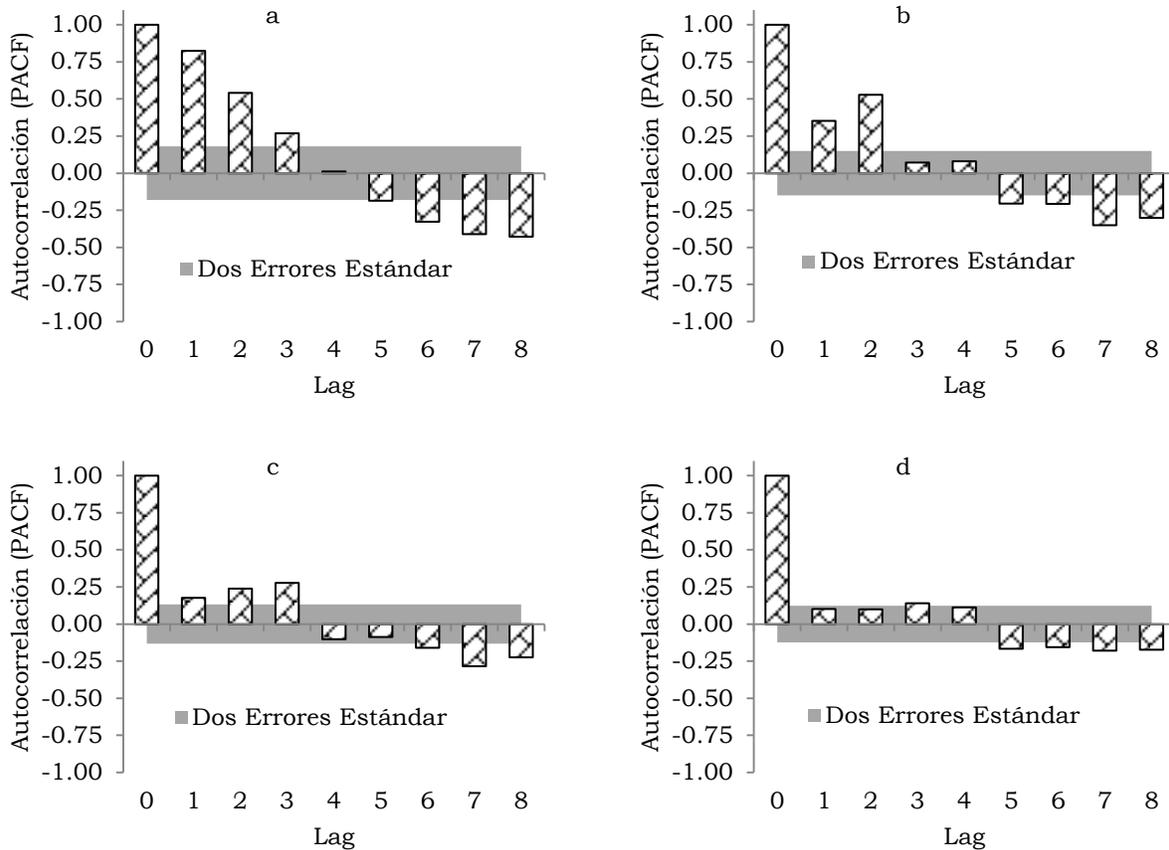


Figura 4.4. Gráficas de la Función de Autocorrelación Parcial del ajuste del modelo completo; ajuste sin corrección de la autocorrelación (a), considerando un modelo autorregresivo de errores de primero, segundo y tercer orden b, c y d, respectivamente.

La solución para la variable χ que describe la productividad del sitio asociada a los parámetros de la ecuación dinámica representa una expresión matemáticamente más sencilla que la solución de los modelos contrastados (Cieszewski and Bailey, 2000) por lo que la propuesta (4.E1) se puede considerar con mejor parsimonia en la expresión matemática que la ecuación reportada por Krumland and Eng (2005) basada en el modelo Chapman-Richards y la estudiada por Barrio-Anta *et al.* (2006) y Sharma *et al.* (2011) basada en el modelo de Korf. La derivación de la ecuación dinámica 4.E1 se centra en el parámetro que representa la asíntota del modelo base y no el parámetro de la tasa de crecimiento como las ecuaciones contrastadas.

En el ajuste general (sin distinción entre especies) el modelo 4.E2 resulto ligeramente superior, seguido de 4.E1 y 4.E3 (Cuadro 4.3); resultando el modelo 4.E1 con una estructura autorregresiva de errores de tercer orden ligeramente superior en la corrección de la autocorrelación con valor de 1.83 del estadístico de Durbin-Watson.

La 4.E1 genera familias de curvas de crecimiento con polimorfismo complejo y múltiples asíntotas, posee un punto de inflexión, es invariante con respecto a la edad base, es invariante con respecto al camino de simulación y es realista a los datos usados en el ajuste (Cieszewski and Bella, 1989; Cieszewski, 2001; Cieszewski, 2002; Cieszewski, 2003; Cieszewski and Strub, 2008; Álvarez-González *et al.*, 2010; Vargas-Larreta *et al.*, 2010). La ecuación derivada conserva el número de parámetros de la ecuación base y permite modelar el crecimiento en altura dominante e índice de sitio.

El ajuste de la ecuación dinámica (4.E4) con el uso de variables indicadoras para las cinco especies estudiadas muestra que *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla* pueden ser modelados con los mismos parámetros que representan la asíntota horizontal de la ecuación dinámica, pero variando la tasa de crecimiento para cada especie. *Pinus durangensis* y *Pinus ayacahuite* presentan similitud en el parámetro que representa la tasa de crecimiento, pero los parámetros de la asíntota se comportan diferentes. El parámetro β_{21} asociado al modelo lineal inverso de la asíntota resulto igual para las cinco especies, ya que en el proceso de modelación el valor encontrado para *Pinus durangensis* fue estadísticamente igual que para el resto de las especies.

Las familias de curvas de crecimiento e incremento a la edad base de 60 años (figuras 4.1 y 4.2) demuestran que las especies estudiadas presentan diferentes patrones de crecimiento en altura dominante y que sus turnos técnicos son distintos para los índices de sitio considerados. Esta característica implica que para la planeación de las actividades de manejo forestal las intervenciones silvícolas se pueden enfocar a una especie en particular,

considerando su importancia ecológica o maderable. De esta forma el manejo puede centrarse en las especies existentes o en la reconversión a largo plazo de las masas forestales a especies con mejores patrones de crecimiento y menores turnos técnicos. Las mejores tasas de crecimiento las presenta la especie *Pinus arizonica*, las peores tasas son para *Pinus ayacahuite*, mientras que *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla* tienen tasas de crecimiento muy similares conforme cambia el índice de sitio. Para el índice de sitio medio (16 m) los turnos técnicos para las especies estudiadas son muy estables.

Los patrones de crecimiento en altura dominante, en el contexto de silvicultura de masas mezcladas de *Pinus* sugieren que a mayor índice de sitio los ciclos de corta pueden ser menores, pero exige un cuidado adecuado de la densidad y tratamientos complementarios al bosque.

4.6. Conclusiones

La ecuación dinámica derivada a partir del modelo base de Chapman-Richards representa una opción adecuada para modelar el crecimiento de altura dominante e índice de sitio, ya que mantiene el mismo número de parámetros de la ecuación base y es realista a las tendencias de los datos usados en el presente estudio. La estructura matemática obtenida es sencilla y representa ventajas en términos de parsimonia con las ecuaciones contrastadas.

Las posibilidades de la aplicación de la ecuación dinámica derivada en el presente trabajo son dos, considerando el crecimiento en altura dominante e índice de sitio para las masas forestales del área de estudio; uso de la ecuación 4.E1 para *Pinus* en general (especies analizadas) o el uso de 4.E4 diferenciando patrones de crecimiento para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla* y *Pinus ayacahuite*.

El uso de la ecuación dinámica de crecimiento en altura dominante e índice de sitio ayudará en la clasificación (etiquetado) de la productividad forestal, para las unidades de manejo (subrodiales), en la planeación de los

tratamientos silvícolas y en la determinación de periodos de corta de acuerdo a los turnos técnicos por calidad de estación.

4.7. Agradecimientos

El desarrollo del trabajo fue realizado con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) a través de la beca del Programa de Fomento, Formación, Desarrollo y Vinculación de Recursos Humanos de Alto Nivel (247171), del Postgrado en Ciencias Forestales de Doctorado del Colegio de Postgraduados, así como del Ejido San Diego de Tezains, Durango, que permitió tener acceso a la información.

4.8. Literatura citada

Álvarez-González, J. G., A. Zingg, and K. V. Gadow. 2010. Estimating growth in beech forests: a study based on long term experiments in Switzerland. *Ann. For. Sci.* 67(3): 1-13.

Bailey, R. L., and J. L., Clutter. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *For. Sci.* 20(2): 155-159.

Barrio-Anta, M., F. Castedo D., U. Diéguez-Aranda, J. G. Álvarez G., B. R. Parresol, and R. Rodríguez. 2006. Development of a basal area growth system for maritime pine in northwestern Spain using the generalized algebraic difference approach. *Can. J. For. Res.* 36(6): 1461-1474.

Carmean, W. H., 1972. Site index curves for upland oaks in the Central States. *For. Sci.* 18(2): 102-120.

Cieszewski, C. J. 2001. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Can. J. For. Res.* 31(1): 165-173.

Cieszewski, C. J. 2002. Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *For. Sci.* 48(1): 7-23.

- Cieszewski, C. J. 2003. Developing a Well-Behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV Function $Y_3=aX_m/(c+X_m-1)$, a Simplified Mixed-Model and Scant Subalpine Fir Data. *For. Sci.* 49(4): 539-554.
- Cieszewski, C. J., and R. L. Bailey. 2000. Generalized Algebraic Difference Approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *For. Sci.* 46(1): 116- 126.
- Cieszewski, C. J., R. L. Bailey, B. E. Borders, G. H. Bristher, and B. D. Shiver. 2000a. Base-Age Invariance and Inventory Projections. In: Hansen, M.; Burk, T., (Eds) Integrated tools for natural resources inventories in the 21st century. Gen. Tech. Rep. NC-212. St. Paul, MN: U.S. Dept. of Agriculture, Forest Service, North Central Forest Experiment Station. 481-493.
- Cieszewski, C. J., and I. E. Bella. 1989. Polymorphic height and site index curves for lodgepole pine in Alberta. *Can. J. For. Res.* 19(9): 1151-1160.
- Cieszewski, C. J., M. Harrison, and S. W. Martin. 2000b. Practical methods for estimating non-biased parameters in self-referencing growth and yield models. University of Georgia PMRC-TR 2000-7. 11 p.
- Cieszewski, C. J., and M. Strub. 2008. Generalized Algebraic Difference Approach Derivation of Dynamic Site Equations with Polymorphism and Variables Asymptotes from Exponential and Logarithmic Functions. *For. Sci.* 54(3): 303-315.
- Clutter, J. L., J. C. Forston, L. V. Pienar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. Timber management. Wiley, New York. 333 p.
- Corral R., J. J., J. G. Álvarez G., A. D. Ruíz G., and K. V. Gadov. 2004. Compatible height and site index models for five pine species in El Salto, Durango (México). *For. Ecol. Manage.* 201(2-3): 145-160.
- Crecente-Campo, F., A. Rojo A., and U. Diéguez-Aranda. 2009. A merchantable volume system for *Pinus sylvestris* L. in the major mountain ranges of Spain. *Ann. For. Sci.* 66(8): 1-12.

- Diéguez-Aranda, U., H. E. Burkhart, and R. L. Amateis. 2006. Dynamic Site Model for Loblolly Pine (*Pinus taeda* L.) Plantations in the United States. *For. Sci.* 52(3): 262-272.
- Dielman, T. E. 1989. Pooled cross-sectional and time series data analysis. Marcel. Dekker. Inc., New York, USA. 79 p.
- Durbin, J., and G. S. Watson. 1971. Testing for serial correlation in least squares regression III. *Biometrika* 58(1): 1-19.
- Dyer, M. E., and R. L. Bailey. 1987. A test of six methods for estimating true heights from stem analysis data. *For. Sci.* 33(1): 3-13.
- García, E. 1981. Modificaciones al Sistema de Clasificación Climática de Köppen (para adaptarlo a las condiciones de la República Mexicana). Edición de E. García impresa en Talleres Larios, México, D. F. 252 p.
- Goelz, J. C. G., and T. E. Burk. 1992. Development of a well-behaved site index equation: jack pine in north central Ontario. *Can. J. For. Res.* 22: 776–784.
- Huang, S., D. Price, D. Morgan, and K. Peck. 2000. Kozak's variable exponent taper equation regionalized for white spruce in Alberta. *West. J. Appl. For.* 15(2): 75–85.
- Kiviste, A., J. G. Álvarez G., A. Rojo A., y A. D. Ruiz G. 2002. Funciones de crecimiento de aplicación en el ámbito forestal. Monografía INIA: Forestal No 4. Ministerio de Ciencia y Tecnología. Instituto Nacional de Investigación y Tecnología Agraria y Alimentaria (INIA), Madrid, España. 190 p.
- Korf, V. 1939. Pøíspìvek k matematické definici vzrùstového zákona lesních porostù. *Lesnická práce* 18: 339–356.
- Krumland, B., and H. Eng. 2005. Site index systems for major young-growth forest and woodland species in northern California. California Department Forestry and Fire Protection. California Forestry Report No. 4. 220 p.
- Lu, J., and L. Zhang. 2011. Modeling and prediction of Tree Height-Diameter Relationships Using Spatial Autoregressive Models. *For. Sci.* 57(3): 252-264.

- Machado, S.A., L. C. Rodríguez S., M. A. Figura, S. J. Téó, y R. G. Mendes N. 2010. Comparison of methods for estimating heights from complete stem analysis data for *Pinus taeda*. *Ciencia Florestal* 20(1): 45-55.
- Martín-Benito, D., G. Gea-Izquierda, M. Del Río, y I. Cañellas. 2008. Long-term trends in dominant-height growth of black pine using dynamic models. *For. Ecol. Manage.* 256(5): 1230-1238.
- Nord-Larsen, T. 2006. Developing Dynamic Site Index Curves for European Beech (*Fagus sylvatica* L.) in Denmark. *For. Sci.* 52(2): 173-181.
- Nunes, L., M. Patrício, J. Tomé, y M. Tomé. 2011. Modeling dominant height growth of maritime pine in Portugal using GADA methodology with parameters depending on soil and climate variables. *Ann. For. Sci.* 68(2): 311-323.
- Parresol, B. R., and J. S. Vissage. 1998. White Pine Site Index for Southern Forest Survey. Res. Pap. SRS-10. U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Southern Research Station. Asheville, NC. 8 p.
- Sevillano-Marco, E., A. Fernández-Manso, y F. Castedo-Dorado. 2009. Development and applications of a growth model for *Pinus radiata* D. Don Plantations in El Bierzo (Spain). *Invest. Agrar: Sist. Recur. For.* 18(1): 64-80.
- Richards, F. J. 1959. A flexible growth curve for empirical use. *J. Exp. Bot.* 10(2): 290-300.
- SAS Institute Inc., 2011. SAS/ETS® 9.3 User's Guide. Cary, NC:, SAS Institute Inc.
- Sharma, R. P., A. Brunner, T. Eid, and B. H. Oyen. 2011. Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time series and large age error. *For. Ecol. Manage.* 262(12): 2116-2175.
- Tait, D. E., C. J. Cieszewski, and I. E. Bella. 1988. The stand dynamics of lodgepole pine. *Can. J. For. Res.* 18(10): 1255-1260.

- Torres R., y J. M., O. S. Magaña T. 2001. Evaluación de plantaciones forestales. Limusa Noriega Editores, México, D. F. 472 p.
- Vargas-Larreta, B., J. G. Álvarez-González, J. J. Corral-Rivas, y O. A. Aguirre C. 2010. Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco. Revista Fitotecnia Mexicana 33(4): 343-351.
- Vanclay, J. 1994. Modelling Forest Growth and Yield. Applications to Mixed Tropical Forests. CAB International, Wallingford. UK. 312 p.
- Washington, S. P., M. G. Karlaftis, and F. L. Mannering. 2011. Statistical and Econometric Methods for Transportation Data Analysis. A Chapman & Hall Book/CRC Taylor & Francis Group. Second Edition. New York, NY, U.S. pp. 106-109.
- Zimmerman, D. L., and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modeling of growth curve data: an overview (with discussion). Test 10(1): 1-73.

CAPÍTULO V

5. MODELACIÓN DINÁMICA DE DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS EN MASAS MEZCLADAS DE *Pinus* EN DURANGO, MÉXICO

5.1. Resumen

(Manuscrito enviado a la revista Madera y Bosques).

La caracterización de las distribuciones diamétricas proporciona información sobre la estructura de un rodal y ayuda en la planeación de los tratamientos silvícolas en masas forestales bajo manejo. En este trabajo se presenta la evaluación de la función Weibull para caracterizar las distribuciones diamétricas en masas mezcladas de especies del género *Pinus*. Para el análisis se usaron 59 parcelas permanentes (900 m²) para el ajuste (900 m²) y 100 parcelas temporales de inventario forestal (1000 m²) para la validación (1000 m²). El método de momentos resultó mejor para estimar los parámetros de la función Weibull (menor error medio absoluto, menor error medio cuadrático y menor número de parcelas rechazadas con la prueba de Kolmogorov-Smirnov) en comparación con los métodos de máxima verosimilitud y percentiles. Los modelos de predicción de los parámetros con variables del rodal permiten caracterizar y proyectar la distribución teórica de clases diamétricas de manera sencilla y precisa. La Kurtosis de la distribución Weibull disminuye con las proyecciones del número de árboles en las categorías diamétricas, la forma de la curva tiende a normalizarse y con una ligera asimetría positiva, mientras que para el área basal la forma de la distribución teórica es más apuntada. La proyección de la distribución Weibull puede ser utilizada para determinar regímenes de manejo forestal o para la regularización de las estructuras diamétricas en las masas incoetáneas estudiadas.

Palabras clave: Distribución diamétrica, función Weibull, recuperación de parámetros, predicción de parámetros, modelo dinámico.

5.2. Abstract

The characterization of the diameter distributions provides information on the structure of a stand and support in the planning of silvicultural treatments in forests with management. We estimated the parameters of location, scale and shape of the Weibull function to characterize the diameter distribution of species mixture of Pinus. The method of moments, maximum likelihood, percentiles and prediction parameters were used to relating the parameters obtained by the method of moments with minimum, mean and quadratic diameter by plot. We used 59 plots for model fitting (900 m²) and 100 temporary forest inventory plots for validation (1000 m²). The method of moments was better to estimate the parameters of the Weibull function as statisticians used to measure the goodness of fit (lower mean absolute error, lower mean square error and fewer rejected plots with Kolmogorov-Smirnov test) compared with maximum likelihood and percentile methods. The prediction models of the parameters with stand variables represents a flexible and simple to characterize and projection the theoretical distribution of diameter classes easily and accurately. The Kurtosis of the Weibull distribution decreases with the projections of the number of trees in diameter classes, the shape of the curve tends to normalize and a slight positive Skewness, while basal area in the form is more theoretical platykurtic distribution. The projection of the Weibull distribution can be used to determine forest management regimes or to regularize diameter structures in uneven-aged stands.

Key Words: Diameter distribution, Weibull function, recovery parameters, parameter prediction, dynamic model.

5.3. Introducción

La modelación y caracterización de las distribuciones diamétricas es de gran importancia en el manejo forestal. El diámetro es una variable muy correlacionada con la altura y el volumen y es concluyente para determinar los

costos de extracción y comercialización de productos forestales. La modelación de las estructuras diamétricas y su relación con la calidad de estación, la composición de especies, la edad y la densidad del rodal es una herramienta muy valiosa para el manejo de bosques (Bailey and Dell, 1973). La relación de las distribuciones diamétricas con la distribución en área basal y volumen permite la planeación y regulación de las estructuras diamétricas (Shiver, 1998; Zhang *et al.*, 2001; Eerikäinen y Maltamo, 2003; Nor-Larsen and Cao, 2006; Gorgoso *et al.*, 2007).

El proceso de modelación de estructuras diamétricas implica la selección de una función de densidad de probabilidades adecuada, el desarrollo de una metodología para la estimación de los parámetros y la validación del modelo seleccionado (Reynold *et al.*, 1988). Bailey and Dell (1973) señalan que la selección de una función de densidad de probabilidad (fdp) debe considerar que la función sea capaz de representar el intervalo completo de formas unimodales y continuas de las distribuciones diamétricas. Así, la fdp debe cubrir las diversas formas de las distribuciones reales con diversos grados de asimetría positiva o negativa. Los parámetros que caracterizan la fdp deben variar de manera coherente con las características del rodal (Shiver, 1988).

Muchas funciones de distribución continuas univariadas han sido usadas para describir las distribuciones diamétricas de áreas forestales. Las más comunes en los últimos años se basan en la distribución Normal (Nanang, 1998), la distribución Weibull (Zhang *et al.*, 2001; Maldonado y Návar, 2002; Gorgoso *et al.*, 2007 Lei, 2008), la distribución gamma (Álvarez y Ruiz, 1997; Podlaski, 2008), la distribución Log-Normal (Nanang, 1998) y la distribución S_B de Jhonson (Kudus *et al.*, 1999; Zhang *et al.*, 2003; Fidalgo *et al.*, 2009).

De las funciones anteriormente mencionadas la función Weibull ha sido aplicada extensivamente en la silvicultura debido a: 1) la habilidad para describir una variedad de distribuciones unimodales incluyendo la forma de j-invertida, la exponencial y la distribución normal de frecuencias, 2) la relativa simplicidad de la estimación de los parámetros y 3) tiene una forma cerrada de

la función de densidad acumulada (Bailey and Dell, 1973; Torres-Rojo *et al.*, 2000; Gorgoso *et al.*, 2007; Lei, 2008;). Por su flexibilidad y sencillez se ha empleado frecuentemente en la modelación y caracterización de las estructuras diamétricas de masas puras y mezcladas.

La función Weibull puede caracterizarse de manera dinámica a partir de la Predicción de sus Parámetros (PPE). Es decir, después de haber estimado los parámetros a , b y c (parámetros de localización escala y forma) con alguno de los métodos diseñados para ello (Torres-Rojo *et al.*, 2000), los parámetros se pueden relacionar con variables del rodal usando modelos lineales (o no lineales). De esta forma al cambiar las variables del rodal, automáticamente cambiarán los parámetros que caracterizan la distribución diamétrica. En general este se considera un método débil para estimar los parámetros de la función Weibull, y sin embargo se han obtenido buenos resultados de ajuste que además permiten obtener directamente los parámetros de las distribuciones futuras proyectadas y facilitan la planeación de los regímenes de cortas intermedias (Reynolds *et al.*, 1988; García *et al.*, 2002).

Otra forma de estimar los parámetros de la función Weibull representa una mezcla entre métodos de estimación de los parámetros y percentiles; como es el método de Recuperación de Parámetros (PRE) que consiste en recobrar los parámetros de la distribución a partir de sus momentos no-centrales y momentos centrales, teniendo como base un conjunto de percentiles los cuales son fáciles de modelar de manera dinámica (Hyink and Moser, 1983). Dada la mayor relación entre momentos y/o percentiles con los atributos del rodal, esta técnica ha brindado buenos ajustes (Borders and Paterson, 1990; Torres-Rojo *et al.*, 2000).

En este estudio la estimación de los parámetros de la función Weibull se realizó mediante los métodos momentos (ME), máxima verosimilitud (MLE) y percentiles (PE). Para modelar de manera dinámica los parámetros de la función Weibull se utilizó el método de predicción de parámetros (PPE)

relacionando variables de la parcela o rodal con los estimadores de los parámetros obtenidos con ME.

5.4. Objetivos

Ilustrar una estrategia de modelación dinámica para las distribuciones diamétricas de masas mezcladas del género *Pinus* vía Predicción de Parámetros (PPE).

5.5. Metodología

5.5.1. Descripción del área de estudio y base de datos

La información para desarrollar el presente estudio se colectó en masas mezcladas de *Pinus* en el Ejido San Diego de Tezains en el Noroeste del estado de Durango, entre las coordenadas extremas; 24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" de Latitud Norte y 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" de Longitud Oeste (Figura 1.1).

La base de datos utilizada fue de 59 parcelas permanentes de investigación silvícola de forma rectangular con 900 m², establecidos en el año 2003 (remedidas en el año 2006, datos usados en el presente estudio) distribuidas aleatoriamente en las áreas forestales del predio. Para modelar los parámetros de la distribución Weibull a las estructuras diamétricas se agruparon las especies de *Pinus arizonica* Engelmännii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht et Cham, *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachyptera* como género *Pinus*. Para la validación de los métodos usados en el ajuste se utilizó una base de datos de 100 parcelas temporales de inventario con forma circular de 1000 m². En el Cuadro 5.1 se presenta la descripción de diámetros, área basal y edad de los datos usados en el ajuste y validación.

Para el ajuste de los modelos de proyección del diámetro normal y la estimación de la edad en función del diámetro normal se utilizó una base de datos de análisis troncales de 222 árboles (1622 pares de datos) agrupados como género *Pinus*.

Cuadro 5.1. Estadísticas descriptivas de las parcelas usadas en el ajuste y validación para estimar los parámetros de la función Weibull.

Variable	Ajuste (n=59)				Validación (n=100)			
	Mínimo	Máximo	Media	SD	Mínimo	Máximo	Media	SD
D_{min}	8.80	20.50	11.03	1.90	10.00	13.00	10.15	0.46
\bar{D}	15.05	39.46	22.08	4.77	13.75	32.58	19.85	3.31
D_{max}	27.90	67.70	42.43	7.94	26.00	89.00	45.07	11.00
D_q	15.77	41.79	23.69	5.14	14.94	38.20	21.47	3.79
AB	0.29	3.68	1.36	0.62	0.84	6.53	1.92	0.78
E_{min}	11.00	44.00	21.47	5.91	23.33	30.97	23.71	1.16
\bar{E}	28.00	70.90	45.90	9.35	33.10	84.74	49.28	8.97
E_{max}	43.00	167.00	82.32	21.38	65.46	247.11	118.83	31.42

D_{min} : diámetro mínimo (cm); \bar{D} : diámetro medio (cm); D_{max} : diámetro máximo (cm); D_q : diámetro cuadrático (cm); AB : área basal (m²); E_{min} : edad mínima (años); \bar{E} : edad media; E_{max} : edad máxima y SD: es la desviación estándar (cm).

5.5.2. Función de distribución Weibull

La función de densidad de probabilidad (fdp) Weibull derivada por Weibull (1939) en estudios de resistencia de materiales y por su flexibilidad y fácil integración ha sido ampliamente utilizada en la modelación de las estructuras diamétricas en bosques naturales y plantaciones por diferentes investigadores (Bailey y Dell, 1973; Nanang, 1998; Torres-Rojo *et al.*, 2000; Eerikäinen and Maltamo, 2003; Nord-Larsen y Cao, 2006; Gorgoso *et al.*, 2007). La expresión de la fdp Weibull (Weibull and Sweden, 1951; Tsu *et al.*, 1952; Bailey and Dell, 1973; Lei, 2008), es la expresión siguiente.

$$F(D) = \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{D-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{D-a}{b}\right)^c} \quad (5.1)$$

con $a \leq D < \infty$, $a \geq 0$, $b > 0$ y $c > 0$. Donde D es el diámetro normal (variable aleatoria), a, b y c son los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull, respectivamente.

Si $c < 1$ la curva de la función Weibull es de la forma j-invertida, si $c = 1$ coincide con la función exponencial, si $1 < c < 3.6$ la curva presenta asimetría positiva, si $c = 3.6$ la curva se aproxima a la distribución normal, si $c > 3.6$ presenta asimetría negativa, si $c \leq 1$ la función Weibull es común en masas irregulares de especies tolerantes (Bailey and Dell, 1973).

Con la integración de la fdp por el método de sustitución o cambio de variable se obtiene la función de distribución acumulada Weibull (fda) (Weibull and Sweden, 1951; Tsu *et al.*, 1952) y evaluada de 0 a ∞ ($D = \infty$ la fda acumula el total de la distribución), se obtiene la expresión dada por 5.2.

$$F(D) \int_0^{\infty} \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{D-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{D-a}{b}\right)^c} d_D = 1 - e^{-\left(\frac{D-a}{b}\right)^c} \quad (5.2)$$

$$F(L_I \leq D \leq L_S) \int_{L_I}^{L_S} \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{D-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{D-a}{b}\right)^c} d_D = e^{-\left(\frac{L_I-a}{b}\right)^c} - e^{-\left(\frac{L_S-a}{b}\right)^c} \quad (5.3)$$

donde $F(D)$ es la frecuencia relativa acumulada de árboles con un diámetro menor o igual a D , L_I y L_S son los límites inferior y superior de la clase o rango de diámetro donde se desea conocer el número de árboles.

Así para la obtención del número de árboles acumulados por clase diámetrica se debe multiplicar el resultado de la fdp por la densidad de la parcela o rodal y por el tamaño de la clase diámetrica o multiplicando el número de árboles por la fda evaluada entre los límites inferior y superior de la categoría diamétrica en la que se quiere conocer el número de árboles.

5.5.3. Estimación de los parámetros de la distribución Weibull

Para la estimación de los parámetros de la función Weibull se utilizaron 3 procedimientos, el método de momentos (ME), máxima verosimilitud (MLE) y método de percentiles (PE).

El parámetro de localización (a) para ME, MLE y PE fue estimado con el método propuesto por Zanakakis (1979). Este método usa los diámetros mínimos y el diámetro máximo (Bailey and Dell, 1973; Zarnoch y Dell, 1985; Shiver, 1988; Nanang, 1998), donde la expresión es dada en 5.4.

$$a = \begin{cases} \frac{D_1 D_M - D_2^2}{D_1 + D_M - 2D_2} & \text{si } (D_2 - D_1) < (D_M - D_2) \\ D_1 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (5.4)$$

donde D_1 , D_2 son los diámetros menores de la parcela (cm) y D_M es el diámetro máximo de la parcela (cm).

5.5.3.1. Método de momentos (ME)

Este método relaciona los parámetros de escala y forma de la función Weibull con el primero y segundo momento de la distribución diamétrica; diámetro medio y varianza respectivamente (Shiver, 1988; Nanang, 1998; Cao, 2004; Gorgoso *et al.*, 2007). Las expresiones para estimar los parámetros bajo este método fueron 5.5 y 5.6.

$$b = \frac{\bar{D}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)} \quad (5.5)$$

$$\sigma^2 = \frac{\bar{D}^2}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right)} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right) \right] \quad (5.6)$$

donde \bar{D} es el diámetro medio de la distribución, σ^2 la varianza y $\Gamma(i)$ es la función Gamma para cada punto ($D = i$), dada por $\Gamma(i) \int_0^\infty D^{i-1} e^{-D} d_D$.

5.5.3.2. Método de máxima verosimilitud (MLE)

Este método se basa en obtener una estimación de los parámetros de la función Weibull maximizando la probabilidad de obtener una muestra de dicha distribución teórica que coincida con la distribución observada (Bailey and Dell; 1973; Álvarez y Ruiz, 1998; Nanang, 1998; Gorgoso *et al.*, 2007). Para estimar los parámetros de escala y forma para cada parcela, de las ecuaciones 5.7 y 5.8, se utilizó el procedimiento LIFEREG en SAS/STAT™ (SAS Institute Inc., 2011).

$$c = \left[\frac{\sum_{i=1}^n D_i^c \ln D_i}{\sum_{i=1}^n D_i^c} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln D_i \right]^{-1} \quad (5.7)$$

$$b = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i^c \right]^{\frac{1}{c}} \quad (5.8)$$

donde n es igual al número de observaciones de la muestra en una distribución Weibull y D_i es el diámetro de cada árbol.

5.5.3.3. Método de percentiles (PE)

Este método usa los percentiles para estimar los parámetros de la distribución Weibull (Bailey and Dell, 1973; Zanaski, 1979; Shiver, 1988; Nanang, 1998; Gorgoso *et al.*, 2007). Los parámetros de escala y forma fueron estimados con 5.9 y 5.10.

$$b = P_{63} - a \quad (5.9)$$

$$c = \frac{\ln \left[\frac{\ln(1-r)}{\ln(1-t)} \right]}{\ln \left(\frac{P_r - a}{P_t - a} \right)} \quad (5.10)$$

donde P_r y P_t son los percentiles de orden $100r$ y $100t$ de la distribución diámetrica, con $r = 0.97366$ y $t = 0.16731$, \ln es el logaritmo natural.

5.5.3.4. Modelos de predicción de parámetros (PPE)

Los parámetros estimados por ME fueron los más precisos de acuerdo a los estadísticos usados y fueron relacionados con variables de la parcela, como el diámetro mínimo, diámetro medio, diámetro máximo, diámetro cuadrático, área basal, entre otras variables. Los mejores ajustes se obtuvieron con el diámetro mínimo, el diámetro medio y el diámetro cuadrático (proceso STEPWISE en regresión lineal) y los estadísticos de ajuste fueron redefinidos en el ajuste de los modelos sin intercepto, así los parámetros de la función Weibull fueron estimados con las expresiones siguientes:

$$a = \beta_1 D_{min} \quad (5.E1)$$

$$b = \beta_1 \bar{D} + \beta_2 D_{min} + \beta_3 D_q \quad (5.E2)$$

$$c = \beta_1 \bar{D} + \beta_2 D_q + \frac{\beta_3}{\bar{D}} + \frac{\beta_4}{D_{min}} \quad (5.E3)$$

donde β_i es el parámetro de regresión ($i = 1, 2, 3, 4$).

5.5.4. Modelos de proyección de variables del rodal

Para la proyección de los diámetros mínimo, medio y cuadrático se utilizó la ecuación ADA (Algebraic Difference Algebraic Approach, por sus siglas en inglés) anamórfica basado en el modelo de Chapman Richards (Amaro, 1998), para el diámetro normal se utilizó la ecuación ADA anamórfica basado en el modelo de Korf. Para predecir la edad de los árboles en función del diámetro normal para la fase de validación se utilizó un modelo de potencia. Las expresiones usadas fueron las siguientes.

$$D_{min2} = D_{min1} \left(\frac{1 - e^{\beta_2 E_{min2}}}{1 - e^{\beta_2 E_{min1}}} \right)^{\beta_3} \quad (5.E4)$$

$$\bar{D}_2 = \bar{D}_1 \left(\frac{1 - e^{\beta_2 \bar{E}_2}}{1 - e^{\beta_2 \bar{E}_1}} \right)^{\beta_3} \quad (5.E5)$$

$$D_{q2} = D_{q1} \left(\frac{1 - e^{\beta_2 \bar{E}_2}}{1 - e^{\beta_2 \bar{E}_1}} \right)^{\beta_3} \quad (5.E6)$$

$$D_2 = D_1 e^{[-\beta_2 (E_2^{-\beta_3} - E_1^{-\beta_3})]} \quad (5.E7)$$

$$E = \beta_1 D^{\beta_2} \quad (5.E8)$$

donde D , D_{min} y \bar{D} son el diámetro normal, mínimo y medio, E , E_{min} y \bar{E} son la edad observada, mínima y media, D_q es el diámetro cuadrático, β_i son los parámetros de los modelos y e es la función exponencial.

En el Anexo 7.6.4 se presenta el código SAS para la recuperación de los parámetros de la función Weibull por ME.

5.5.5. Estadísticos para medir el ajuste

La bondad de ajuste de los métodos estudiados para estimar los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull fue evaluada con el sesgo promedio (Bias), error medio absoluto (MAE) y el cuadrado medio del error (MSE). Para los modelos de proyección y estimación de la edad se usó el coeficiente de determinación ajustado (R_a^2) y la raíz del error medio cuadrático (RMSE), los estadísticos son dados por las expresiones siguientes.

$$Bias = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad (5.11)$$

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n} \quad (5.12)$$

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad (5.13)$$

$$R_a^2 = 1 - \left[\frac{(n-1) \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-p) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right] \quad (5.14)$$

$$RMSE = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

donde y_i es el número de árboles observado por categoría diamétrica, \hat{y}_i es el número de árboles predicho por categoría, \bar{y} es la media por categoría diamétrica, n es el número de categorías diamétricas y p es el número de parámetros.

Para verificar la hipótesis de que las distribuciones diamétricas de las parcelas siguen una distribución Weibull, se utilizó el estadístico de Kolmogorov-Smirnov (K-S) que compara las frecuencias acumuladas teóricas con las observadas.

$$D_n = \text{Max} |F_n(D_i) - F(D_i)| \quad (5.16)$$

donde D_n es el valor del estadístico K-S, $F_n(D_i)$ es la distribución de la frecuencia acumulada observada para la parcela i y $F(D_i)$ es la probabilidad de la frecuencia acumulada teórica para la parcela i , se usó un nivel de significancia $\alpha = 20\%$.

También se usó el índice de error (EI) ponderado por el área basal (AB) de las categorías diamétricas por parcela (Reynolds *et al.*, 1988; Cao, 2012).

$$EI = \frac{\sum_i \sum_j |AB_{ij} (n_{ij} - \hat{n}_{ij})|}{n} \quad (5.17)$$

donde n_{ij} , y \hat{n}_{ij} son el número de árboles observado y predicho en las clases diamétricas j para la parcela i , AB_{ij} es el área basal de la clase diámetro j para la parcela i y n es el número de parcelas.

5.6. Resultados

En el Cuadro 5.2 se presentan las estadísticas descriptivas de los parámetros estimados de la función Weibull por ME, MLE, PE y PPE; tanto para el ajuste como para la validación. El parámetro de localización con ME, MLE y PE resultó igual, ya que se usa el mismo estimador (Zanakis, 1976).

Cuadro 5.2. Estadísticas descriptivas de los parámetros estimados de la función Weibull por los métodos analizados.

Método	Parámetro	Ajuste				Validación			
		Mínimo	Máximo	Media	SD	Mínimo	Máximo	Media	SD
ME	<i>a</i>	8.64	20.44	10.97	1.85	9.47	12.97	10.13	0.47
MLE	<i>a</i>	8.64	20.44	10.97	1.85	9.47	12.97	10.13	0.47
PE	<i>a</i>	8.64	20.44	10.97	1.85	9.47	12.97	10.13	0.47
ME	<i>b</i>	5.59	29.15	11.92	4.52	2.78	23.78	10.21	3.81
MLE	<i>b</i>	4.94	28.64	11.34	4.43	4.94	26.36	11.27	3.64
PE	<i>b</i>	4.10	31.93	12.71	5.50	3.00	25.21	10.29	4.00
ME	<i>c</i>	0.75	2.13	1.32	0.30	0.66	2.63	1.25	0.35
MLE	<i>c</i>	0.45	2.00	1.13	0.33	0.87	2.43	1.39	0.30
PE	<i>c</i>	0.60	2.48	1.23	0.39	0.77	3.05	1.26	0.41

Par: parámetro de la función Weibull; SD: desviación estándar; ME: método de momentos; MLE: método de máxima verosimilitud y PE: método de percentiles.

En el Cuadro 5.3 se presentan los estadísticos de ajuste de los métodos usados para estimar los parámetros de la función Weibull, se puede apreciar el número parcelas que siguen una distribución Weibull y las rechazadas entre paréntesis con nivel de significancia de $\alpha = 20\%$ con el estadístico de Kolmogorov-Smirnov (K-S).

Cuadro 5.3. Estadísticos de ajuste y validación de los métodos de estimación de los parámetros de la función Weibull.

Método	Ajuste (n=1970)					Validación (n=5187)				
	Bias	MAE	MSE	EI	K-S	Bias	MAE	MSE	EI	K-S
ME	0.015	0.039	0.003	0.168	59-(0)	0.011	0.038	0.002	0.350	98-(2)
MLE	-0.002	0.041	0.003	0.159	57-(2)	0.050	0.062	0.006	0.347	83-(17)
PE	0.023	0.044	0.004	0.169	59-(0)	0.029	0.061	0.016	0.349	94-(6)
PPE	0.015	0.040	0.003	0.166	59-(0)	0.006	0.040	0.003	0.336	95(5)

ME: método de momentos; MLE: método de máxima verosimilitud; PE: método de percentiles; PPE: método de predicción de parámetros; Bias: sesgo promedio; MAE: error medio absoluto; MSE: cuadrado medio del error; EI: índice de error y K-S: estadístico de Kolmogorov-Smirnov.

La estimación vía ME es la que reporta un menor número absoluto de parcelas rechazadas tanto en las de referencia como en la muestra de validación (2). MLE pareciera el menos eficiente sobre todo en la validación con 19 rechazos en total mientras que PE tiene un total de 6.

Con estos resultados, se decide utilizar los parámetros estimados vía ME para ajustar los modelos de predicción de parámetros, los estadísticos de ajuste también se pueden observar en el Cuadro 5.3.

5.6.1. Estimaciones de PPE y variables dinámicas del rodal

En el Cuadro 5.4 se presentan los parámetros estimados, sus errores estándar, la raíz del error medio cuadrático (*RMSE*) y el coeficiente de determinación ajustado (R_a^2) de los modelos utilizados para estimar los parámetros de localización escala y forma de la función Weibull por PPE, se presentan los estadísticos para los modelos de proyección de las variables de la parcela (diámetro normal, diámetro mínimo, diámetro medio y diámetro cuadrático) y para el modelo que estima la edad. En todos los casos los parámetros estimados fueron altamente significativos (valor de rechazo <1%).

Cuadro 5.4. Parámetros estimados y estadísticos de ajuste de los modelos de predicción de parámetros y proyección de variables de rodal.

Ecuación	n	Parámetros								RMSE	R_a^2
		β_1	β_1e	β_2	β_2e	β_3	β_3e	β_4	β_4e		
5.E1	59	0.994	0.002	-	-	-	-	-	-	0.21	0.99
5.E2	59	2.234	0.054	-1.362	0.018	-0.944	0.047	-	-	0.22	0.99
5.E3	59	0.460	0.021	-0.403	0.021	-16.678	2.285	16.01	1.50	0.09	0.90
5.E4	59	-	-	0.054	0.021	0.264	0.050	-	-	0.37	0.96
5.E5	59	-	-	-0.008	0.001	0.842	0.028	-	-	0.08	0.99
5.E6	59	-	-	-0.011	0.002	0.820	0.046	-	-	0.15	0.99
5.E7	1622	-	-	13.060	1.476	0.087	0.015	-	-	1.56	0.98
5.E8	1622	2.624	0.148	1.022	0.017	-	-	-	-	7.20	0.95

n: número de observaciones; β_i : estimador del parámetro; β_ie : error estándar del parámetro correspondiente; RMSE: raíz del error medio cuadrático; R_a^2 : coeficiente de determinación ajustado.

En los Cuadros 7.19 y 7.20 se muestran los parámetros estimados de la función Weibull para el ajuste y validación.

Las 59 parcelas de referencia tanto para MLE y PE tienden a sobreestimar las frecuencias de árboles en las categorías de diámetro mayores a 30 cm (a1 y a2) (Fig. 5.1). En la validación PE sobreestima por debajo de la categoría de diámetro de 55 cm, mientras ME y PPE son los métodos que mejor predicen las frecuencias de número de árboles (b1 y b2).

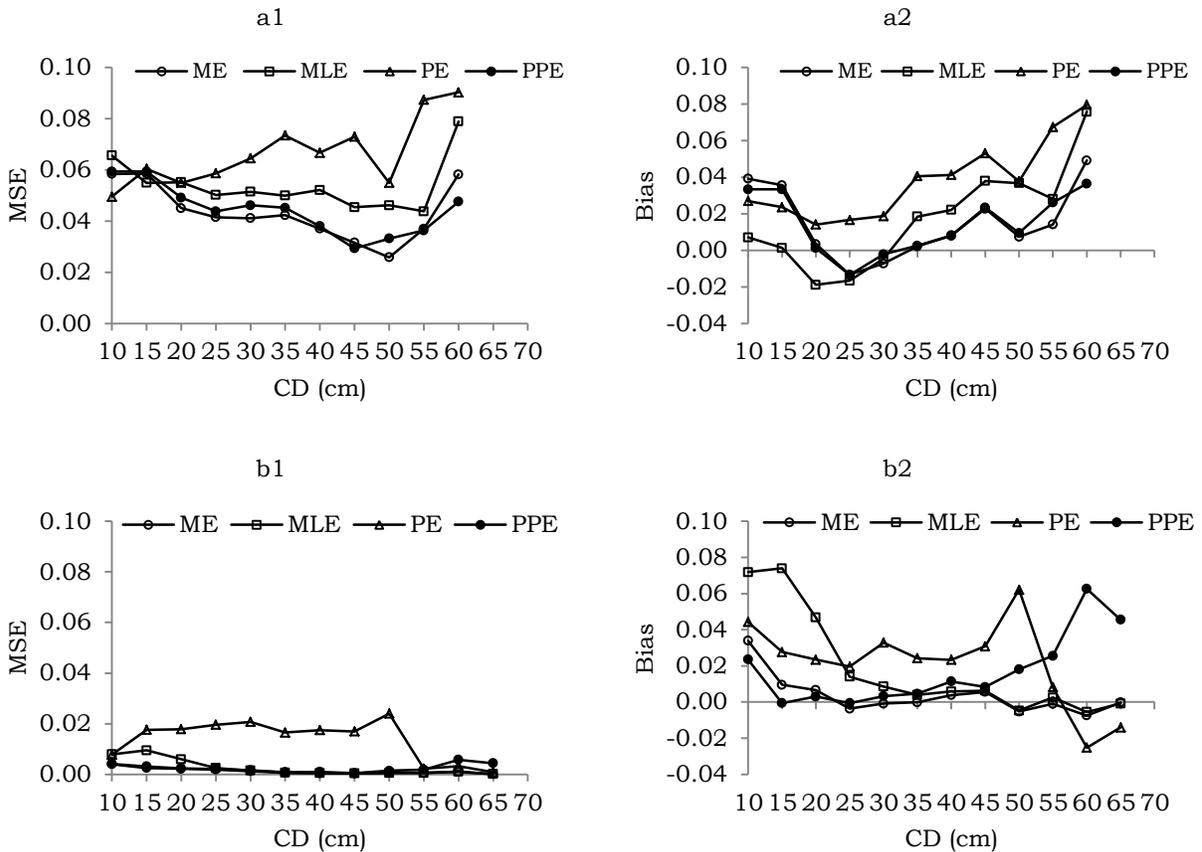


Figura 5.1. Sesgo promedio (Bias) en frecuencia relativa acumulada de número de árboles por categoría diamétrica en el ajuste (a1) y validación (b1) y el Error Medio Cuadrático (MSE) por categoría diamétrica en el ajuste (a2) y validación (b2).

En la figura 5.2 se presentan la distribución observada y estimada por ME, MLE, PE y PPE (asimetría positiva) para una parcela muestra con 10.8 cm, 22.50 cm y 44.30 cm de diámetros mínimo, medio y máximo respectivamente y con edad media de 52 años. También se presentan las proyecciones de la distribución de diámetro y área basal de la función Weibull con PPE en intervalos de 5, 10 y 15 años, proyectados con los modelos dinámicos de variables de rodal. Se aprecia como disminuye la kurtosis en la forma de la

distribución Weibull a medida que los árboles cambian de categoría diamétrica. En la distribución teórica del área basal la Kurtosis es más apuntada conforme aumenta la edad.

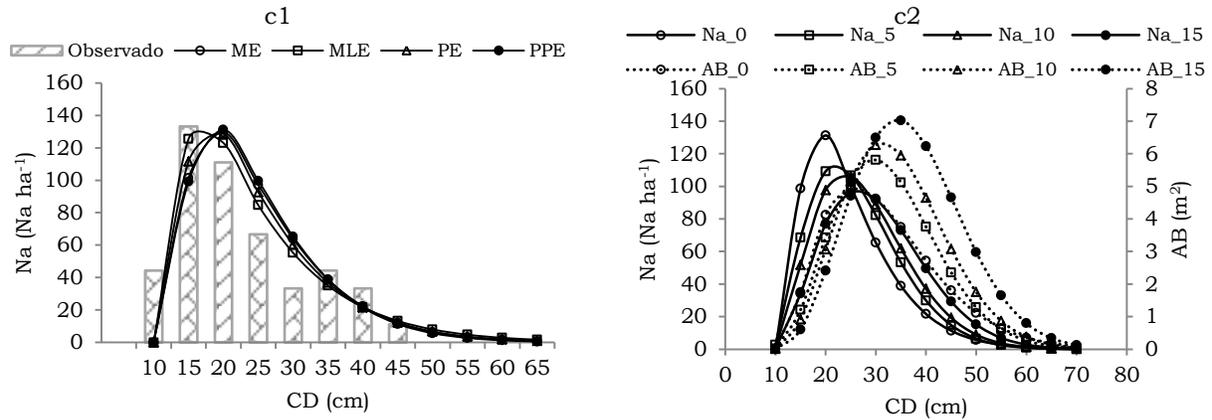


Figura 5.2. Gráfica de distribuciones diamétricas por los métodos usados para la estimación de los parámetros de la función Weibull (c1) y proyección de la distribución de diámetros y área basal a 5, 10 y 15 años con PPE (c2).

5.7. Discusión y conclusiones

La estimación de los parámetros por los métodos usados presenta simplicidad y resultados deseables de acuerdo a los estadísticos de ajuste. El 10% y 20% de las parcelas en el proceso de ajuste y validación respectivamente, sugieren un manejo de tipo incoetáneo, de acuerdo al parámetro de forma (Bailey and Dell, 1973) con una asimetría positiva. Sin embargo, la mayoría de los parámetros estimados de escala y forma sugieren asimetría positiva en la mayoría de las parcelas, con menos árboles en las categorías diamétricas de más de 40 cm. Este mismo patrón fue encontrado por Nord-Larsen and Cao, (2006) en bosques coetáneos de Dinamarca.

Tanto en el ajuste como en la validación el método de PPE resultó casi equivalente a ME para estimar los parámetros de la función Weibull de acuerdo a la prueba K-S. Esta razón justifica la elección para modelar los parámetros con variables de la parcela (diámetro mínimo, diámetro medio y diámetro cuadrático). En este caso no se usaron modelos no lineales pero no se descarta su uso pues estos han producido resultados satisfactorios como los reportados

por Gorgoso *et al.* (2007) en su estudio para *Betula alba* L. Sin embargo, los estadísticos de ajuste de los modelos que predicen los parámetros de la función Weibull (PPE) fueron superiores a los reportados por Nanang (1998), con valores del coeficiente de determinación de 0.91, 0.71 y 0.83 para los parámetros de localización, escala y forma respectivamente.

Nuestros resultados son muy similares a los reportados por Torres-Rojo *et al.* (2000) en la metodología que plantea para estimar los parámetros de la función Weibull. Para el parámetro de escala usando al diámetro medio, diámetro cuadrático y diámetro mínimo se logró un ajuste con 90% de explicación de la varianza, considerando que este parámetro se ha estimado con poca precisión con valores por abajo del 60% en otros estudios (Reynolds *et al.*, 1985; García *et al.*, 2002; Gorgoso *et al.*, 2007).

El método de MLE fue el menos sesgado, mientras que PE fue el más sesgado y con la mayor variabilidad en el ajuste, resultados similares a los encontrados por Shiver (1988). Para la validación PPE es el menos sesgado y ME y PPE fueron los que menor variabilidad presentan de acuerdo al MSE. La estimación de los parámetros por PPE con variables de la parcela en el proceso de validación fue muy similar a los estimados por ME, el método PPE fue mejor que MLE y PE de acuerdo a los estadísticos usados (Bias, MAE, MSE, EI y K-S). El índice promedio de error (EI) ponderado por el área basal de las categorías diamétricas de cada parcela muestra que en el proceso de validación PPE es mejor que los demás métodos analizados, lo que demuestra la capacidad de estimación de los parámetros por predicción de parámetros.

La estimación de los parámetros por PPE a través de relaciones lineales con variables del rodal permiten obtener estimaciones eficientes de los valores de la función Weibull, además los parámetros pueden ser proyectados con ecuaciones dinámicas de las variables predictoras (Nanang, 1998; Lei, 2008).

Los resultados de este estudio permiten diferenciar que la estimación de los parámetros de la función Weibull por ME fue mejor que la estimación por

MLE (Nanang, 1998), contrastando lo señalado por Shifley and Lentz (1985) que consideran mejor a MLE por precisión y mínima varianza en los estadísticos de ajuste. El método PE resultó inferior que ME, PPE y MLE, situación similar a la encontrada por Zarnoch and Dell (1985) y Nanang, (1998). Lei (2008) también encontró que la estimación por ME fue mejor que MLE y la obtenida por mínimos cuadrados ordinarios para *Pinus tabulaeformis* basado en el menor MSE. Vallejos-Barra *et al.* (2009) encontraron que el mejor método de estimación de los parámetros fue PE para *Pinus taeda*, mientras que, Liu *et al.* (2004) reportan para *Picea mariana* que el método PE presenta ventajas contra ME y PPE en términos de error, los resultados del estudio muestran que la función Weibull puede ser usada para modelar las distribuciones diamétricas de las masas incoetáneas con mezcla de especies.

La predicción de parámetros (PPE) usando características de rodal como variables predictoras de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull, representa una opción práctica, flexible y eficiente para modelar las estructuras diamétricas de las áreas estudiadas, la implementación es sencilla ya que las relaciones lineales de los parámetros consideran variables que comúnmente se miden o calculan en los inventarios forestales y en la ejecución de los programas de manejo forestal (Erikäinen and Maltamo, 2003).

La recuperación de los parámetros de la función Weibull vía ME resultó ser el método más eficiente y sugiere que las estructuras diamétricas de las masas mezcladas en términos generales tienen un comportamiento unimodal. El sistema construido es intrínsecamente incoetáneo pues se asume que a cada árbol se le puede estimar su edad a partir del diámetro. Esto es relevante ya que la filosofía de la función Weibull está centrada en la estimación de distribuciones diamétricas en masas coetáneas. Para el presente estudio la función Weibull se adapta a las distribuciones de diámetros de las masas forestales bajo manejo irregular y que en pocos casos sigue una tendencia de *j* invertida, aunque en la proyección de las categorías diamétricas no se

considera el reclutamiento ni la mortalidad, las formas de las curvas ejemplifican el cambio de las categorías diamétricas.

Con las ecuaciones dinámicas en forma ADA se pueden proyectar las variables de rodal (variables predictoras de los parámetros de la función Weibull) y la estimación de los parámetros para caracterizar las estructuras de diámetro y área basal futuras de forma dinámica. La consideración de funciones de distribución bimodales para modelar las estructuras diamétricas de masas mezcladas de *Pinus* y el uso de ecuaciones dinámicas en diferencia algebraica generalizada (GADA) para la proyección representa una opción muy interesante para trabajos futuros.

5.8. Reconocimientos

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Beca No. 247171) y al Postgrado en Ciencias Forestales del Colegio de Postgraduados para la realización de los estudios doctorales, así mismo se agradece al Ejido San Diego de Tezains, Durango. México, por la disponibilidad para el uso de la información.

5.9. Literatura citada

- Álvarez, J. G. y A. D. Ruiz. 1998. Análisis y modelización de las distribuciones diamétricas de *Pinus pinaster* Ait. En Galicia. Invest. Agrar.: Sist. Recur. For. 7(1 y 2): 123-137.
- Amaro, A., D. Reed, M. Tome and I. Themido. 1998. Modeling dominant height growth: *Eucalyptus* plantations in Portugal. For. Sci. 44(1): 37-46.
- Bailey, R. L. and T. R. Dell. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. For. Sci. 19(2): 97-104.
- Borders, B. E. and W. D. Patterson. 1990. Projecting stands tables: A comparison of the Weibull diameter distribution method, a Percentile-Based projection method, and a basal area growth projection method. For. Sci. 36(2): 413-424.

- Cao, Q. V. 2004. Predicting parameters of Weibull function for modeling diameter distribution. *For. Sci.* 50(5): 682-685.
- Cao, Q. V. 2012. Use of the Weibull function to predict future diameter distributions from current plot data. In: Butnor, J. R. ed. 2012. Proceedings of the 16th biennial southern silvicultural research conference. e-Gen. Tech. Rep. SRS-156. Asheville, NC: U.S. Department of Agriculture Forest Service, Southern Research Station. 53-58.
- Eerikäinen, K. and M. Maltamo. 2003. A percentile based basal area diameter distribution model for predicting the stand development of *Pinus kesiya* plantations in Zambia and Zimbabwe. *For. Ecol. Manage.* 172(1): 109-124.
- Fidalgo, T., C. Pacheco and B. R. Parresol. 2009. Describing maritime pine diameter distribution with Johnson's SB distribution using a new all-parameter recovery approach. *For. Sci.* 55(4): 367-373.
- García, C., N. Cañadas y G. Montero. 2002. Modelización de la distribución diamétrica de las masas de *Pinus pinea* L. de Valladolid (España) mediante la function Weibull. *Invest. Agrar.: Sist. Recur. For.* 11(2): 263-282.
- Gorgoso, J. J., J. G. Álvarez, A. Rojo and J. A. Garandas-Arias. 2007. Modeling diameter distributions of *Betula alba* L. stands in northwest Spain with the two-parameter Weibull function. *Invest. Agrar.: Sist. Recur. For.* 16(2): 113-123.
- Hyink, D. M. and J. W. Moser. 1983. A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions. *For. Sci.* 29(1): 85-95.
- Kudus, K. A., M. I. Ahmad and J. Lopongan. 1999. Nonlinear regression approach to estimating Johnson SB parameters for diameter data. *Can. J. For. Res.* 29(3): 310-314.

- Lei, Y. 2008. Evaluation of three methods for estimating the Weibull distribution parameters of Chinese pine (*Pinus tabulaeformis*). *J. For. Sci.* 54(12): 566-571.
- Liu, Ch., S. Y. Zhang, Y. Lei, P. F. Newton and L. Zhang. 2004. Evaluation of three methods for predicting diameter distributions of black spruce (*Picea mariana*) plantations in central Canada. *Can. J. For. Res.* 34(12): 2424-2432.
- Maldonado, D. y J. Návar. 2002. Ajuste y predicción de la distribución Weibull a las estructuras diamétricas De plantaciones de pino de Durango, México. *Madera y Bosques.* 8(1): 61-72.
- Nanang, D. M. 1998. Suitability of the Normal, Log-normal and Weibull distributions for fitting diameter distributions of neem plantations in Northern Ghana. *For. Ecol. Manage.* 103(1): 1-7.
- Nord-Larsen, T. and Q. V. Cao. 2006. A diameter distribution model for even-aged beech in Denmark. *For. Ecol. Manage.* 231(1-3): 218-225.
- Reynolds, M. R., T. E. Burk y W. Huang. 1988. Goodness-of-fit test and model selection procedures for diameter distribution models. *For. Sci.* 34(2): 373-399.
- SAS Institute Inc., 2011. SAS/ETS® 9.3 User's Guide. Cary, NC:, SAS Institute Inc.
- Shifley, S. and Lentz E. 1985. Quick estimation of the three parameters Weibull to describe tree size distributions. *For. Ecol. Manage.* 13(3-4): 195-203.
- Shiver, B. D. 1988. Sample sizes and estimation methods for the Weibull distribution for unthinned Slash Pine plantation diameter distributions. *For. Sci.* 34(3): 809-814.

- Torres-Rojo, J. M., O. S. Magaña-Torres, y M. Acosta-Mireles. 2000. Metodología para mejorar la predicción de parámetros de la distribuciones diamétricas (Ensayo). *Agrociencia*. 34(5): 627-637.
- Tsu, T. C., R. A. Mugele and F. A. McClintock. 1952. A discussion of “A statistical distribution function of wide applicability” by W. Weibull and S. Sweden. *J. Appl. Mech.* 19: 233-234.
- Vallejos-Barra, O. S., D. Aedo-Ortiz, P. N. Izquierdo-Ossandon, y M. Vazquez-Sandoval. 2009. Evaluación de procedimientos de ajuste óptimo de todos los parámetros de Weibull 3P para modelar la estructura horizontal en plantaciones de *Pinus taeda*. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*. 15(2): 101-108.
- Weibull, W. 1939. The phenomenon of rupture in solids. *Proc. Royal Swedish Institute of Engineering Research (Ingeniorvetenskaps Akademiens Handlingar)* 153: 1-55
- Weibull, W. and S. Sweden. 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *J. Appl. Mech.* 73: 293-297.
- Zanakis, S. H. 1979. A simulation study of some simple estimators for the three-parameters Weibull distribution. *J. Stat. Comput. Simulation* 9(2): 101-116.
- Zhang, L., J. H. Gove, Ch. Liu y W. B. Leak. 2001. A finite of two Weibull distributions for modeling the diameter distributions of rotated-sigmoid, uneven-aged stands. *Can. J. For. Res.* 31(9): 1654-1659.
- Zhang, L., K. C. Packard and Ch. Liu. 2003. A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Jhonson’s SB distributions to mixed spruce-fir stands in northeastern North America. *Can. J. For. Res.* 33(7): 1340-1347.
- Zarnoch, S. J. and T. R. Dell. 1985. An evaluation of percentile and maximum likelihood estimator of Weibull parameter. *For. Sci.* 31(1): 260-268.

CAPÍTULO VI

6. IMPLEMENTACIÓN Y CONCLUSIONES GENERALES

Para las conclusiones generales se buscó implementar de manera directa los resultados obtenidos en los capítulos previos a una base de datos de 14,569 sitios de muestreo (3,961, 8,350 y 2,258 de 0.05 ha, 0.10 ha y 0.15 ha, respectivamente). La muestra está distribuida con un diseño estratificado con arreglo completamente aleatorizado en 4,123 unidades de manejo (UM), con superficie total (ST) de 28,981.22 ha y superficie aprovechable (SA) de 25,688.19 ha. En el Cuadro 7.22 se presentan el resumen de la base de datos agrupada por tamaño de sitio. En el Anexo 7.1 y 7.2 se presenta la descripción de las variables usadas en la implementación de los resultados, así como los estimadores de muestreo.

Para la implementación de los componentes del SCRM, referidos en los capítulos previos, a nivel género *Pinus* y por especie, se clasificó cada unidad de manejo (UM) por Índice de sitio (IS). Se usó una clasificación de bajo, medio, alto y muy alto (10-15, 20-25, 30-35 y 40-45, respectivamente) a una edad de referencia de 60 años. Se obtuvieron las razones de volumen y área basal (V_{ta}/AB , V_t/AB , V_{cdm}/AB , V_p/AB y V_r/AB), así como el Incremento Corriente Anual (ICA) por IS y estimador de Razón de Medias (RM) y Media de Razón (MR) bajo Muestreo Estratificado. Se generaron factores de expansión de volumen (F_v) por categoría de diámetro (CD) a nivel especie, lo que adiciona el volumen de ramas a la ecuación de volumen comercial del sistema de ahusamiento y volumen.

Los parámetros de localización, escala y forma de la función de densidad de probabilidad (fdp) obtenidos por Predicción de Parámetros (PPE), se reportan en términos de estadísticas descriptivas por clase de IS, que caracterizan a las distribuciones diamétricas de cada UM.

6.1. Implementación del sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial en el inventario operativo

Para poder obtener datos como requiere la NOM-152-SEMARNAT-2006 sobre los lineamientos, criterios y especificaciones de los contenidos de los Programas de Manejo Forestal (PMF), es necesario contar con modelos de volumen total árbol (Vta) por especie, por ello se ajustó el modelo de volumen para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus ayacahuite* y de forma global para las cinco especies. El modelo se ajustó el modelo desarrollado por Schumacher y Hall, (1933) usando variables indicadoras para cada especie y se encontró que no existen diferencias en los parámetros, por lo que el modelo global (todas las especies) describe estadísticamente el Vta de las especies estudiadas (Cuadro 7.4).

En el Cuadro 7.5 se presentan los factores de expansión de volumen (Fv) por especie y categoría diamétrica, lo que añade el volumen de ramas (Vr) al volumen de fuste (Vt) para convertirlo a volumen total árbol (Vta). Con el uso de la información generada para cada árbol, sitio y unidad de manejo (Na, AB, Vta, Vf, Vc, Vcdm, Vp y Vr) y con la aplicación de los estimadores de muestreo (RM y MR), para sitios de tamaño distintos, en el Cuadro 7.6 se muestran los estimadores de RM bajo muestreo estratificado de forma global para todas las especies y diferenciando entre especies en el Cuadro 7.7. Los estimadores de MR bajo muestreo estratificado se muestran en el Cuadro 7.8 para todas las especies y diferenciando entre especies en el Cuadro 7.9.

En el Cuadro 7.10 se muestran las razones generales promedio por IS de (englobando a todas las especies) de volumen/área basal (V/AB) para Vta, Vf, Vc, Vcdm, Vp y Vr, con las estimaciones vía RM. En el Cuadro 7.11 se presentan a nivel especie. Para el estimador de MR en muestreo estratificado se presenta en los Cuadros 7.12 y 7.13.

Los resultados de existencias volumétricas encontradas a nivel UM con la implementación de los componentes de volumen, usando los estimadores de

RM y MR son muy similares a los reportados en el Programa de Manejo Forestal (PMF), aunque en la metodología de cálculo del PMF que describe el uso de estimadores de Muestreo Aleatorio Estratificado (MAE), se infiere que se usaron estimadores de media de razón para expresar el volumen en términos de hectárea en los diferentes tamaños de sitio (0.05 ha, 0.10 ha y 0.15 ha) para inferir el inventario a nivel predial y por UM.

El uso del sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial, representa ventajas importantes en comparación con los modelos convencionales de volumen reportados en el PMF. Si bien de acuerdo con la NOM-152-SEMARNAT-2006, los reportes son para Volumen total árbol (Vta), incluyendo fuste puntas y ramas, el uso del sistemas compatible desarrollado tiene la capacidad de determinar volúmenes comerciales a diámetro de punta deseado, y considerando los factores de expansión de volumen (Fv) le confiere la capacidad para la predicción y clasificación de volúmenes por tipo de producto.

6.2. Implementación de los modelos de crecimiento en diámetro normal en el inventario operativo

Para la implementación de las ecuaciones dinámicas de crecimiento en diámetro normal, se simuló el crecimiento en diámetro en periodos de 1 año con amplitud de 10 años, para las especies no consideradas en las ecuaciones generadas, el diámetro normal (Dn) fue simulado con la ecuación de una especie con similitudes. Por lo que, *Pinus engelmannii* fue modelado con la ecuación correspondiente a *Pinus durangensis*, *Pinus herrerae* con la ecuación de *Pinus lumholtzii*, *Pinus oocarpa* con la de *Pinus teocote* y *Pinus douglasiana* con la ecuación de *Pinus leiophylla*. De la misma manera se simuló el crecimiento en altura con las ecuaciones generadas para tal fin. Para las especies no consideradas en la modelación se usó la ecuación genérica que engloba a todas las especies del Capítulo 3. Con la implementación de las ecuaciones de crecimiento en diámetro de árbol individual se generó el crecimiento e incremento en área basal y conjuntando la ecuación de

crecimiento en altura se calcularon los crecimientos e incrementos en volumen por clase de IS, vía RM y MR para las UM's estudiadas, usando el sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial (Capítulo 2). Con la razón volumen/área basal (V_{ta}/AB y V_f/AB) para cada UM, se proyectaron los volúmenes para el periodo de amplitud. El incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por IS, considerando el volumen obtenido con la simulación del Dn y altura (H) y el proyectado con la razón volumen/área basal se presenta en el Cuadro 7.14, diferenciando entre especies en el Cuadro 7.15 para RM, mientras que para MR se presenta en los Cuadros 7.16 y 7.17.

La estrategia desarrollada para el cálculo del ICA en volumen y área basal representa una opción adecuada para la obtención y reporte de esta variable a nivel UM y especie, comparado con la estimación basada en las virutas de incremento que se usó en el PMF. La técnica usada en la presente investigación ayuda a simular el crecimiento de los árboles en el ciclo de corta y permite simular la aplicación de las intervenciones silvícolas, logrando tener un ICA variable durante el ciclo de corta para cada UM, a diferencia de lo reportado en el PMF que asume un ICA constante en volumen, el uso de ICA variable representa las condiciones de crecimiento de acuerdo a la variabilidad climática asumida en la reconstrucción de crecimiento de los árboles usados en la base de datos.

6.3. Implementación de la ecuación dinámica con polimorfismo complejo en el inventario operativo

Para la implementación de la ecuación dinámica de crecimiento en altura dominante e índice de sitio a la información de inventario y con la finalidad de hacer una clasificación de la productividad de los terrenos forestales, se obtuvo el IS con la H_0 para cada sitio de muestreo. Se usaron tres formas de clasificar el IS dentro de la UM; 1) el IS mayor de los sitios de muestreo, 2) el segundo IS mayor del sitios de muestreo (eliminando el IS mayor del sitio) y 3) el IS medio de los sitios de muestreo. La clasificación se realizó de forma simétrica para el IS (para todos los casos el IS se estimó de acuerdo a la especie de mayor

densidad en el sitio y considerando una edad base de 60 años). En el Cuadro 7.18 se presentan las superficies de acuerdo al IS para las UM's consideradas en la implementación de los modelos generados. Se considera la superficie total (ST) y la superficie aprovechable (SA) de acuerdo a la segregación por cauces y caminos dentro de cada UM.

La ecuación derivada en el presente estudio (tipo GADA) representa ventajas importantes con la ecuación usada en el PMF para calcular el IS, es una ecuación dinámica que ayuda a determinar la clasificación por IS de cada UM y posee la capacidad de ser una ecuación de proyección del crecimiento en altura, a diferencia de la usada en el PMF, aplicada bajo el enfoque de Curva Guía.

6.4. Implementación de la modelación dinámica de distribuciones diamétricas en el inventario operativo

Se obtuvieron los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull (a , b y c , respectivamente) para las 4,123 UM's a través de predicción de parámetros (PPE) usando la información de los diámetros mínimo, medio y cuadrático de los sitios de inventario levantados en cada UM. Dichas variables se obtuvieron considerando la agregación de todos los sitios de inventario levantados en cada UM. En el Cuadro 7.21 se presentan el resumen descriptivo de los valores de los parámetros de localización, escala y forma y las variables predictoras para el 73.10% de las UM's (3,014) que siguen una distribución Weibull con $\alpha = 5\%$, por categoría de IS, y la distribución observada del 26.90% de las UM's (1,109) que no siguen la distribución teórica considerada. En la Figura 7.1 se presentan a manera de ejemplo las gráficas de las distribuciones diamétricas de 10 UM's, se observa la distribución observada y modelada con la distribución Weibull.

6.5. Integración de los resultados

El sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial con los factores de expansión de volumen (Fv) se convierte en un sistema con la

capacidad de calcular volumen total árbol, total fuste y comercial a un diámetro mínimo de punta. El Fv promedio indica que *Pinus durangensis* y *Pinus teocote* (10% y 12% de Fv, respectivamente) son las especies que presentan mejor poda natural, ya que presentan los Fv más bajos. Por su parte *Pinus arizonica* y *Pinus leiophylla* (21% para ambas especies) son las especies que más volumen de ramas presentan, lo que sugiere que en la etapa juvenil del arbolado deben practicarse podas para mejorar la calidad de la madera a cosechar en el futuro.

Los volúmenes (V_{ta} , V_t , V_c , V_{cdm} , V_r y V_p), el área basal (AB) y número de árboles (N_a) calculados con muestreo estratificado, vía los estimadores de razón de medias (RM) y media de razón (MR), englobando a todas las especies, resultaron estadísticamente diferentes al nivel de significancia de 5%, los intervalos de confianza no se traslapan en ninguno de los casos. Las estimaciones fueron mayores para todos los casos con MR, aunque el error de muestreo (EM) fue mayor, se puede considerar despreciable. Para ambos casos el EM es inferior al 10%. Las estimaciones a nivel especies son similares para RM y MR, en general por abajo del 10%. Solo las especies con menor abundancia (*Pinus oocarpa* y *Pinus douglasiana*) rebasan el 10% de EM. Los menores EM fueron para *Pinus durangensis* y *Pinus teocote* en los diferentes atributos estudiados bajo RM y MR.

Lo anterior refleja que bajo condiciones de inventarios operativos con sitios de muestreo de diferentes tamaños (0.05 ha, 0.10 ha y 0.15 ha, para este caso), el diseño de muestreo estratificado bajo estimadores de razón (RM y MR) representa una opción potencial en la elaboración de programas de manejo forestal sustentable. Aunque lo deseable es tener sitios de muestreo del mismo tamaño, los estimadores de razón bajo muestreo estratificado compensan las estimaciones. El uso de MR presenta ciertas ventajas contra RM, ya que considera la media del atributo de interés (N_a , AB, V_{ta} , V_f , V_c , V_{cdm} , V_p y V_r) expresado directamente a la hectárea, como la razón del atributo entre la

superficie del sitio de muestreo, lo que corrige por desviaciones debidas al tamaño del sitio, lo que es relevante en rodales con sitios de diferente tamaño.

Las estimaciones de media de razón (MR) en muestreo aleatorio estratificado presentan los resultados más optimistas respecto al inventario total del predio para AB, Vta, Vt, Vc, Vcdm y Vr, en 5.4%, 4.9%, 5.0%, 5.0%, 4.9%, 6.4% y 4.7%, respectivamente, en comparación con el estimador de razón de medias (RM), aunque el error de muestreo (EM) al 95% de confiabilidad es superior en MR, la diferencia es menor de 0.01% para todos los casos. A nivel especie MR es también optimista entre 4% y 5% con respecto a RM.

Las estimaciones de RM en muestreo aleatorio estratificado muestran que para un IS bajo (10-15) existen 8.489 m³ Vta por cada m² de AB, en un IS medio (20-25), alto (30-35) y muy alto (40-45) existen 9.835 m³, 11.601 m³ y 13.507 m³ por cada m² de AB, respectivamente. Bajo MR las razones son relativamente más bajas con diferencias de 0.038 m³, 0.03 m³, 0.035 m³, 0.017 m³ y 0.021 m³ para el IS bajo, medio, alto y muy alto, respectivamente. Lo mismo sucede en los diferentes volúmenes estudiados (Vf, Vc, Vcdm, Vp y Vr). En sitios con IS medio y alto *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis* y *Pinus teocote*, son las especies con mayor volumen por AB, siendo las especies comerciales más importantes en el área de estudio. El volumen es directamente proporcional al aumento del IS, lo que refleja que el volumen por unidad de superficie representa una medida de la productividad del sitio y está altamente relacionado con las condiciones ambientales, edáficas y fisiográficas de arbolado que definen la calidad de estación.

El ICA en AB, Vta y Vf calculados con la proyección del inventario y el Vta' y Vf' proyectados con la razón Vta/AB y Vf/AB, fueron mayores cuando el inventario es calculado con MR. El ICA promedio para Vta es desde 2.7158 m³ha⁻¹año⁻¹ en UM's con IS bajo, hasta los 5.2441 m³ha⁻¹año⁻¹ en UM's con IS muy alto, con RM. Para MR el ICA va de 2.8701 m³ha⁻¹año⁻¹ a 5.5524 m³ha⁻¹

año^{-1} . Para el Vf el ICA va de $2.4378 \text{ m}^3\text{ha}^{-1}\text{año}^{-1}$ a $4.8248 \text{ m}^3\text{ha}^{-1}\text{año}^{-1}$ con RM, mientras que con MR es de $2.5776 \text{ m}^3\text{ha}^{-1}\text{año}^{-1}$ a $5.1159 \text{ m}^3\text{ha}^{-1}\text{año}^{-1}$.

En áreas con IS medio y alto el ICA en AB, Vta y Vf es alto, por tanto son las áreas con más volumen aprovechable y ocupando la mayor parte de la superficie bajo manejo del predio ($14,541.86 \text{ ha}$ y $5,993.05 \text{ ha}$, “ 56.61% y 23.33% ”, respectivamente), lo que sugiera la posibilidad de aplicación de silvicultura intensiva centrada en las especies de *Pinus durangensis*, *Pinus arizonica*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*, en orden de importancia de potencial maderable.

El uso de la función Weibull para modelar las distribuciones diamétricas de las UM's a través de la predicción de parámetros (PPE) con las ecuaciones generadas en el Capítulo 5, representó una estrategia fácil y rápida para predecir los parámetros de localización escala y forma de las distribuciones observadas de la agregación de los sitios de muestreo por UM.

6.6. Conclusiones generales

Los sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial, los modelos de crecimiento e incremento en diámetro normal, la ecuación dinámica con polimorfismo complejo y múltiples asíntotas para el crecimiento en altura dominante y la modelación de la función Weibull para las distribuciones diamétricas, representan herramientas biométricas de gran ayuda en la planeación del manejo forestal. También representan una ventaja muy importante sobre el uso de ecuaciones generadas a nivel Unidad de Manejo Forestal (UMAFOR), ya que los modelos desarrollados recaban la información específica del predio y los modelos generados a nivel UMAFOR son de un espectro de uso más amplio.

Los estimadores de razón de medias y media de razón (RM y MR) en muestreo aleatorio estratificado (MAE), representan una opción muy útil cuando se tienen diferentes tamaños de sitio, ya sea a nivel UM o predio. Sin embargo, la definición de los tamaños de sitio debe considerar la variabilidad

presente en los estratos. Se debe considerar el IS para la definición del tamaño de los de sitios de muestreo. Así en áreas de media o alta productividad, se debe considerar absorber la variabilidad de los atributos de interés con sitios de tamaño grande y por el contrario en áreas de potencial bajo. Lo ideal o más práctico en términos de inventario operativo y desarrollo de la propuesta de planeación del manejo forestal, es considerar sitios de muestreo del mismo tamaño.

La implementación de los modelos seleccionados en cada uno de los capítulos desarrollados con el uso de la base de datos de inventario operativo, refleja escenarios para la implementación de estrategias de silvicultura y manejo forestal para el área de estudio. Sin embargo, es necesario desarrollar trabajos referentes a la modelación de la mortalidad, (para ser incluidos en las proyecciones de inventario y de las distribuciones de diámetro y área basal), elaboración de guías de densidad, modelación de la altura en función del diámetro normal, modelación de la ecuación desarrollada en el Capítulo 4 bajo el enfoque de modelos de efectos mixtos (MEM) y estudios referentes a la cuantificación de biomasa, entre otros.

Los modelos desarrollados en la presente investigación, como componentes de un SCRM, representan una opción muy importante de uso en la modificación del PMF del Ejido San Diego de Tezains, ya que se encuentra inmerso en las zonas de reactivación de la producción maderable definidas en la estrategia nacional de aumento de la producción y productividad forestal. Los modelos desarrollados representan ventajas de aplicación contra los reportados para la UMAFOR Santiago Papasquiario y Anexos, debido al rango de superficie específico de aplicación.

La implementación de los componentes del SCRM desarrollados en la presente investigación difiere de la que se usa en la ilustración de los sistemas de crecimiento y rendimiento explícitos o implícitos, debido a que no se modeló la densidad y la mortalidad, ya que no se tienen datos o registros que reflejen la mortalidad por competencia en las masas mezcladas con manejo forestal.

CAPÍTULO VII

7. ANEXOS

7.1. Descripción de variables

Las variables dasométricas y las generadas para las parcelas permanentes e inventario forestal para la implementación de los resultados, entre otras fueron las siguientes.

7.1.1. Número de árboles (Na)

Como medida de la densidad de la parcela, a nivel unidad de manejo (UM) o predio, el Na se obtiene con la expresión (7.1), donde n es el número de árboles de la parcela y A es la superficie expresada en hectáreas (ha).

$$Na = \frac{n}{A} \quad (7.1)$$

7.1.2. Área basal (AB)

El área basal se calcula sumando el área de las secciones transversales del diámetro normal (Dn) medido en cm de los árboles presentes en los sitios de inventario o parcelas de muestreo. Para el cálculo del área basal a nivel hectárea, se extrapola la medición de la parcela a la hectárea. Se utiliza la expresión 7.2, donde k es una constante cuando el Dn es dado en cm ($k = \pi/40,000$), d_i es el diámetro normal de cada árbol en la parcela, A es la superficie de la parcela en hectáreas y π es la constante matemática pi.

$$AB = \frac{k \sum_{i=1}^n d_i^2}{A} \quad (7.2)$$

7.1.3. Diámetro cuadrático (Dq)

El diámetro medio cuadrático es el diámetro normal correspondiente al árbol de AB media de la parcela o UM, por lo tanto se puede determinar a partir del AB y Na de la parcela o como una medida cuadrática de los diámetros en la parcela. El Dq se obtiene con la expresión 7.3, donde n es el número de árboles en la parcela

$$Dq = \left(\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n} \right)^{0.5} = \left(\frac{AB/Na}{k} \right)^{0.5} \quad (7.3)$$

7.1.4. Diámetro medio (dm)

Es el promedio del diámetro (cm) de los árboles encontrados en la parcela y se calcula a través de la media aritmética, dada en 7.4.

$$dm = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} \quad (7.4)$$

El diámetro mínimo (D_{\min}), diámetro medio (\bar{D}) en cm para la caracterización de las distribuciones diamétricas se obtiene ordenando los diámetros de la parcela.

7.1.5. Altura media (Hm)

La altura media (m) se calcula con la media aritmética para los árboles de la parcela con la expresión 7.5, donde (h_i) es la altura (m) de cada árbol con n número de árboles.

$$Hm = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{n} \quad (7.5)$$

7.1.6. Altura dominante (H_0)

La altura dominante (m) se calcula como la media aritmética de los 100 árboles de mayor diámetro por hectárea (Assman, 1970). En la parcela se considera el N_a correspondiente a la superficie (ha) de dicha parcela, siendo para una parcela de 0.10 ha la selección de los 10 árboles más gruesos. La H_0 se calcula con la ecuación 7.6, donde h_{0i} es la altura (m) del árbol seleccionado y n_0 es el N_a seleccionado en la parcela.

$$H_0 = \frac{\sum_{i=1}^n h_{0i}}{n_0} \quad (7.6)$$

7.1.7. Diámetro dominante (D_0)

Para obtener D_0 se sigue el mismo principio que H_0 , es el promedio de los 100 árboles más gruesos en una hectárea o su N_a correspondiente en la

parcela, es dado por 7.7, donde d_{0i} es el diámetro (cm) de cada árbol seleccionado.

$$D_0 = \frac{\sum_{i=1}^n d_{0i}}{n_0} \quad (7.7)$$

7.1.8. Edad (E)

La edad de los árboles se calcula con la ecuación 5.E8 del Capítulo 5, desarrollada para la proyección de las estructuras diamétricas., Esta variable se utiliza para la proyección de los diámetros y alturas con las ecuaciones desarrolladas en los capítulos 2 y 3.

7.1.9. Volumen total árbol (Vta)

El Vta incluye el volumen del fuste y de las ramas comerciales con 5 cm de diámetro en la base, este volumen se calcula con el modelo de Schumacher and Hall, (1933) para las especies de estudio, “ecuación que se usó en el Programa de Manejo Forestal (PMF) ajustada de forma lineal.

$$Vta = Vf + Vr \quad (7.8)$$

7.1.10. Volumen total de fuste (Vf)

El Vf (m^3) se calcula con la ecuación de volumen comercial (Vc) del sistema 2.S3 de ahusamiento y volumen comercial (Capítulo 2), representa el volumen del fuste desde la altura del tocón hasta la punta, cuando se obtiene dicho volumen de los árboles en pie, la altura del tocón o de corte es igual a 0

7.1.11. Volumen comercial (Vc)

El Vc es el volumen de fuste (m^3), el cual se determina por la integración de la ecuación de ahusamiento del sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial (SCAVC) para dos alturas de interés (por ejemplo, altura del tocón hasta la altura de un diámetro deseado), para este caso se consideró una altura de corte de 10 cm y el 80% de la altura total de cada uno de los árboles.

7.1.12. Volumen comercial a diámetro mínimo (Vcdm)

Para el Vcdm (m³) se considera un diámetro mínimo de punta por categoría diamétrica, se calcula la altura comercial a la cual sucede dicho diámetro con la ecuación de altura comercial (Hc) que integra el SCAVC desarrollado en el Capítulo 2 (Fang *et al.*, 2000), la ecuación que calcula la altura comercial (Hc) es dada por la expresión 7.9, la Hc (m) está en función del diámetro mínimo de punta (dc) fijado para cada categoría de diámetro (CD), para este caso el dc fue considerado en m, debido a que así se ajustó el SCAVC.

$$Hc = H \left[1 - \left(\frac{d_c^2}{c_1} H^{(\beta_1 - k)/\beta_1} A_1^{-(I_1 + I_2)} A_2^{-I_2} \right)^{R/(k-R)} \right] \quad (7.9)$$

Los dc (m) por categoría diamétrica (CD) fueron definidos como se presentan en el Cuadro 7.1.

Cuadro 7.1. Diámetros de punta (dc) por categoría diamétrica (CD).

CD (cm)	dc (m)
10	0.05
15	0.05
20	0.15
25	0.15
30	0.15
35	0.15
40	0.15
45	0.20
50	0.20
>55	0.20

Con el dc se obtiene la Hc a la cual sucede dicho diámetro y posteriormente se obtiene el Vcdm con el SCAVC 3 del Capítulo 2. Para obtener el volumen comercial se consideró una altura de corte de 10 cm.

7.1.13. Volumen de punta (Vp)

El Vp (m³) se obtiene por la diferencia del Vt y el Vcdm y dado por 1.10.

$$Vp = Vt - Vcdm \quad (7.10)$$

7.1.14. Volumen de ramas (Vr)

El Vr (m³) se obtiene por la diferencia del Vta y el Vt y dado por 7.11.

$$Vr = Vta - Vt \quad (7.11)$$

7.1.15. Factor de expansión de volumen (Fv)

Es el factor de expansión de volumen (m³) para convertir el modelo de fuste (Vf) a volumen total árbol (Vta) se obtiene como el promedio de la razón del Vta y Vt por categoría diámetrica, dado por la expresión 7.12, donde Vt_{ij} es el Vt del árbol j en la CD i , Vta_{ij} es el Vta del árbol j en la CD $i = 10, 15, \dots, k$, n es el número de árboles por CD.

$$Fv_i = \frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{Vta_{ij}}{Vt_{ij}} \right)}{n} \quad (7.12)$$

El Vta tomando el Vt (calculado con el SCAV 3) es dado por la expresión 7.13 que expande el Vt a Vta.

$$Vta = Fv * Vt \quad (7.13)$$

7.2. Muestreo Aleatorio Estratificado (MAE)

Para el muestreo estratificado y considerando que las unidades de muestreo (sitios de muestreo) son de tamaños diferentes (0.05 ha, 0.10 ha y 0.15 ha) la población de superficie A es dividida en estratos de A_1, A_2, \dots, A_L estratos de superficies A_i , respectivamente, bajo este concepto A puede ser representada como 7.14.

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_L = \sum_{h=1}^L A_h \quad (7.14)$$

donde A representa la superficie forestal aprovechable (ha), L es el número de estratos (unidades de manejo, "UM").

La superficie muestreada en una UM (estrato) es dada por la suma de la superficie de los sitios de muestreo, representado como 7.15.

$$a_h = \sum_{i=1}^{n_h} a_{hi} \quad (7.15)$$

donde a_h es la superficie muestreada en la UM h , la cual es dada por la suma de las superficies de los sitios de muestreo (a_{hi}) inventariados en la UM h , $i = 1, 2, \dots, n_h$ sitios de muestreo en la UM h .

La variable de interés (Na, AB, Vta, Vf, Vc, Vcdm, Vp y Vr) es considerada como 7.16.

$$y_{hi} = \sum_{j=1}^k y_{hij} \quad (7.16)$$

donde y_{hij} es el atributo de interés (Na, AB, Vta, Vf, Vc, Vcdm, Vp y Vr) del árbol j en el sitio de muestreo i de la UM h , $j = 1, 2, \dots, k$ árboles en el sitio de muestreo i del estrato (UM) h .

7.2.1. Estimador de razón de medias (RM)

El estimador RM se basa en promedios o sumas de las variables de interés (y_{hij}) en los sitios de muestreo de superficie a_{hi} de la UM j , donde la media de del estrato (UM) es estimada de la proporción \bar{R} con la varianza $S_{\bar{R}_h}^2$ (Velazco *et.*, 2003; Šmelko and Merganič, 2008). En el Cuadro 7.2 se presentan las fórmulas para los estimadores, las varianzas de los estimadores, intervalos de confianza y error de muestreo bajo RM.

Cuadro 7.2. Estimadores de razón de medias (RM) para muestreo estratificado.

Característica	Estimador	Ecuación
Razón de medias (totales)	$\hat{R}_h = \frac{\bar{y}_h}{\bar{a}_h} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h}}{\frac{\sum_{i=1}^{n_h} a_{hi}}{n_h}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{\sum_{i=1}^{n_h} a_{hi}}$	(7.17)
Varianza de la media del estrato	$S_{\hat{R}_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} (y_{hi} - \bar{R}_h a_{hi})^2}{n_h(n_h - 1)\bar{a}_h^2}$	(7.18)
Media predial	$\hat{R} = \frac{1}{A} \sum_{h=1}^L (A_h \hat{R}_h)$	(7.19)
Varianza de la media predial	$S_{\hat{R}}^2 = \frac{1}{A^2} \sum_{h=1}^L A_h^2 S_{\hat{R}_h}^2$	(7.20)
Intervalo de confianza (IC) media predial	$\hat{R} \pm t_{(1-\alpha), (n-L)} (S_{\hat{R}_h}^2)^{0.5}$	(7.21)
Error de muestro (EM) media predial	$EM = \frac{t_{(1-\alpha), (n-L)} (S_{\hat{R}}^2)^{0.5}}{\hat{R}} \times 100$	(7.22)
Inventario predial	$\hat{t} = \sum_{h=1}^L (A_h \bar{R}_h)$	(7.23)
Varianza del inventario predial	$S_{\hat{t}}^2 = \sum_{h=1}^L A_h^2 S_{\hat{R}_h}^2$	(7.24)
Intervalo de confianza del inventario predial	$\hat{t} \pm t_{(1-\alpha), (n-L)} (S_{\hat{t}}^2)^{0.5}$	(7.25)
Error de muestro (EM) del inventario predial	$EM = \frac{t_{(1-\alpha), (n-L)} (S_{\hat{t}}^2)^{0.5}}{\hat{t}} \times 100$	(7.26)

7.2.2. Estimador de media de razón (MR)

El estimador de MR se utiliza cuando los sitios de muestreo son de diferentes tamaños, MR considera que la probabilidad de selección en una muestra es más alta para sitios de muestreo grande que sitios pequeños, lo que causa una desviación sistemática (sesgo) en las estimaciones (Saborowski and Šmelko, 1998; Šmelko and Saborowski, 1999; Šmelko and Merganič, 2008). Por lo tanto en cada sitio de muestreo (i) la muestra de datos (y_{hij}) debe ser recalculada a la superficie (1 ha). Para el caso de Durango, se ha utilizado MR cuando en el inventario operativo se consideran sitios de 0.05 ha, 0.10 ha y

0.15 ha. En el Cuadro 7.3 se presentan las fórmulas para los estimadores, las varianzas de los estimadores, intervalos de confianza y error de muestreo bajo MR.

Cuadro 7.3. Estimadores de media de razón (MR) para muestreo estratificado.

Característica	Estimador	Ecuación
Variable de interés en superficie (ha)	$y_{hi} = \frac{y_{hi}}{a_{hi}} = \frac{\sum_{j=1}^k y_{hij}}{a_{hi}}$	(7.27)
Media de razones	$\bar{y}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} (y_{hi})}{n_h}$	(7.28)
Varianza de la media de razones	$S_{\bar{y}_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} (y_{hi} - \bar{y}_h)^2}{n_h(n_h - 1)}$	(7.29)
Media predial	$\hat{y}_{st} = \frac{1}{A} \sum_{h=1}^L A_h \bar{y}_h$	(7.30)
Varianza de la media predial	$S_{\hat{y}_{st}}^2 = \frac{1}{A^2} \sum_{h=1}^L A_h^2 S_{\bar{y}_h}^2$	(7.31)
Intervalo de confianza (IC) para la media predial	$\hat{y}_{st} \pm t_{(1-\alpha), (n-L)} (S_{\bar{y}_h}^2)^{0.5}$	(7.32)
Error de muestreo (EM) para la media predial	$EM = \frac{t_{(1-\alpha), (n-1)} (S_{\bar{y}_h}^2)^{0.5}}{\hat{y}_{st}} \times 100$	(7.33)
Inventario predial	$\hat{t}_{st} = \sum_{h=1}^L A_h \bar{y}_h$	(7.34)
Varianza del inventario predial	$S_{\hat{t}_{st}}^2 = \sum_{h=1}^L A_h^2 S_{\bar{y}_h}^2$	(7.35)
Intervalo de confianza (IC) del inventario predial	$\hat{t}_{st} \pm t_{(1-\alpha), (n-L)} (S_{\hat{t}_{st}}^2)^{0.5}$	(7.36)
Error de muestreo (EM) del inventario predial	$EM = \frac{t_{(1-\alpha), (n-1)} (S_{\hat{t}_{st}}^2)^{0.5}}{\hat{t}_{st}} \times 100$	(7.37)

7.3. Sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial en el inventario operativo

Cuadro 7.4. Ajuste del modelo de volumen rollo total árbol (Vta).

SP	Estadístico	α_0	α_1	α_2	RMSE	R_a^2
Pa	Estimador	1.4019	2.0027	0.6506	0.1059	0.9792
	EE	0.4979	0.0825	0.0981		
	t	2.82	24.28	6.63		
	Pr> t	0.0073	<0.0001	<0.0001		
Pd	Estimador	1.3457	2.1438	0.7079	0.0738	0.9865
	EE	0.2961	0.0568	0.0597		
	t	4.55	37.78	11.85		
	Pr> t	<0.0001	<0.0001	<0.0001		
Pt	Estimador	0.9696	1.9881	0.7555	0.0603	0.9892
	EE	0.2852	0.0712	0.0778		
	t	3.40	27.92	9.71		
	Pr> t	0.0013	<0.0001	<0.0001		
Pl	Estimador	2.1760	2.0826	0.5213	0.0581	0.9943
	EE	0.6380	0.0687	0.0778		
	t	3.41	30.29	6.70		
	Pr> t	0.0021	<0.0001	<0.0001		
Pay	Estimador	0.7244	2.0638	0.8404	0.0939	0.9796
	EE	0.5178	0.1251	0.2052		
	t	1.40	16.49	4.10		
	Pr> t	0.1746	<0.0001	0.0004		
Todas	Estimador	1.1443	2.0248	0.7125	0.0900	0.9818
	EE	0.1837	0.0380	0.0435		
	t	6.23	53.36	16.37		
	Pr> t	<0.0001	<0.0001	<0.0001		

Pa es *Pinus arizonica*, Pd es *Pinus durangensis*, Pt es *Pinus teocote*, Pay es *Pinus ayacahuite*, EE es el error estándar asociado al estimador del parámetro, t es el valor de la distribución t y Pr<|t| es la probabilidad de rechazo.

Cuadro 7.5. Factores de expansión de volumen (Fv) por categoría diamétrica (CD) para las especies forestales estudiadas.

SP	Fv/CD (cm)															
	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	\overline{Fv}
Pa	1.304	1.261	1.212	1.185	1.163	1.151	1.128	1.123	1.112	1.102	1.107	1.091	1.087	1.103	1.076	1.213
Pd	1.066	1.084	1.098	1.113	1.129	1.142	1.152	1.162	1.172	1.181	1.192	1.199	1.217	1.216	1.229	1.101
Pt	1.137	1.131	1.122	1.119	1.118	1.117	1.118	1.116	1.115	1.114	1.118	1.121	1.123	1.121	1.123	1.126
Pl	1.285	1.257	1.214	1.189	1.175	1.167	1.154	1.152	1.149	1.147	1.146	1.143	1.163	1.149	1.147	1.219
Pe	1.176	1.167	1.155	1.150	1.146	1.144	1.143	1.149	1.144	1.140	1.145	1.147	1.164	1.168	1.155	1.157
Ph	1.173	1.168	1.162	1.153	1.147	1.141	1.134	1.134	1.140	1.144	1.142	1.170	1.164	1.171	1.135	1.16
Plu	1.180	1.175	1.164	1.156	1.156	1.153	1.153	1.150	1.150	1.156	1.160	1.143	1.185	1.143	1.140	1.168
Pay	1.200	1.186	1.166	1.156	1.150	1.146	1.143	1.139	1.133	1.127	1.141	1.140	1.125	1.139	1.116	1.178
Po	1.171	1.177	1.162	1.158	1.137	1.153	1.135	1.146	1.137	1.143	1.126	1.179	1.160	1.192	1.160	1.16
Pdo	1.191	1.174	1.171	1.161	1.160	1.155	1.112	1.097	1.144	1.166	1.166	1.166	1.166	1.166	1.166	1.166

\overline{Fv} es el factor de expansión de volumen promedio, Pe es *Pinus engelmannii*, Ph es *Pinus herrerae*, Plu es *Pinus lumholtzii*, Pay es *Pinus ayacahuite*, Po es *Pinus oocarpa*, Pdo es *Pinus douglasiana*.

Cuadro 7.6. Estimadores de razón de medias (RM) para las unidades de manejo (UM).

Variable	UM	A (ha)	\hat{R}	$S_{\hat{R}}^2$	$LI_{\hat{R}}$	$LS_{\hat{R}}$	$EM_{\hat{R}}$	\hat{t}	$S_{\hat{t}}$	$LI_{\hat{t}}$	$LS_{\hat{t}}$
Na			304.18	1.453	301.77	306.59	0.79	7813742.21	30963.08	7751816.05	7875668.37
AB			13.65	0.003	13.54	13.76	0.77	350640.76	1357.66	347925.44	353356.09
Vta			140.40	0.421	139.10	141.69	0.92	3606519.98	16675.41	3573169.17	3639870.80
Vt			123.75	0.332	122.60	124.90	0.93	3178864.54	14810.57	3149243.40	3208485.67
Vc	4123	25688.19	120.49	0.315	119.37	121.62	0.93	3095254.51	14417.42	3066419.66	3124089.36
Vcdm			118.33	0.313	117.21	119.45	0.95	3039662.67	14363.62	3010935.42	3068389.91
Vp			5.42	0.001	5.37	5.47	0.87	139201.87	608.48	137984.91	140418.84
Vr			16.65	0.006	16.49	16.81	0.95	427655.45	2030.87	423593.71	431717.18

Na es el número de árboles, UM son las unidades de manejo, A es la superficie total aprovechable (ha), AB es el área basal, Vta es el volumen total árbol, Vt es el volumen total de fuste, Vc es el volumen comercial al 80% de la altura total, Vcdm es el volumen comercial a un diámetro mínimo de punta, Vp es el volumen de punta, Vr es el volumen de ramas, \hat{R} es el estimador de la media predial, $S_{\hat{R}}^2$ es la varianza, $LI_{\hat{R}}$ y $LS_{\hat{R}}$ son los límites del intervalo de confianza al 95%, $EM_{\hat{R}}$ es el error de muestreo, \hat{t} es el estimador del total predial, $S_{\hat{t}}$ es la desviación estándar, $LI_{\hat{t}}$ y $LS_{\hat{t}}$ son los límites del intervalo de confianza al 95%.

Cuadro 7.7. Estimadores de razón de medias (RM) para las unidades de manejo (UM) por especie.

SP	Variable	UM	\hat{R}	S_R^2	$LI_{\hat{R}}$	$LS_{\hat{R}}$	$EM_{\hat{R}}$	\hat{t}	$S_{\hat{t}}$	$LI_{\hat{t}}$	$LS_{\hat{t}}$
<i>Pa</i>	Na	2140	30.072	0.1826	29.217	30.927	2.84	772498.760	10977.632	750543.500	794454.030
<i>Pd</i>		3997	117.032	0.5631	115.531	118.533	1.28	3006336.840	19276.782	2967783.280	3044890.410
<i>Pt</i>		3727	73.768	0.3384	72.604	74.931	1.58	1894955.720	14942.924	1865069.870	1924841.570
<i>Pl</i>		1907	27.863	0.1384	27.119	28.607	2.67	715742.590	9555.520	696631.550	734853.630
<i>Pe</i>		748	3.576	0.0108	3.368	3.784	5.82	91869.750	2672.223	86525.300	97214.190
<i>Ph</i>		531	4.745	0.0221	4.448	5.043	6.27	121903.260	3819.997	114263.270	129543.260
<i>Plu</i>		1651	13.503	0.0637	12.999	14.008	3.74	346876.350	6482.901	333910.550	359842.160
<i>Pay</i>		3745	33.247	0.1022	32.607	33.886	1.92	854047.330	8213.694	837619.940	870474.720
<i>Po</i>		114	0.292	0.0007	0.241	0.343	17.47	7492.630	654.390	6183.850	8801.410
<i>Pdo</i>		18	0.079	0.0002	0.050	0.108	36.89	2018.970	372.360	1274.250	2763.690
<i>Pa</i>	AB	2140	1.558	0.0005	1.514	1.602	2.84	40014.470	567.296	38879.880	41149.060
<i>Pd</i>		3997	5.392	0.0012	5.323	5.461	1.28	138510.890	884.499	136741.900	140279.890
<i>Pt</i>		3727	3.470	0.0008	3.414	3.527	1.62	89141.360	724.065	87693.230	90589.490
<i>Pl</i>		1907	1.244	0.0003	1.209	1.278	2.78	31948.640	444.769	31059.100	32838.180
<i>Pe</i>		748	0.200	0.0001	0.186	0.213	6.77	5135.460	173.891	4787.680	5483.240
<i>Ph</i>		531	0.215	0.0001	0.201	0.230	6.51	5535.790	180.203	5175.390	5896.200
<i>Plu</i>		1651	0.509	0.0001	0.490	0.529	3.86	13087.340	252.282	12582.780	13591.900
<i>Pay</i>		3745	1.042	0.0001	1.018	1.065	2.26	26765.760	302.375	26161.010	27370.510
<i>Po</i>		114	0.016	0.0000	0.013	0.019	19.90	408.060	40.611	326.840	489.290
<i>Pdo</i>		18	0.004	0.0000	0.002	0.006	53.82	92.980	25.021	42.940	143.020
<i>Pa</i>	Vta	2140	17.556	0.0713	17.022	18.090	3.04	450975.520	6859.923	437255.680	464695.370
<i>Pd</i>		3997	57.926	0.1964	57.040	58.813	1.53	1488021.990	11383.898	1465254.200	1510789.790
<i>Pt</i>		3727	35.541	0.1073	34.886	36.197	1.84	912993.200	8415.725	896161.750	929824.650
<i>Pl</i>		1907	12.694	0.0355	12.317	13.071	2.97	326090.330	4840.282	316409.760	335770.890
<i>Pe</i>		748	2.023	0.0058	1.871	2.175	7.51	51966.190	1952.251	48061.690	55870.690
<i>Ph</i>		531	2.094	0.0057	1.943	2.245	7.21	53791.920	1938.308	49915.300	57668.530
<i>Plu</i>		1651	4.533	0.0089	4.345	4.721	4.15	116439.000	2417.146	111604.710	121273.290
<i>Pay</i>		3745	7.831	0.0113	7.618	8.043	2.72	201154.140	2732.565	195689.010	206619.270
<i>Po</i>		114	0.161	0.0003	0.127	0.196	21.40	4141.060	443.167	3254.730	5027.390
<i>Pdo</i>		18	0.037	0.0002	0.012	0.062	68.59	946.630	324.654	297.330	1595.940
<i>Pa</i>	Vt	2140	15.405	0.0576	14.925	15.885	3.11	395726.240	6163.122	383400.000	408052.490
<i>Pd</i>		3997	50.990	0.1492	50.217	51.762	1.52	1309837.150	9922.323	1289992.500	1329681.790
<i>Pt</i>		3727	31.909	0.0879	31.316	32.502	1.86	819689.220	7616.302	804456.620	834921.830

Cuadro 7.7. Estimadores de razón de medias (RM) para las unidades de manejo (UM) por especie continuación.

SP	Variable	UM	\hat{R}	S_R^2	$LI_{\hat{R}}$	$LS_{\hat{R}}$	$EM_{\hat{R}}$	\hat{t}	$S_{\hat{t}}$	$LI_{\hat{t}}$	$LS_{\hat{t}}$	
<i>Pl</i>		1907	10.880	0.0270	10.552	11.209	3.02	279496.600	4221.175	271054.250	287938.960	
<i>Pe</i>		748	1.772	0.0045	1.638	1.906	7.56	45524.870	1719.803	42085.270	48964.480	
<i>Ph</i>		531	1.835	0.0045	1.702	1.969	7.28	47142.260	1714.790	43712.680	50571.840	
<i>Plu</i>		1651	3.942	0.0068	3.778	4.107	4.17	101270.680	2112.520	97045.650	105495.720	
<i>Pay</i>		3745	6.840	0.0089	6.651	7.029	2.76	175712.330	2427.510	170857.310	180567.350	
<i>Po</i>		114	0.141	0.0002	0.111	0.171	21.38	3626.880	387.746	2851.390	4402.370	
<i>Pdo</i>		18	0.033	0.0001	0.010	0.056	70.59	838.290	295.893	246.510	1430.080	
<i>Pa</i>		2140	14.949	0.0542	14.483	15.414	3.12	384003.110	5981.025	372041.050	395965.160	
<i>Pd</i>		3997	49.608	0.1413	48.856	50.360	1.52	1274335.500	9654.550	1255026.400	1293644.600	
<i>Pt</i>		3727	31.044	0.0832	30.467	31.621	1.86	797457.600	7410.538	782636.520	812278.670	
<i>Pl</i>		1907	10.660	0.0259	10.338	10.982	3.02	273836.190	4135.931	265564.330	282108.050	
<i>Pe</i>	Vc	748	1.726	0.0043	1.596	1.857	7.56	44343.010	1675.295	40992.430	47693.600	
<i>Ph</i>		531	1.787	0.0042	1.657	1.918	7.28	45917.010	1670.375	42576.260	49257.760	
<i>Plu</i>		1651	3.840	0.0064	3.679	4.000	4.17	98631.470	2057.639	94516.190	102746.750	
<i>Pay</i>		3745	6.711	0.0086	6.525	6.896	2.76	172381.350	2381.781	167617.790	177144.910	
<i>Po</i>		114	0.138	0.0002	0.108	0.167	21.38	3532.730	377.706	2777.320	4288.140	
<i>Pdo</i>		18	0.032	0.0001	0.009	0.054	70.61	816.530	288.260	240.010	1393.050	
<i>Pa</i>			2140	14.824	0.0540	14.359	15.289	3.14	380804.800	5971.135	368862.540	392747.070
<i>Pd</i>			3997	48.948	0.1410	48.197	49.699	1.53	1257383.110	9646.641	1238089.830	1276676.390
<i>Pt</i>			3727	30.566	0.0822	29.993	31.140	1.88	785197.900	7366.124	770465.650	799930.150
<i>Pl</i>	Vcdm	1907	10.443	0.0252	10.126	10.760	3.04	268258.160	4074.614	260108.940	276407.390	
<i>Pe</i>		748	1.703	0.0042	1.573	1.833	7.63	43737.800	1668.051	40401.700	47073.910	
<i>Ph</i>		531	1.753	0.0041	1.624	1.882	7.34	45033.970	1653.112	41727.750	48340.200	
<i>Plu</i>		1651	3.745	0.0062	3.587	3.903	4.22	96197.450	2028.475	92140.500	100254.400	
<i>Pay</i>		3745	6.180	0.0078	6.003	6.356	2.86	158746.830	2268.823	154209.190	163284.480	
<i>Po</i>		114	0.136	0.0002	0.107	0.165	21.58	3495.120	377.085	2740.950	4249.290	
<i>Pdo</i>		18	0.031	0.0001	0.009	0.054	70.59	807.510	285.016	237.480	1377.540	
<i>Pa</i>			2140	0.581	0.0001	0.563	0.599	3.09	14921.440	230.644	14460.150	15382.730
<i>Pd</i>			3997	2.042	0.0002	2.014	2.070	1.39	52454.040	364.158	51725.720	53182.360
<i>Pt</i>		3727	1.343	0.0001	1.319	1.367	1.77	34491.320	305.953	33879.420	35103.230	
<i>Pl</i>	Vp	1907	0.437	0.0001	0.425	0.450	2.89	11238.440	162.488	10913.460	11563.420	
<i>Pe</i>		748	0.070	0.0001	0.065	0.074	6.77	1787.070	60.486	1666.100	1908.040	
<i>Ph</i>		531	0.082	0.0001	0.076	0.088	6.80	2108.290	71.677	1964.930	2251.640	
<i>Plu</i>		1651	0.197	0.0001	0.190	0.205	3.83	5073.240	97.171	4878.900	5267.580	
<i>Pay</i>		3745	0.660	0.0001	0.645	0.676	2.41	16965.500	204.428	16556.640	17374.350	
<i>Po</i>		114	0.005	0.0000	0.004	0.006	19.54	131.760	12.873	106.010	157.500	
<i>Pdo</i>		18	0.001	0.0000	0.000	0.002	71.53	30.780	11.009	8.760	52.800	

Cuadro 7.7. Estimadores de razón de medias (RM) para las unidades de manejo (UM) por especie continuación.

SP	Variable	UM	\hat{R}	$S_{\hat{R}}^2$	$LI_{\hat{R}}$	$LS_{\hat{R}}$	$EM_{\hat{R}}$	$\hat{\tau}$	$S_{\hat{\tau}}$	$LI_{\hat{\tau}}$	$LS_{\hat{\tau}}$
Pa	Vr	2140	2.151	0.0009	2.090	2.212	2.84	55249.280	784.011	53681.260	56817.300
Pd		3997	6.936	0.0036	6.816	7.057	1.73	178184.850	1543.910	175097.030	181272.670
Pt		3727	3.632	0.0010	3.569	3.696	1.75	93303.980	816.483	91671.010	94936.950
Pl		1907	1.814	0.0007	1.762	1.865	2.84	46593.720	660.861	45272.000	47915.450
Pe		748	0.251	0.0001	0.232	0.269	7.34	6441.320	236.437	5968.440	6914.190
Ph		531	0.259	0.0001	0.241	0.277	6.89	6649.660	229.175	6191.310	7108.010
Plu		1651	0.590	0.0002	0.566	0.615	4.09	15168.320	309.953	14548.410	15788.220
Pay		3745	0.990	0.0002	0.966	1.015	2.50	25441.810	318.596	24804.610	26079.000
Po		114	0.020	0.0002	0.016	0.024	22.04	514.180	56.674	400.830	627.530
Pdo		18	0.004	0.0002	0.002	0.007	54.36	108.340	29.447	49.450	167.240

Cuadro 7.8. Estimadores de media de razón (MR) para las unidades de manejo (UM)

Variable	UM	A	\hat{y}_{st}	$S_{\hat{y}_{st}}^2$	$LI_{\hat{y}_{st}}$	$LS_{\hat{y}_{st}}$	$EM_{\hat{y}_{st}}$	$\hat{\tau}_{st}$	$S_{\hat{\tau}_{st}}$	$LI_{\hat{\tau}_{st}}$	$LS_{\hat{\tau}_{st}}$
Na	4123	25688.19	326.915	1.7743	324.2510	329.5790	0.81	8397855.05	34217.69	8329419.67	8466290.44
AB			14.389	0.0032	14.2760	14.5020	0.78	369627.79	1448.40	366730.99	372524.59
Vta			147.338	0.4754	145.9590	148.7170	0.94	3784839.19	17610.35	3749416.69	3820261.68
Vt			129.908	0.3753	128.6820	131.1330	0.94	3337091.92	15737.55	3305616.81	3368567.03
Vc			126.492	0.3557	125.3000	127.6850	0.94	3249357.31	15319.74	3196488.81	3302225.80
Vcdm			124.141	0.3526	122.9530	125.3290	0.96	3188960.58	15254.48	3158451.61	3219469.55
Vp			5.767	0.0007	5.7150	5.8180	0.89	148131.34	660.22	146810.89	149451.78
Vr			17.430	0.0070	17.2620	17.5980	0.96	447747.27	2154.45	443438.37	452056.16

Cuadro 7.9. Estimadores de media de razón (MR) para las unidades de manejo (UM) por especie.

SP	Variable	UM	\hat{y}_{st}	$S_{\hat{y}_{st}}^2$	$LI_{\hat{y}_{st}}$	$LS_{\hat{y}_{st}}$	$EM_{\hat{y}_{st}}$	$\hat{\tau}_{st}$	$S_{\hat{\tau}_{st}}$	$LI_{\hat{\tau}_{st}}$	$LS_{\hat{\tau}_{st}}$
Pa	Na	2140	32.010	0.2659	30.979	33.041	3.22	822280.30	13245.35	795789.60	848770.99
Pd		3997	126.916	0.7362	125.200	128.632	1.35	3260231.10	22041.10	3216148.90	3304313.29
Pt		3727	79.765	0.4418	78.435	81.094	1.67	2049016.26	17075.17	2014865.93	2083166.60
Pl		1907	29.989	0.2093	29.074	30.903	3.05	770352.74	11750.97	746850.80	793854.69
Pe		748	3.720	0.0151	3.475	3.966	6.60	95566.56	3152.04	89262.48	101870.64
Ph		531	5.084	0.0299	4.738	5.430	6.81	130609.19	4444.79	121719.61	139498.78
Plu		1651	13.489	0.0862	12.902	14.076	4.35	346504.25	7540.74	331422.77	361585.73
Pay		3745	35.550	0.1435	34.792	36.308	2.13	913213.72	9731.11	893751.50	932675.93
Po		114	0.311	0.0013	0.240	0.382	22.82	7979.80	910.57	6158.67	9800.93
Pdo		18	0.082	0.0002	0.052	0.112	36.55	2101.14	384.02	1333.10	2869.18
Pa	AB	2140	1.626	0.0007	1.574	1.677	3.19	41758.62	666.15	40426.32	43090.91
Pd		3997	5.686	0.0014	5.612	5.761	1.31	146072.67	959.19	144154.28	147991.06
Pt		3727	3.681	0.0010	3.618	3.744	1.71	94551.64	807.83	92935.99	96167.30

Cuadro 7.9. Estimadores de media de razón (MR) para las unidades de manejo (UM) por especie continuación.

SP	Variable	UM	\hat{y}_{st}	$S_{\hat{y}_{st}}^2$	$LI_{\hat{y}_{st}}$	$LS_{\hat{y}_{st}}$	$EM_{\hat{y}_{st}}$	$\hat{\tau}_{st}$	$S_{\hat{\tau}_{st}}$	$LI_{\hat{\tau}_{st}}$	$LS_{\hat{\tau}_{st}}$
Pl		1907	1.322	0.0004	1.281	1.363	3.09	33962.27	524.57	32913.13	35011.42
Pe		748	0.206	0.0001	0.190	0.222	7.90	5290.60	209.00	4872.59	5708.60
Ph		531	0.230	0.0001	0.213	0.247	7.37	5897.50	217.45	5462.60	6332.40
Plu		1651	0.507	0.0001	0.484	0.531	4.59	13036.12	299.32	12437.48	13634.75
Pay		3745	1.111	0.0002	1.083	1.139	2.49	28538.51	355.06	27828.38	29248.64
Po		114	0.017	0.0001	0.013	0.020	20.66	425.02	43.91	337.20	512.84
Pdo		18	0.004	0.0001	0.002	0.005	45.75	94.84	21.69	51.45	138.23
Pa		2140	18.241	0.1412	17.489	18.992	4.12	468576.38	9652.07	449272.25	487880.51
Pd		3997	60.682	0.2356	59.712	61.653	1.60	1558821.47	12469.41	1533882.66	1583760.28
Pt		3727	37.579	0.1513	36.801	38.357	2.07	965328.31	9991.59	945345.12	985311.50
Pl		1907	13.448	0.0652	12.937	13.958	3.80	345443.22	6561.02	332321.19	358565.25
Pe	Vta	748	2.079	0.0134	1.847	2.311	11.16	53396.32	2978.18	47439.96	59352.67
Ph		531	2.239	0.0113	2.026	2.452	9.51	57514.34	2736.03	52042.27	62986.41
Plu		1651	4.519	0.0191	4.242	4.795	6.12	116078.73	3551.43	108975.86	123181.59
Pay		3745	8.347	0.0182	8.078	8.617	3.23	214430.41	3464.76	207500.89	221359.93
Po		114	0.167	0.0004	0.128	0.206	23.58	4289.89	505.80	3278.30	5301.49
Pdo		18	0.037	0.0001	0.016	0.059	57.34	960.11	275.28	409.56	1510.66
Pa		2140	15.991	0.1155	15.311	16.671	4.25	410785.08	8731.31	393322.47	428247.70
Pd		3997	53.469	0.1793	52.622	54.316	1.58	1373525.17	10876.78	1351771.61	1395278.73
Pt		3727	33.742	0.1240	33.037	34.446	2.09	866766.18	9047.01	848672.17	884860.19
Pl		1907	11.518	0.0495	11.073	11.963	3.86	295874.67	5713.85	284446.96	307302.37
Pe	Vt	748	1.821	0.0103	1.618	2.024	11.15	46766.64	2606.98	41552.68	51980.61
Ph		531	1.965	0.0089	1.775	2.154	9.62	50466.42	2428.60	45609.23	55323.61
Plu		1651	3.931	0.0147	3.689	4.173	6.16	100979.48	3110.76	94757.95	107201.01
Pay		3745	7.292	0.0144	7.053	7.532	3.29	187323.12	3076.74	181169.65	193476.60
Po		114	0.146	0.0003	0.112	0.181	23.66	3756.26	444.41	2867.43	4645.09
Pdo		18	0.033	0.0001	0.014	0.053	58.95	848.89	250.23	348.43	1349.34
Pa		2140	15.517	0.1088	14.858	16.177	4.25	398614.40	8473.47	361796.24	435432.56
Pd		3997	52.020	0.1697	51.196	52.844	1.58	1336292.43	10583.21	1297869.63	1374715.23
Pt		3727	32.827	0.1174	32.141	33.512	2.09	843255.70	8802.65	809072.51	877438.89
Pl		1907	11.285	0.0475	10.849	11.721	3.86	289881.84	5598.43	263943.05	315820.63
Pe	Vc	748	1.773	0.0098	1.576	1.971	11.15	45552.46	2539.54	33991.85	57113.07
Ph		531	1.914	0.0085	1.729	2.098	9.63	49154.93	2365.72	37394.82	60915.03
Plu		1651	3.829	0.0139	3.593	4.064	6.16	98347.93	3030.03	83142.98	113552.89
Pay		3745	7.154	0.0138	6.919	7.389	3.29	183772.02	3018.77	171193.40	196350.64
Po		114	0.142	0.0003	0.109	0.176	23.66	3658.74	432.90	1387.05	5930.43
Pdo		18	0.032	0.0001	0.013	0.051	58.96	826.85	243.77	-160.25	1813.95

Cuadro 7.9. Estimadores de media de razón (MR) para las unidades de manejo (UM) por especie continuación.

SP	Variable	UM	\hat{y}_{st}	$S_{\hat{y}_{st}}^2$	$LI_{\hat{y}_{st}}$	$LS_{\hat{y}_{st}}$	$EM_{\hat{y}_{st}}$	\hat{t}_{st}	$S_{\hat{t}_{st}}$	$LI_{\hat{t}_{st}}$	$LS_{\hat{t}_{st}}$
Pa	Vcdm	2140	15.380	0.1086	14.721	16.039	4.29	395082.79	8464.86	378153.06	412012.52
Pd		3997	51.291	0.1692	50.469	52.114	1.60	1317583.46	10566.51	1296450.44	1338716.49
Pt		3727	32.300	0.1162	31.618	32.982	2.11	829734.37	8757.97	812218.44	847250.30
Pl		1907	11.052	0.0460	10.623	11.481	3.88	283901.73	5512.16	272877.41	294926.06
Pe		748	1.749	0.0098	1.551	1.947	11.33	44923.08	2544.01	39835.07	50011.09
Ph		531	1.876	0.0082	1.694	2.057	9.67	48184.51	2329.43	43525.65	52843.38
Plu		1651	3.734	0.0136	3.501	3.967	6.25	95920.34	2995.44	89929.47	101911.22
Pay		3745	6.586	0.0125	6.363	6.810	3.39	169194.77	2871.59	163451.58	174937.96
Po		114	0.141	0.0003	0.107	0.174	23.84	3617.68	431.17	2755.34	4480.02
Pdo		18	0.032	0.0001	0.013	0.051	58.93	817.84	240.96	335.92	1299.76
Pa	Vp	2140	0.611	0.0002	0.586	0.637	4.15	15702.29	326.13	15050.03	16354.55
Pd		3997	2.178	0.0003	2.146	2.210	1.47	55941.71	412.54	55116.63	56766.79
Pt		3727	1.442	0.0002	1.413	1.470	1.95	37031.81	361.10	36309.61	37754.00
Pl		1907	0.466	0.0001	0.449	0.484	3.74	11972.93	223.79	11525.34	12420.52
Pe		748	0.072	0.0001	0.066	0.078	8.20	1843.56	75.55	1692.47	1994.66
Ph		531	0.089	0.0001	0.079	0.098	10.76	2281.91	122.81	2036.30	2527.52
Plu		1651	0.197	0.0001	0.186	0.208	5.45	5059.14	137.79	4783.56	5334.71
Pay		3745	0.706	0.0001	0.685	0.726	2.90	18128.35	263.28	17601.79	18654.92
Po		114	0.005	0.0001	0.004	0.007	24.13	138.58	16.72	105.15	172.01
Pdo		18	0.001	0.0001	0.000	0.002	61.07	31.05	9.48	12.09	50.01
Pa	Vr	2140	2.250	0.0017	2.167	2.332	3.68	57791.30	1062.86	55665.58	59917.01
Pd		3997	7.213	0.0043	7.082	7.345	1.82	185296.30	1686.23	181923.84	188668.76
Pt		3727	3.837	0.0014	3.762	3.912	1.96	98562.13	966.09	96629.96	100494.31
Pl		1907	1.930	0.0013	1.859	2.000	3.66	49568.56	906.60	47755.37	51381.75
Pe		748	0.258	0.0002	0.229	0.287	11.33	6629.67	375.65	5878.37	7380.97
Ph		531	0.274	0.0002	0.250	0.299	8.94	7047.92	315.09	6417.74	7678.09
Plu		1651	0.588	0.0003	0.553	0.623	5.93	15099.25	448.03	14203.18	15995.31
Pay		3745	1.055	0.0003	1.024	1.087	2.99	27107.29	405.18	26296.93	27917.64
Po		114	0.021	0.0001	0.016	0.026	23.53	533.63	62.78	408.06	659.20
Pdo		18	0.004	0.0001	0.002	0.006	47.07	111.22	26.18	58.87	163.58

\hat{y}_{st} es la media predial, $S_{\hat{y}_{st}}^2$ es la varianza de la media predial, $LI_{\hat{y}_{st}}$ y $LS_{\hat{y}_{st}}$ son los límites inferior y superior del intervalo de confianza al 95%, $EM_{\hat{y}_{st}}$ es el error de muestreo al 95%, \hat{t}_{st} es el inventario predial, $S_{\hat{t}_{st}}$ es la desviación estándar del inventario predial, $LI_{\hat{t}_{st}}$ es el límite inferior del intervalo de confianza y $LS_{\hat{t}_{st}}$ el límite superior del intervalo de confianza del inventario predial al 95%.

Cuadro 7.10. Razones de volumen-área basal (V/AB) de razón de medias (RM) por IS.

IS	UM	Vta/AB	Vt/AB	Vc/AB	Vcdm/AB	Vp/AB	Vr/AB
1 (Bajo)	784	8.489	7.336	7.143	6.959	0.376	1.154
2 (Medio)	2388	9.835	8.640	8.414	8.239	0.401	1.195
3 (Alto)	851	11.601	10.360	10.087	9.947	0.413	1.242
4 (Muy Alto)	100	13.507	12.164	11.842	11.767	0.397	1.343

Cuadro 7.11. Razones de volumen-área basal (V/AB) de razón de medias (RM) por especie e IS.

sp	IS	UM	Vta/AB	Vt/AB	Vc/AB	Vcdm/AB	Vp/AB	Vr/AB
<i>Pa</i>	1 (Bajo)	383	8.997	7.433	7.211	7.086	0.347	1.564
<i>Pd</i>		750	8.416	7.371	7.170	7.006	0.365	1.046
<i>Pt</i>		702	8.233	7.277	7.079	6.924	0.354	0.955
<i>Pl</i>		347	8.614	7.042	6.899	6.720	0.322	1.572
<i>Pe</i>		146	7.758	6.644	6.470	6.337	0.306	1.114
<i>Ph</i>		105	7.915	6.817	6.638	6.454	0.362	1.098
<i>Plu</i>		386	7.572	6.490	6.320	6.148	0.342	1.082
<i>Pay</i>		682	5.857	4.960	4.865	4.380	0.580	0.897
<i>Po</i>		23	7.280	6.272	6.107	5.951	0.321	1.008
<i>Pdo</i>		3	6.755	5.780	5.627	5.519	0.261	0.975
<i>Pa</i>	2 (Medio)	1291	10.399	8.941	8.676	8.576	0.365	1.458
<i>Pd</i>		2310	9.821	8.664	8.429	8.274	0.390	1.157
<i>Pt</i>		2146	9.507	8.503	8.272	8.104	0.399	1.004
<i>Pl</i>		1160	9.708	8.233	8.066	7.883	0.350	1.475
<i>Pe</i>		456	8.502	7.401	7.208	7.012	0.389	1.101
<i>Ph</i>		289	9.288	8.140	7.928	7.775	0.365	1.148
<i>Plu</i>		954	8.454	7.360	7.168	6.966	0.393	1.095
<i>Pay</i>		2177	6.719	5.811	5.700	5.182	0.629	0.908
<i>Po</i>		65	8.735	7.648	7.448	7.287	0.361	1.088
<i>Pdo</i>		12	6.989	6.007	5.849	5.836	0.170	0.982
<i>Pa</i>	3 (Alto)	422	11.959	10.691	10.375	10.309	0.382	1.268
<i>Pd</i>		838	11.756	10.439	10.156	10.034	0.405	1.317
<i>Pt</i>		786	11.008	9.963	9.693	9.550	0.413	1.045
<i>Pl</i>		371	10.720	9.397	9.207	9.024	0.373	1.322
<i>Pe</i>		130	9.472	8.334	8.117	7.957	0.377	1.138
<i>Ph</i>		127	10.531	9.383	9.139	8.984	0.399	1.149
<i>Plu</i>		286	9.376	8.286	8.070	7.864	0.422	1.090
<i>Pay</i>		792	7.666	6.765	6.637	6.095	0.670	0.901
<i>Po</i>		21	8.811	7.867	7.662	7.517	0.350	0.944
<i>Pdo</i>		3	9.706	8.622	8.398	8.330	0.293	1.084
<i>Pa</i>	4 (Muy Alto)	44	13.340	12.274	11.912	11.881	0.393	1.066
<i>Pd</i>		99	13.868	12.334	12.002	11.955	0.379	1.534
<i>Pt</i>		93	12.636	11.553	11.241	11.142	0.411	1.083
<i>Pl</i>		29	11.128	9.941	9.740	9.596	0.345	1.187
<i>Pe</i>		16	9.805	8.709	8.483	8.233	0.476	1.096
<i>Ph</i>		10	9.709	8.571	8.348	8.208	0.364	1.138
<i>Plu</i>		25	9.934	8.910	8.678	8.483	0.426	1.024
<i>Pay</i>		94	8.536	7.653	7.509	6.977	0.677	0.883
<i>Po</i>		5	9.581	8.483	8.262	8.247	0.236	1.098
<i>Pdo</i>		44	13.340	12.274	11.912	11.881	0.393	1.066

Cuadro 7.12. Razones de volumen-área basal (V/AB) de media de razón (MR) por IS.

IS	UM	Vta/AB	Vt/AB	Vc/AB	Vcdm/AB	Vp/AB	Vr/AB
1 (Bajo)	784	8.451	7.303	7.111	6.924	0.380	1.148
2 (Medio)	2388	9.800	8.613	8.388	8.208	0.405	1.187
3 (Alto)	851	11.584	10.349	10.076	9.933	0.416	1.235
4 (Muy Alto)	100	13.486	12.154	11.832	11.752	0.402	1.332

Cuadro 7.13. Razones de volumen-área basal (V/AB) de media de razón (MR) por especie e IS.

sp	IS	UM	Vta/AB	Vt/AB	Vc/AB	Vcdm/AB	Vp/AB	Vr/AB
<i>Pa</i>	1 (Bajo)	383	8.983	7.419	7.197	7.072	0.347	1.564
<i>Pd</i>		750	8.362	7.330	7.130	6.963	0.367	1.032
<i>Pt</i>		702	8.209	7.257	7.059	6.901	0.356	0.952
<i>Pl</i>		347	8.612	7.041	6.897	6.718	0.323	1.571
<i>Pe</i>		146	7.770	6.655	6.481	6.349	0.307	1.115
<i>Ph</i>		105	7.898	6.802	6.624	6.437	0.365	1.096
<i>Plu</i>		386	7.572	6.490	6.320	6.147	0.342	1.082
<i>Pay</i>		682	5.854	4.958	4.863	4.378	0.580	0.896
<i>Po</i>		23	7.267	6.261	6.097	5.938	0.323	1.005
<i>Pdo</i>		3	6.755	5.780	5.627	5.519	0.261	0.975
<i>Pa</i>	2 (Medio)	1291	10.392	8.934	8.668	8.568	0.366	1.458
<i>Pd</i>		2310	9.773	8.629	8.395	8.236	0.393	1.144
<i>Pt</i>		2146	9.492	8.490	8.259	8.088	0.402	1.002
<i>Pl</i>		1160	9.705	8.231	8.064	7.881	0.350	1.474
<i>Pe</i>		456	8.496	7.395	7.202	7.006	0.389	1.101
<i>Ph</i>		289	9.277	8.131	7.919	7.764	0.367	1.146
<i>Plu</i>		954	8.457	7.363	7.171	6.968	0.394	1.094
<i>Pay</i>		2177	6.710	5.803	5.693	5.174	0.629	0.907
<i>Po</i>		65	8.737	7.649	7.449	7.288	0.361	1.088
<i>Pdo</i>		12	6.989	6.007	5.849	5.836	0.170	0.982
<i>Pa</i>	3 (Alto)	422	11.958	10.691	10.375	10.307	0.384	1.267
<i>Pd</i>		838	11.726	10.420	10.138	10.012	0.408	1.307
<i>Pt</i>		786	11.000	9.957	9.688	9.542	0.415	1.043
<i>Pl</i>		371	10.721	9.399	9.209	9.026	0.373	1.322
<i>Pe</i>		130	9.466	8.329	8.112	7.950	0.379	1.137
<i>Ph</i>		127	10.532	9.384	9.141	8.984	0.401	1.147
<i>Plu</i>		286	9.362	8.274	8.058	7.852	0.421	1.089
<i>Pay</i>		792	7.676	6.776	6.648	6.104	0.672	0.900
<i>Po</i>		21	8.811	7.867	7.662	7.517	0.350	0.944
<i>Pdo</i>		3	9.613	8.521	8.299	8.233	0.287	1.093
<i>Pa</i>	4 (Muy Alto)	44	13.327	12.259	11.898	11.863	0.396	1.067
<i>Pd</i>		99	13.827	12.305	11.973	11.922	0.383	1.522
<i>Pt</i>		93	12.630	11.549	11.237	11.137	0.411	1.081
<i>Pl</i>		29	11.124	9.935	9.734	9.590	0.345	1.189
<i>Pe</i>		16	9.805	8.709	8.483	8.233	0.476	1.096
<i>Ph</i>		10	9.709	8.571	8.348	8.208	0.364	1.138
<i>Plu</i>		25	9.918	8.894	8.663	8.475	0.419	1.024
<i>Pay</i>		94	8.531	7.651	7.506	6.972	0.678	0.880
<i>Po</i>		5	9.581	8.483	8.262	8.247	0.236	1.098
<i>Pdo</i>		44	8.983	7.419	7.197	7.072	0.347	1.564

7.4. Crecimiento en diámetro normal en el inventario operativo

Cuadro 7.14. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por IS con RM

IS	UM	ST	SP	ICA				
				AB	Vta	Vf	Vta*	Vf*
1 (Bajo)	784	4,822.46	4,309.65	0.2279	2.7158	2.4378	1.8980	1.6344
2 (Medio)	2,388	16,438.74	14,541.86	0.2828	3.7372	3.3980	2.7415	2.4059
3 (Alto)	851	6,767.59	5,993.05	0.3180	4.6973	4.3184	3.6354	3.2479
4 (Muy Alto)	100	952.43	843.63	0.3230	5.2441	4.8248	4.3055	3.8774

ST es la superficie total (ha), SP es la superficie aprovechable (ha), el ICA en AB es dado en $m^2ha^{-1}año^{-1}$ para el volumen en $m^3ha^{-1}año^{-1}$, * implica los volúmenes proyectados de acuerdo a la razón Vta/AB y Vf/AB.

Cuadro 7.15. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por especie e IS con RM.

SP	IS	UM	ST	SP	ICA				
					AB	Vta	Vf	Vta*	Vf*
<i>Pa</i>	1 (Bajo)	245	1,622.81	1,445.73	0.0920	1.1584	1.0260	0.8269	0.6821
<i>Pd</i>		693	4,299.74	3,832.91	0.0767	0.9455	0.8512	0.6441	0.5634
<i>Pt</i>		587	3,648.97	3,255.04	0.0816	0.9551	0.8639	0.6766	0.5980
<i>Pl</i>		203	1,280.05	1,143.28	0.0836	0.9943	0.8772	0.7215	0.5868
<i>Pe</i>		79	543.77	499.01	0.0457	0.5642	0.5037	0.3878	0.3332
<i>Ph</i>		56	344.36	300.78	0.0992	1.1876	1.0648	0.7936	0.6826
<i>Plu</i>		244	1,493.17	1,367.96	0.0628	0.7304	0.6532	0.4829	0.4139
<i>Pay</i>		543	3,382.07	2,997.70	0.0378	0.3975	0.3595	0.2311	0.1961
<i>Po</i>		5	30.71	27.59	0.0702	0.8930	0.8040	0.6321	0.5491
<i>Pdo</i>		2	14.43	13.86	0.0594	0.6765	0.6059	0.4252	0.3631
<i>Pa</i>	2 (Medio)	834	6,441.54	5,676.69	0.0970	1.3603	1.2429	1.0332	0.8920
<i>Pd</i>		2,188	15,197.87	13,459.33	0.1117	1.5363	1.3895	1.0919	0.9631
<i>Pt</i>		1,869	13,250.91	11,721.39	0.0915	1.1852	1.0803	0.8795	0.7867
<i>Pl</i>		751	5,584.18	4,926.98	0.1021	1.3291	1.2084	1.0041	0.8522
<i>Pe</i>		184	1,363.61	1,231.54	0.0451	0.6213	0.5622	0.4417	0.3869
<i>Ph</i>		141	1,009.81	893.36	0.0768	0.9886	0.8957	0.6972	0.6081
<i>Plu</i>		491	3,452.43	3,154.39	0.0611	0.7721	0.6976	0.5273	0.4585
<i>Pay</i>		1,790	13,010.76	11,468.08	0.0470	0.5423	0.4983	0.3275	0.2838
<i>Po</i>		10	77.81	71.89	0.0587	0.7795	0.7005	0.5714	0.4965
<i>Pdo</i>		2	30.93	28.42	0.0379	0.4861	0.4324	0.3615	0.3152
<i>Pa</i>	3 (Alto)	269	2,566.85	2,292.87	0.1086	1.6942	1.5979	1.3521	1.2189
<i>Pd</i>		814	6,510.11	5,763.79	0.1474	2.2839	2.0738	1.7249	1.5311
<i>Pt</i>		673	5,605.23	4,952.85	0.0979	1.4075	1.2942	1.1038	1.0003
<i>Pl</i>		226	2,081.44	1,858.63	0.0892	1.2672	1.1895	0.9940	0.8805
<i>Pe</i>		37	411.09	375.99	0.0447	0.6552	0.5981	0.4822	0.4285
<i>Ph</i>		49	385.13	343.01	0.0528	0.8243	0.7645	0.5925	0.5325
<i>Plu</i>		130	1,103.25	987.77	0.0443	0.5935	0.5444	0.4100	0.3612
<i>Pay</i>		695	5,713.69	5,049.11	0.0540	0.6817	0.6359	0.4276	0.3779
<i>Po</i>		4	33.82	30.13	0.0207	0.3076	0.2798	0.2187	0.1934
<i>Pdo</i>		1	6.20	6.08	0.0966	1.6048	1.4902	1.2279	1.1131
<i>Pa</i>	4 (Muy Alto)	27	326.92	288.78	0.1048	1.7660	1.6989	1.5104	1.4129
<i>Pd</i>		98	943.46	836.44	0.1706	2.9545	2.6790	2.3629	2.1036
<i>Pt</i>		81	827.05	730.48	0.0975	1.5327	1.4152	1.2640	1.1562

Cuadro 7.15. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por especie e IS con RM continuación.

SP	IS	UM	ST	SP	ICA				
					AB	Vta	Vf	Vta*	Vf*
<i>Pl</i>		14	166.70	148.68	0.0935	1.3901	1.3236	1.1723	1.0726
<i>Pe</i>		4	72.76	67.93	0.0466	0.7037	0.6387	0.5617	0.4953
<i>Ph</i>		1	5.42	4.62	0.0452	0.7074	0.6405	0.5091	0.4464
<i>Plu</i>		14	118.51	108.75	0.0673	0.9608	0.8813	0.7191	0.6412
<i>Pay</i>		84	822.93	727.18	0.0601	0.8181	0.7697	0.5390	0.4836
<i>Po</i>		27	326.92	288.78	0.1048	1.7660	1.6989	1.5104	1.4129

Cuadro 7.16. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por IS con MR.

IS	UM	ST	SP	ICA				
				AB	Vta	Vf	Vta*	Vf*
1 (Bajo)	784	4,822.46	4,309.65	0.2414	2.8701	2.5776	1.9984	1.7206
2 (Medio)	2,388	16,438.74	14,541.86	0.3007	3.9658	3.6084	2.9001	2.5461
3 (Alto)	851	6,767.59	5,993.05	0.3375	4.9763	4.5777	3.8462	3.4373
4 (Muy Alto)	100	952.43	843.63	0.3424	5.5524	5.1159	4.5539	4.1044

Cuadro 7.17. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por especie e IS con MR.

SP	IS	UM	ST	SP	ICA				
					AB	Vta	Vf	Vta*	Vf*
<i>Pa</i>	1 (Bajo)	245	1,622.81	1,445.73	0.0982	1.2332	1.0916	0.8765	0.7218
<i>Pd</i>		693	4,299.74	3,832.91	0.0814	0.9977	0.8996	0.6763	0.5922
<i>Pt</i>		587	3,648.97	3,255.04	0.0864	1.0092	0.9132	0.7117	0.6291
<i>Pl</i>		203	1,280.05	1,143.28	0.0897	1.0668	0.9412	0.7731	0.6285
<i>Pe</i>		79	543.77	499.01	0.0466	0.5762	0.5146	0.3961	0.3404
<i>Ph</i>		56	344.36	300.78	0.1051	1.2602	1.1307	0.8415	0.7242
<i>Plu</i>		244	1,493.17	1,367.96	0.0632	0.7347	0.6571	0.4856	0.4162
<i>Pay</i>		543	3,382.07	2,997.70	0.0397	0.4175	0.3776	0.2422	0.2055
<i>Po</i>		5	30.71	27.59	0.0760	0.9612	0.8668	0.6721	0.5840
<i>Pdo</i>		2	14.43	13.86	0.0594	0.6765	0.6059	0.4252	0.3631
<i>Pa</i>	2 (Medio)	834	6,441.54	5,676.69	0.1023	1.4323	1.3084	1.0849	0.9358
<i>Pd</i>		2,188	15,197.87	13,459.33	0.1194	1.6343	1.4806	1.1572	1.0220
<i>Pt</i>		1,869	13,250.91	11,721.39	0.0977	1.2637	1.1522	0.9347	0.8361
<i>Pl</i>		751	5,584.18	4,926.98	0.1073	1.3967	1.2700	1.0542	0.8946
<i>Pe</i>		184	1,363.61	1,231.54	0.0462	0.6353	0.5748	0.4511	0.3950
<i>Ph</i>		141	1,009.81	893.36	0.0806	1.0381	0.9408	0.7310	0.6377
<i>Plu</i>		491	3,452.43	3,154.39	0.0625	0.7898	0.7136	0.5393	0.4690
<i>Pay</i>		1,790	13,010.76	11,468.08	0.0494	0.5710	0.5247	0.3443	0.2984
<i>Po</i>		10	77.81	71.89	0.0604	0.8026	0.7211	0.5891	0.5119
<i>Pdo</i>		2	30.93	28.42	0.0379	0.4861	0.4324	0.3615	0.3152
<i>Pa</i>	3 (Alto)	269	2,566.85	2,292.87	0.1142	1.7831	1.6824	1.4218	1.2820
<i>Pd</i>		814	6,510.11	5,763.79	0.1569	2.4215	2.2015	1.8267	1.6227
<i>Pt</i>		673	5,605.23	4,952.85	0.1034	1.4866	1.3673	1.1632	1.0543
<i>Pl</i>		226	2,081.44	1,858.63	0.0937	1.3301	1.2486	1.0427	0.9236
<i>Pe</i>		37	411.09	375.99	0.0467	0.6835	0.6237	0.5024	0.4463
<i>Ph</i>		49	385.13	343.01	0.0569	0.8922	0.8278	0.6428	0.5782
<i>Plu</i>		130	1,103.25	987.77	0.0527	0.6941	0.6346	0.5047	0.4447

Cuadro 7.17. Incremento corriente anual en volumen y área basal (ICA) por especie e IS con MR continuación.

SP	IS	UM	ST	SP	ICA				
					AB	SP	IS	UM	ST
Pay		695	5,713.69	5,049.11	0.0576	0.7285	0.6797	0.4571	0.4040
Po		4	33.82	30.13	0.0207	0.3076	0.2798	0.2187	0.1934
Pdo		1	6.20	6.08	0.1011	1.6503	1.5278	1.2567	1.1339
Pa		27	326.92	288.78	0.1107	1.8743	1.8059	1.5986	1.4959
Pd		98	943.46	836.44	0.1804	3.1101	2.8249	2.4876	2.2166
Pt		81	827.05	730.48	0.1036	1.6335	1.5093	1.3428	1.2288
Pl		14	166.70	148.68	0.0958	1.4262	1.3581	1.2012	1.0990
Pe	4	4	72.76	67.93	0.0472	0.7117	0.6462	0.5669	0.5001
Ph	(Muy Alto)	1	5.42	4.62	0.0452	0.7074	0.6405	0.5091	0.4464
Plu		14	118.51	108.75	0.0661	0.9425	0.8646	0.7062	0.6297
Pay		84	822.93	727.18	0.0640	0.8724	0.8209	0.5730	0.5140
Po		27	326.92	288.78	0.0982	1.2332	1.0916	0.8765	0.7218

7.5. Ecuación dinámica con polimorfismo complejo y múltiples asíntotas en el inventario operativo

Cuadro 7.18. Superficies por categoría de IS y forma de clasificación (FC).

FC	IS	CLAS	CC	UM	ST (ha)	SA (ha)	UMP (%)	STP (%)	SAP (%)
1	10-15	1	Bajo	784	4,822.46	4,309.65	19.02	16.64	16.78
	20-25	2	Medio	2388	16,438.74	14,541.86	57.92	56.72	56.61
	30-35	3	Alto	851	6,767.59	5,993.05	20.64	23.35	23.33
	40-45	4	Muy Alto	100	952.43	843.63	2.43	3.29	3.28
2	10-15	1	Bajo	1767	10,914.76	9,705.6	42.86	37.66	37.78
	20-25	2	Medio	2033	15,112.94	13,362.26	49.31	52.15	52.02
	30-35	3	Alto	306	2,758.02	2,448.55	7.42	9.52	9.53
	40-45	4	Muy Alto	17	195.5	171.78	0.41	0.67	0.67
3	10-15	1	Bajo	1979	13,455.57	11,985.66	48.00	46.43	46.66
	20-25	2	Medio	1944	14,091.75	12,437.51	47.15	48.62	48.42
	30-35	3	Alto	198	14,25.52	1,257.68	4.80	4.92	4.90
	40-45	4	Muy Alto	2	8.38	7.34	0.05	0.03	0.03
Total				4,123	28,981.22	25,688.19	100	100	100

FC es la forma de clasificación, IS es el Índice de Sitio, CLAS es la Clasificación ordinal, CC es la clasificación cualitativa, UM es la unidad de manejo, ST es la superficie total, SA es la superficie aprovechable, UMP es el porcentaje de UM's por categoría con respecto al total y STP y SAP son el porcentaje de las superficie total y aprovechable respectivamente, con respecto al total por FC.

7.6. Modelación dinámica de distribuciones diamétricas en el inventario operativo

7.6.1. Parámetros estimados

7.6.1.1. Ajuste

Cuadro 7.19. Estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull por los métodos analizados en el proceso de ajuste.

Parcela	Na	ME			MLE			PE			PPE		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	42	10.10	9.61	1.06	10.10	9.18	0.94	10.10	8.50	1.19	10.04	9.61	1.10
2	34	11.98	15.38	2.06	11.98	15.09	1.90	11.98	15.22	2.48	12.03	15.69	1.79
3	20	12.40	16.83	1.54	12.40	18.73	1.85	12.40	19.90	1.64	12.33	17.04	1.59
5	61	9.90	5.87	1.26	9.90	5.80	1.21	9.90	5.60	1.35	9.84	5.76	1.17
6	35	10.19	11.25	1.38	10.19	10.70	1.15	10.19	13.21	1.09	10.14	11.27	1.41
7	29	10.07	12.69	1.33	10.07	12.19	1.15	10.07	15.23	1.12	10.04	12.70	1.39
8	60	10.60	10.25	1.40	10.60	9.89	1.24	10.60	10.20	1.43	10.54	10.24	1.38
9	56	10.49	10.92	1.67	10.49	10.69	1.53	10.49	11.01	1.77	10.44	10.99	1.52
10	51	10.77	8.75	1.46	10.77	8.56	1.33	10.77	9.33	1.19	10.74	8.67	1.35
11	25	11.82	17.18	1.47	11.82	16.67	1.31	11.82	19.88	1.39	11.83	17.24	1.53
12	43	10.80	12.66	1.30	10.80	12.12	1.12	10.80	12.30	1.23	10.74	12.68	1.34
13	56	9.70	10.92	1.23	9.70	10.42	1.06	9.70	10.70	1.25	9.64	10.91	1.30
14	67	9.12	18.06	2.02	9.12	17.88	1.94	9.12	18.58	2.26	9.14	18.63	2.00
15	32	9.89	12.29	1.21	9.89	11.78	1.07	9.89	15.61	1.19	9.84	12.27	1.28
16	58	10.68	9.87	1.25	10.68	9.66	1.16	10.68	10.12	0.95	10.64	9.82	1.27
17	38	10.00	13.95	1.18	10.00	14.98	1.26	10.00	13.60	1.02	9.94	13.91	1.20
18	10	13.57	29.15	1.85	13.57	28.64	1.76	13.57	31.93	1.74	15.11	27.99	1.97
19	17	9.86	23.82	1.17	9.86	21.50	0.88	9.86	23.84	0.85	9.84	23.56	0.93
20	20	10.64	18.46	1.30	10.64	18.05	1.20	10.64	25.46	1.23	10.83	18.17	1.32
21	30	13.10	11.09	1.58	13.10	10.52	1.28	13.10	11.40	1.67	13.02	11.08	1.48
22	17	10.74	15.24	1.40	10.74	14.52	1.17	10.74	16.06	1.18	10.74	15.29	1.47
23	40	9.80	13.31	1.43	9.80	12.67	1.19	9.80	14.60	1.33	9.74	13.39	1.50
24	69	9.70	7.42	1.07	9.70	7.17	0.98	9.70	7.10	0.96	9.64	7.41	1.13
25	13	12.35	18.18	1.53	12.35	16.88	1.13	12.35	20.15	1.73	12.33	18.40	1.62
26	43	10.30	6.23	0.75	10.30	4.94	0.45	10.30	5.80	0.80	10.24	6.38	0.61
28	43	9.70	6.52	1.11	9.70	6.28	1.00	9.70	6.10	1.07	9.64	6.49	1.14
29	17	15.90	19.03	1.25	15.90	17.12	0.90	15.90	22.30	1.39	15.80	19.11	1.34
30	19	10.17	11.44	0.95	10.17	10.69	0.83	10.17	11.53	0.96	10.14	11.42	0.83
31	37	11.00	15.48	1.55	11.00	14.58	1.20	11.00	16.80	1.48	10.93	15.65	1.58
32	30	10.60	7.84	1.04	10.60	7.27	0.87	10.60	8.50	0.81	10.54	7.86	1.09
34	73	9.09	8.44	1.40	9.09	8.30	1.31	9.09	8.71	1.35	9.05	8.41	1.38
35	43	10.17	15.91	2.13	10.17	15.68	2.00	10.17	16.23	2.45	10.24	16.36	1.88
36	11	20.44	11.66	1.84	20.44	10.85	1.27	20.44	11.66	1.01	20.38	11.33	1.81
37	25	12.59	15.38	1.80	12.59	14.59	1.40	12.59	14.91	1.60	12.52	15.67	1.70
38	47	12.48	11.69	1.57	12.48	11.35	1.38	12.48	11.72	1.44	12.43	11.69	1.49
39	52	8.64	9.28	1.51	8.64	9.33	1.56	8.64	8.46	1.58	8.75	9.11	1.46
40	12	10.00	14.27	1.21	10.00	12.08	0.76	10.00	14.50	1.32	9.94	14.36	1.31
41	37	10.00	7.35	1.00	10.00	8.12	1.12	10.00	6.70	0.87	9.94	7.38	1.06
42	24	9.90	8.83	1.08	9.90	8.24	0.91	9.90	12.10	1.05	9.84	8.85	1.15

Cuadro 7.19. Estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull por los métodos analizados en proceso de ajuste continuación.

Parcela	Na	ME			MLE			PE			PPE		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
43	10	13.43	14.12	1.32	13.43	13.23	1.07	13.43	13.57	0.94	13.42	14.17	1.42
44	41	10.60	7.41	1.16	10.60	7.00	0.99	10.60	6.70	1.04	10.54	7.36	1.18
45	30	10.40	8.51	1.11	10.40	8.99	1.07	10.40	9.90	0.84	10.34	8.52	1.16
46	63	9.60	9.95	1.17	9.60	7.96	0.60	9.60	11.60	1.12	9.54	9.93	1.23
47	33	10.79	10.92	1.33	10.79	10.48	1.15	10.79	9.91	1.25	10.74	10.93	1.35
48	15	10.70	10.81	1.10	10.70	10.47	1.01	10.70	12.60	1.10	10.74	10.74	1.15
50	29	11.10	7.59	1.05	11.10	7.06	0.88	11.10	8.20	0.88	11.03	7.60	1.10
51	40	9.90	7.70	0.96	9.90	7.28	0.85	9.90	7.20	0.87	9.84	7.75	0.99
52	13	11.49	9.73	1.12	11.49	8.81	0.86	11.49	10.41	1.19	11.43	9.78	1.19
53	16	10.70	11.76	1.21	10.70	9.73	0.72	10.70	14.60	1.02	10.64	11.81	1.28
55	15	9.67	5.59	1.11	9.67	5.43	1.02	9.67	6.73	0.98	9.64	5.52	1.12
57	10	14.70	7.02	1.50	14.70	5.72	0.71	14.70	6.60	0.60	14.61	6.74	1.35
58	36	9.87	11.30	1.28	9.87	11.12	1.21	9.87	10.93	1.49	9.84	11.27	1.34
59	61	9.98	10.02	1.26	9.98	9.82	1.17	9.98	11.52	1.05	9.94	9.97	1.30
60	22	12.03	15.16	1.51	12.03	14.41	1.22	12.03	17.07	1.08	12.03	15.23	1.54
61	11	11.09	12.90	0.97	11.09	10.35	0.64	11.09	17.01	0.66	11.03	13.03	0.87
62	20	10.10	5.97	0.75	10.10	5.37	0.65	10.10	4.10	0.89	10.04	6.18	0.66
63	20	10.15	7.54	0.92	10.15	7.52	0.92	10.15	4.85	1.10	10.14	7.58	0.94
64	37	11.45	16.19	1.61	11.45	15.66	1.38	11.45	20.25	1.45	11.43	16.35	1.62
65	12	10.29	10.88	1.20	10.29	9.21	0.76	10.29	10.71	0.78	10.24	10.95	1.29

7.6.1.2. Validación

Cuadro 7.20. Estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull por los métodos analizados en el proceso de validación.

Parcela	Na	ME			MLE			PE			PPE		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	49	10.00	6.50	0.86	10.00	8.77	1.13	10.00	7.00	0.85	9.94	6.60	0.87
2	60	10.00	6.11	1.20	10.00	7.02	1.39	10.00	6.00	1.08	9.94	6.02	1.16
3	50	10.00	8.07	1.06	10.00	9.34	1.20	10.00	8.00	0.92	9.94	8.07	1.12
4	51	10.00	4.62	0.96	10.00	5.77	1.16	10.00	4.00	1.06	9.94	4.61	1.00
5	51	10.00	3.99	0.67	10.00	5.59	0.87	10.00	3.00	0.88	9.94	4.21	0.59
6	58	10.00	4.07	0.77	10.00	6.19	1.13	10.00	5.00		9.94	4.23	0.82
7	61	10.00	7.72	1.05	10.00	8.93	1.27	10.00	8.00	0.86	9.94	7.72	1.10
8	51	9.97	5.30	0.92	9.97	5.64	1.05	9.97	6.03	1.09	9.94	5.32	0.97
9	45	10.00	12.77	1.64	10.00	13.46	1.83	10.00	11.00	1.92	9.94	12.94	1.60
10	58	10.00	14.82	0.98	10.00	16.74	1.06	10.00	14.00	0.91	9.94	14.57	0.67
11	57	10.00	11.38	1.30	10.00	12.74	1.48	10.00	12.00	1.13	9.94	11.38	1.35
12	55	10.00	10.35	1.24	10.00	11.27	1.41	10.00	10.00	1.27	9.94	10.34	1.29
13	47	12.97	12.27	1.51	12.97	12.08	1.43	12.97	12.03	1.38	12.922	12.25	1.47
14	46	10.00	10.44	1.18	10.00	11.90	1.39	10.00	11.00	1.26	9.94	10.43	1.23
15	49	9.47	15.23	1.90	9.47	15.22	1.92	9.47	14.53	1.95	9.94	14.94	1.74
16	63	10.00	8.98	0.96	10.00	10.42	1.18	10.00	9.00	1.00	9.94	8.98	0.94
17	48	9.79	23.78	1.95	9.79	23.47	1.85	9.79	25.21	1.97	9.94	24.36	2.06
18	45	10.00	16.74	1.50	10.00	17.70	1.66	10.00	17.00	1.41	9.94	16.91	1.59
19	49	10.00	9.00	1.07	10.00	11.64	1.46	10.00	10.00	0.88	9.94	9.00	1.11
20	45	10.00	10.20	1.07	10.00	11.41	1.23	10.00	10.00	1.03	9.94	10.19	1.10
21	45	11.00	16.59	1.26	11.00	18.56	1.41	11.00	16.00	0.96	10.934	16.57	1.27
22	45	10.00	6.90	0.91	10.00	8.18	1.08	10.00	6.00	0.92	9.94	6.97	0.94

Cuadro 7.20. Estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull por los métodos analizados en el proceso de validación continuación.

Parcela	Na	ME			MLE			PE			PPE		
		a	b	c	a	a	b	c	a	a	b	c	a
23	47	10.00	6.74	0.96	10.00	7.55	1.13	10.00	6.00	1.14	9.94	6.78	1.01
24	45	10.00	7.10	1.00	10.00	8.86	1.25	10.00	5.00	1.18	9.94	7.13	1.05
25	55	10.00	12.89	1.18	10.00	14.64	1.37	10.00	15.00	0.96	9.94	12.85	1.22
26	58	10.00	8.88	1.20	10.00	10.10	1.43	10.00	9.00	1.13	9.94	8.85	1.24
27	82	10.96	12.22	1.77	10.96	12.02	1.64	10.96	12.04	1.75	10.934	12.34	1.59
28	49	10.00	9.54	1.04	10.00	11.50	1.24	10.00	9.00	1.05	9.94	9.53	1.07
29	47	10.98	15.12	1.57	10.98	14.85	1.47	10.98	14.03	1.71	10.934	15.25	1.58
30	70	10.00	7.25	1.18	10.00	8.04	1.32	10.00	8.00	1.00	9.94	7.20	1.19
31	47	11.00	7.97	0.95	11.00	10.49	1.21	11.00	9.00		10.934	8.02	0.97
32	69	10.00	10.81	1.57	10.00	11.47	1.79	10.00	10.00	2.05	9.94	10.88	1.50
33	51	10.00	8.49	1.18	10.00	10.90	1.62	10.00	9.00		9.94	8.47	1.22
34	44	10.00	11.01	1.16	10.00	12.32	1.25	10.00	12.00	0.89	9.94	11.00	1.21
35	79	10.00	12.41	1.54	10.00	13.01	1.66	10.00	13.00	1.54	9.94	12.51	1.53
36	68	9.59	9.86	2.05	9.59	9.86	2.06	9.59	8.41	2.64	9.94	9.51	1.53
37	53	10.00	7.71	0.99	10.00	9.86	1.27	10.00	8.00	0.87	9.94	7.73	1.03
38	47	9.93	7.59	1.94	9.93	7.50	1.85	9.93	8.07	1.85	9.94	7.51	1.41
39	51	10.96	11.64	1.64	10.96	11.40	1.51	10.96	13.04	1.61	10.934	11.69	1.53
40	50	10.00	14.19	1.18	10.00	16.87	1.46	10.00	15.00	0.95	9.94	14.13	1.20
41	48	9.97	10.53	1.32	9.97	10.40	1.26	9.97	10.03	1.17	9.94	10.49	1.35
42	42	10.00	8.71	0.91	10.00	10.71	1.09	10.00	8.00	1.03	9.94	8.75	0.85
43	46	11.00	9.76	1.33	11.00	10.69	1.52	11.00	10.00	1.16	10.934	9.74	1.32
44	56	10.00	6.37	1.19	10.00	6.97	1.37	10.00	7.00	1.25	9.94	6.29	1.17
45	78	10.00	7.74	0.96	10.00	9.19	1.16	10.00	7.00	1.11	9.94	7.77	0.98
46	46	12.00	11.51	1.34	12.00	12.15	1.43	12.00	12.00	1.36	11.928	11.50	1.36
47	42	10.00	18.94	1.66	10.00	20.05	1.88	10.00	20.00	1.61	9.94	19.29	1.76
48	43	10.00	12.25	1.13	10.00	12.95	1.16	10.00	12.00	1.06	9.94	12.22	1.16
49	50	10.00	11.93	1.38	10.00	12.77	1.47	10.00	16.00	1.11	9.94	11.97	1.43
50	49	10.00	6.19	0.89	10.00	8.06	1.08	10.00	5.00	0.92	9.94	6.27	0.93
51	53	9.98	8.96	1.21	9.98	9.05	1.26	9.98	10.02	1.36	9.94	8.91	1.24
52	57	10.00	23.57	1.12	10.00	26.36	1.28	10.00	20.00	1.14	9.94	23.09	0.71
53	61	10.00	11.73	1.30	10.00	12.31	1.38	10.00	13.00	1.29	9.94	11.73	1.35
54	46	9.97	12.77	1.18	9.97	12.56	1.13	9.97	12.03	1.19	9.94	12.70	1.22
55	61	10.00	7.45	1.01	10.00	9.44	1.28	10.00	8.00	0.90	9.94	7.47	1.06
56	64	9.97	14.45	1.54	9.97	14.35	1.51	9.97	13.03	1.51	9.94	14.56	1.58
57	54	10.00	11.03	1.25	10.00	11.69	1.36	10.00	11.00	1.22	9.94	11.02	1.30
58	54	10.00	8.66	0.98	10.00	10.44	1.19	10.00	8.00	1.08	9.94	8.68	1.00
59	41	10.00	7.75	1.08	10.00	9.32	1.32	10.00	8.00	0.90	9.94	7.75	1.14
60	53	10.00	7.90	0.97	10.00	9.91	1.22	10.00	7.00	0.86	9.94	7.93	1.00
61	51	10.95	11.46	1.87	10.95	11.24	1.71	10.95	11.05	2.06	10.934	11.57	1.59
62	62	10.00	6.49	0.93	10.00	8.00	1.15	10.00	7.00	0.85	9.94	6.55	0.97
63	51	10.00	7.84	0.85	10.00	9.64	1.05	10.00	8.00	1.11	9.94	7.90	0.76
64	48	10.00	2.78	0.66	10.00	4.94	1.03	10.00	4.00		9.94	2.99	0.70
65	45	10.00	5.64	0.86	10.00	7.80	1.22	10.00	6.00	0.87	9.94	5.75	0.89
66	47	10.00	10.96	1.41	10.00	11.82	1.54	10.00	13.00	1.20	9.94	10.99	1.42
67	51	9.73	11.76	2.35	9.73	11.68	2.31	9.73	11.27	2.26	9.94	11.87	1.72
68	54	10.00	10.64	1.61	10.00	11.43	1.88	10.00	12.00	1.64	9.94	10.72	1.51
69	57	10.00	10.43	1.27	10.00	11.83	1.53	10.00	10.00	1.36	9.94	10.43	1.32
70	57	10.00	13.58	1.71	10.00	14.20	1.92	10.00	13.00	2.02	9.94	13.81	1.66
71	71	10.00	10.21	1.11	10.00	11.56	1.32	10.00	9.00	1.27	9.94	10.19	1.15
72	44	10.00	10.12	1.50	10.00	11.11	1.84	10.00	9.00	1.64	9.94	10.16	1.45

Cuadro 7.20. Estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull por los métodos analizados en el proceso de validación continuación.

Parcela	Na	ME			MLE			PE			PPE		
		a	b	c	a			a	b	c	a		
73	50	10.00	8.33	0.82	10.00	10.05	0.99	10.00	8.00	0.96	9.94	8.35	0.61
74	45	10.00	13.00	1.40	10.00	14.67	1.74	10.00	12.00	1.39	9.94	13.06	1.46
75	47	9.86	19.46	2.63	9.86	19.12	2.43	9.86	19.14	3.05	9.94	20.55	2.19
76	47	10.00	8.05	1.29	10.00	9.09	1.55	10.00	8.00	1.27	9.94	8.01	1.28
77	58	10.00	7.84	1.17	10.00	9.34	1.43	10.00	8.00	0.94	9.94	7.81	1.20
78	47	11.00	5.67	1.26	11.00	6.25	1.45	11.00	5.00	1.08	10.934	5.51	1.16
79	54	10.00	8.94	0.94	10.00	11.75	1.19	10.00	10.00	0.81	9.94	8.95	0.90
80	49	9.98	10.62	1.02	9.98	10.65	1.03	9.98	12.02	1.10	9.94	10.57	1.01
81	46	10.00	11.64	1.15	10.00	14.52	1.49	10.00	13.00	1.01	9.94	11.62	1.19
82	48	10.00	7.35	1.17	10.00	7.91	1.31	10.00	7.00	1.34	9.94	7.31	1.20
83	40	10.00	5.80	0.74	10.00	7.48	0.93	10.00	5.00	0.81	9.94	5.96	0.60
84	41	10.00	8.76	0.90	10.00	10.26	1.01	10.00	7.00	0.83	9.94	8.80	0.83
85	69	10.00	7.47	1.54	10.00	7.76	1.65	10.00	8.00	1.41	9.94	7.41	1.34
86	45	11.00	8.77	1.41	11.00	9.36	1.61	11.00	9.00	1.59	10.934	8.71	1.34
87	43	10.00	12.44	1.30	10.00	13.48	1.38	10.00	17.00	1.08	9.94	12.46	1.37
88	41	10.00	13.09	1.07	10.00	13.97	1.12	10.00	13.00	0.97	9.94	13.02	1.02
89	45	11.00	9.32	1.56	11.00	9.81	1.70	11.00	9.00	1.30	10.934	9.31	1.41
90	42	9.98	10.30	1.03	9.98	10.57	1.10	9.98	11.02	1.21	9.94	10.27	1.03
91	50	10.00	6.30	1.01	10.00	7.45	1.20	10.00	7.00	0.92	9.94	6.31	1.06
92	53	10.00	11.03	0.83	10.00	13.09	0.98	10.00	8.00	1.00	9.94	10.85	0.34
93	50	9.98	11.30	1.05	9.98	11.34	1.06	9.98	10.02	1.05	9.94	11.23	1.03
94	43	9.98	17.28	1.27	9.98	16.55	1.10	9.98	19.02	1.22	9.94	17.21	1.31
95	48	10.00	8.19	1.30	10.00	9.00	1.52	10.00	8.00	1.51	9.94	8.15	1.29
96	48	10.00	6.94	1.27	10.00	7.60	1.44	10.00	8.00	1.34	9.94	6.87	1.23
97	66	10.00	7.99	0.86	10.00	10.31	1.13	10.00	9.00	0.77	9.94	8.03	0.77
98	50	10.00	6.88	1.37	10.00	7.33	1.55	10.00	6.00	1.30	9.94	6.80	1.26
99	50	9.97	16.83	1.92	9.97	16.41	1.69	9.97	19.03	1.87	9.94	17.31	1.86
100	50	9.97	14.47	1.50	9.97	14.30	1.44	9.97	15.03	1.49	9.94	14.57	1.55

7.6.2. Implementación de resultados

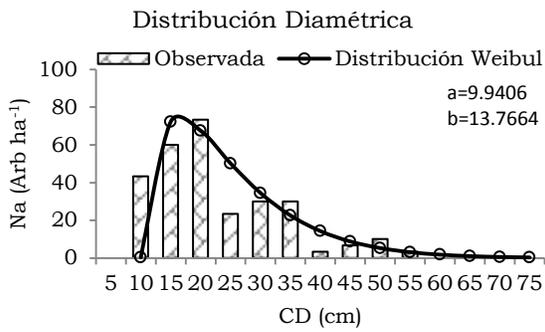
Cuadro 7.21. Estadísticos de los estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull y las variables asociadas.

Variable	IS	UM	Mínimo	Media	Máximo	SD
Na			20	78	217	31.577
Dmin			15.247	20.092	28.962	2.376
\bar{D}			24.000	48.162	76.000	8.342
Dmax			10.000	10.142	17.000	0.589
Emin			43	57	82	6.841
\bar{E}	1 (Bajo)	543	68	138	220	24.434
Emax			28	28	48	1.670
Dq			16.050	21.884	31.396	2.670
a			9.941	10.082	16.899	0.586
b			1.985	10.407	22.320	2.746
c			0.471	1.178	2.093	0.244
Na			20	87	331	38.530
Dmin	2 (Medio)	1783	14.839	22.217	35.207	2.972
\bar{D}			30.000	53.147	100.000	9.959

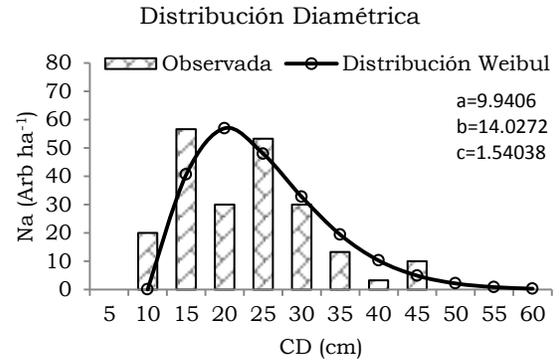
Cuadro 7.21. Estadísticos de los estimadores de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull y las variables asociadas continuación.

Variable	IS	UM	Mínimo	Media	Máximo	SD
Dmax			10.000	10.161	25.000	0.664
Emin			41	63	100	8.577
\bar{E}			85	153	291	29.254
Emax			28	28	71	1.886
Dq			15.841	24.324	40.003	3.268
a			9.941	10.101	24.852	0.660
b			1.314	12.824	29.010	3.455
c			0.430	1.249	2.278	0.275
Na			22	94	392	47.321
Dmin			17.228	24.394	52.455	3.933
\bar{D}			38.000	61.047	102.000	11.197
Dmax			10.000	10.246	19.000	0.891
Emin			48	69	151	11.387
\bar{E}	3 (Alto)	617	108	176	297	32.988
Emax			28	28	53	2.529
Dq			19.502	27.063	55.978	4.294
a			9.941	10.186	18.887	0.885
b			6.451	14.984	39.805	4.388
c			0.450	1.203	2.297	0.312
Na			24	92	218	41.996
Dmin			19.932	28.507	43.231	5.069
\bar{D}			50.000	71.915	100.000	12.949
Dmax			10.000	10.437	15.000	1.052
Emin			56	81	124	14.692
\bar{E}	4 (Muy Alto)	71	143	208	291	38.274
Emax			28	29	42	2.983
Dq			22.530	31.755	45.688	5.241
a			9.941	10.375	14.911	1.046
b			9.396	19.483	37.088	5.782
c			0.621	1.279	2.452	0.403

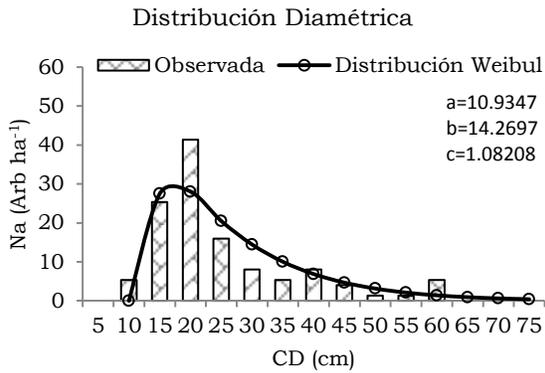
Na es el número de árboles en la agregación de los sitios de muestreo por UM, Dmin es el diámetro mínimo, \bar{D} es el diámetro medio, Dmax es el diámetro máximo, Emin es la edad mínima, \bar{E} es la edad media, Emax es la edad máxima, Dq es el diámetro cuadrático y a, b y c son los parámetros de localización, escala y forma de la distribución Weibull.



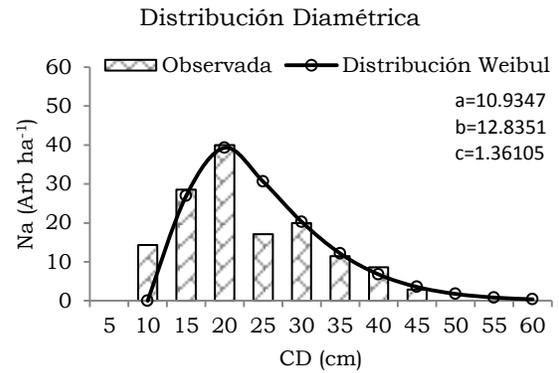
Aa0101



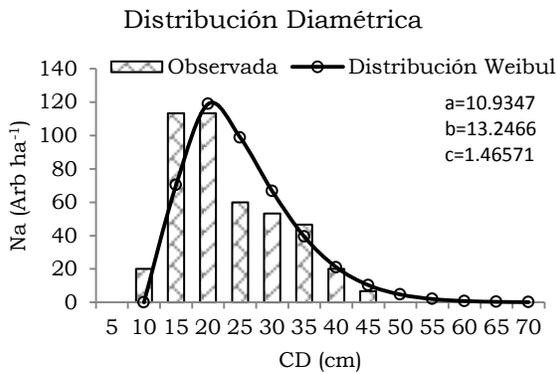
Aa0202



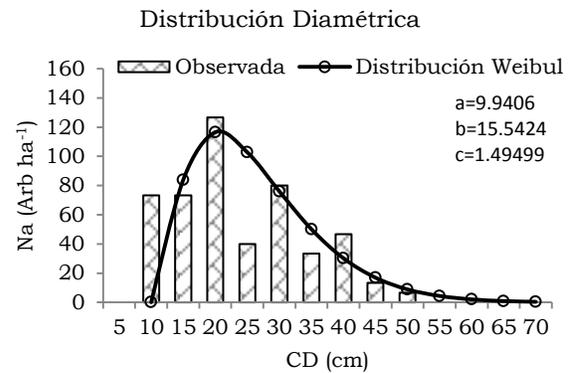
Aa0303



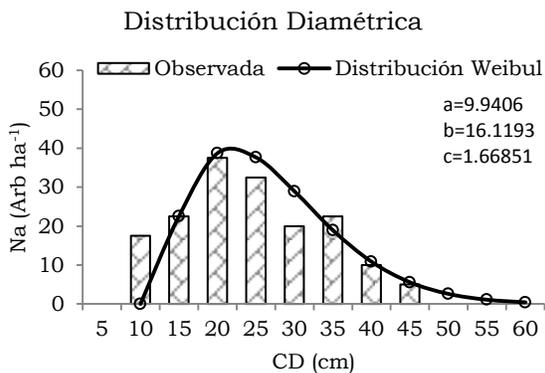
Aa0304



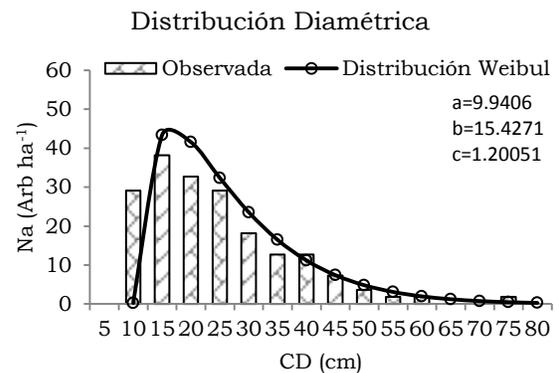
Ab0101



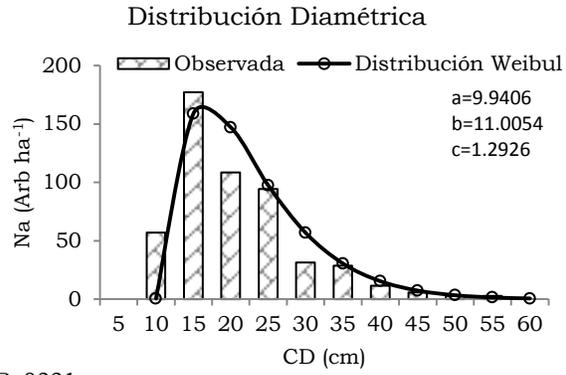
Ba0212



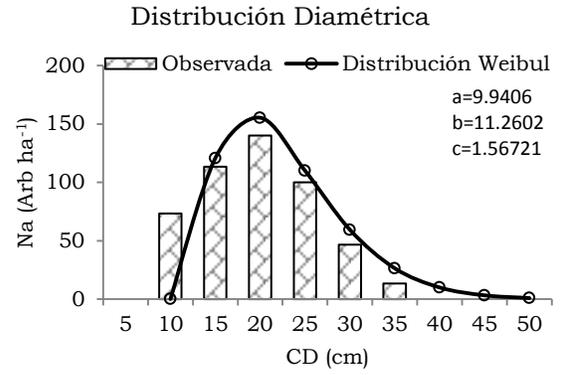
Ba0309



Ba0324



Ba0331



Ba0331

Figura 7.1. Gráficas de distribuciones diamétricas para 10 UM's.

7.7. Datos usados para la implementación de los modelos

Cuadro 7.22. Estadísticos de la base de datos usada para la implementación de resultados de los modelos desarrollados.

SP	Tam	Dn			H			AB			Na			Dq			D0			H0		
		Mi	Me	SD	Mi	Me	SD	Mi	Me	SD	Mi	Me	SD	Mi	Me	SD	Mi	Me	SD	Mi	Me	SD
<i>Pa</i>	0.05	10	23	8.7	4	13	4.66	0.0079	0.3694	0.394	1	8	9.0	10	24	9.0	17	35	7.6	8	17	4.3
<i>Pd</i>		10	20	6.6	3	12	3.56	0.0079	0.4660	0.367	1	12	9.0	10	22	7.1	13	34	7.6	8	17	4.0
<i>Pt</i>		10	22	7.7	3	13	4.00	0.0079	0.3792	0.322	1	9	7.5	10	23	8.0	13	34	7.2	8	17	3.9
<i>Pl</i>		10	22	6.6	3	12	3.67	0.0079	0.3744	0.361	1	9	9.0	10	23	6.8	15	33	6.5	8	16	3.8
<i>Pe</i>		10	22	9.3	4	12	4.31	0.0079	0.1257	0.175	1	3	3.8	10	23	9.6	17	33	7.2	8	16	3.5
<i>Ph</i>		10	23	8.6	5	13	4.15	0.0079	0.2618	0.288	1	6	7.4	10	23	8.7	16	33	7.0	9	16	3.6
<i>Plu</i>		10	20	6.9	3	11	3.62	0.0079	0.1611	0.197	1	4	5.2	10	20	7.1	17	34	7.2	8	16	3.7
<i>Pay</i>		10	18	5.7	3	10	3.22	0.0079	0.1249	0.142	1	4	3.7	10	18	6.1	17	34	7.5	8	17	4.0
<i>Po</i>		10	24	10.8	5	12	5.17	0.0079	0.0725	0.075	1	2	2.5	10	24	10.8	24	33	6.4	8	15	3.0
<i>Pdo</i>		12	16	5.8	6	10	4.49	0.0113	0.1163	0.182	1	3	2.7	12	17	7.5	19	31	7.1	13	15	2.9
<i>Pa</i>	0.10	10	25	9.9	3	14	4.88	0.0079	0.4122	0.480	1	8	8.9	10	26	10.0	14	32	6.5	6	16	3.7
<i>Pd</i>		10	22	7.0	3	12	3.66	0.0079	0.5759	0.467	1	12	8.4	10	24	7.6	14	31	6.9	6	15	3.8
<i>Pt</i>		10	23	7.9	2	12	3.96	0.0079	0.4212	0.384	1	9	7.4	10	24	8.4	14	31	6.8	6	15	3.7
<i>Pl</i>		10	23	7.8	3	12	3.97	0.0079	0.3984	0.448	1	9	9.7	10	24	7.9	14	31	6.5	6	15	3.6
<i>Pe</i>		10	23	9.3	2	12	4.22	0.0079	0.2055	0.274	1	4	4.3	10	24	9.6	16	31	6.8	7	15	3.4
<i>Ph</i>		10	24	9.9	4	12	4.29	0.0079	0.3318	0.388	1	7	8.6	10	24	10.1	14	32	7.6	7	15	3.5
<i>Plu</i>		10	20	7.4	3	11	3.42	0.0079	0.2440	0.264	1	6	6.9	10	21	7.6	14	30	6.5	6	14	3.3
<i>Pay</i>		10	18	6.2	3	10	3.24	0.0079	0.1393	0.152	1	4	4.0	10	19	6.5	14	31	6.8	6	16	3.7
<i>Po</i>		10	22	8.9	3	12	4.95	0.0079	0.1667	0.280	1	3	4.5	10	23	9.3	17	30	6.8	6	15	4.2
<i>Pdo</i>		10	22	10.2	4	10	3.85	0.0079	0.1648	0.278	1	4	4.7	10	22	10.3	22	29	5.3	9	15	4.4
<i>Pa</i>	0.15	10	27	10.7	4	14	5.35	0.0079	0.4483	0.484	1	7	8.3	10	28	10.8	13	29	6.4	7	14	3.8
<i>Pd</i>		10	24	6.9	4	12	3.62	0.0079	0.5592	0.461	1	10	6.6	10	25	7.4	13	28	6.0	6	14	3.4
<i>Pt</i>		10	24	8.2	3	12	3.90	0.0079	0.4082	0.367	1	8	6.7	10	25	8.5	13	28	6.0	6	14	3.5
<i>Pl</i>		10	23	7.8	3	12	3.82	0.0079	0.3591	0.419	1	7	8.3	10	24	7.9	16	27	5.9	7	14	3.3
<i>Pe</i>		10	24	9.5	3	12	4.52	0.0079	0.2785	0.283	1	5	4.4	10	25	9.9	15	27	6.1	7	14	3.2
<i>Ph</i>		10	24	10.5	3	12	4.79	0.0079	0.3151	0.344	1	7	7.1	10	25	10.6	17	28	5.9	8	14	3.1
<i>Plu</i>		10	20	7.3	4	10	3.42	0.0079	0.2587	0.248	1	7	7.1	10	21	7.5	14	26	5.6	6	13	3.1
<i>Pay</i>		10	19	7.1	3	10	3.37	0.0079	0.1213	0.135	1	4	3.2	10	19	7.4	13	27	6.0	6	14	3.4
<i>Po</i>		10	21	11.1	6	11	3.91	0.0079	0.1863	0.296	1	3	4.4	10	22	11.6	18	29	7.9	8	14	4.5
<i>Pdo</i>		20	21	2.5	8	10	1.50	0.1038	0.3073	0.223	3	7	3.7	20	22	2.6	25	30	3.1	12	13	1.0

Pa es *Pinus arizonica*, *Pd* es *Pinus durangensis*, *Pt* es *Pinus teocote*, *Pl* es *Pinus leiophylla*, *Pe* es *Pinus engelmannii*, *Ph* es *Pinus herrerae*, *Plu* es *Pinus lumholtzii*, *Pay* es *Pinus ayacahuite*, *Po* es *Pinus oocarpa*, *Pdo* es *Pinus douglasiana*, Tam es el tamaño del sitio (ha), Dn es el diámetro medio del sitio, H es la altura total, AB es el área basal, Na es el número de árboles, Dq es el diámetro cuadrático, D0 es el diámetro dominante, H0 es la altura dominante, Mi es el mínimo Me es la media y SD es la desviación estándar. Los estadísticos fueron calculados por sitio de muestreo.

7.8. Códigos de SAS para el ajuste de los modelos

7.8.1. Programa SAS para el sistema compatible 2.S3

/*Programa para ajustar el sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial 2.S3 Fang et al., (2000) desarrollado en el Capítulo I. Se parte de una base de datos de ahusamiento y volumen comercial en la que se considera; sitio, Esp=especie Dn=diámetro normal, di=es el diámetro a la altura Hm, h=altura, Hm=altura comercial, Vc=volumen comercial, d1=1 considerando un retardo, dist1=es la diferencia de Hm actual y un retardo, d2=1 considerando dos retardos, dist2=es la diferencia de Hm menos dos retardos lo cual se usa para corregir la autocorrelación con un car(2). En el ajuste se implementan variables indicadoras para diferenciar los parámetros de volumen total y los que explican el ahusamiento entre las especies de estudio el Dn es dado en cm para detectar diferencias en los estimadores de los parámetros*/

```
Data Mixed;
Set Base;
Keep Sitio Esp Dn di H Hm Db Hb VC d1 dist1 d2 dist2;
/*Pa=Pinus arizonica, Pd=Pinus durangensis, Pt=Pinus teocote, Pl=Pinus leiophylla, Pay=Pinus
ayacahuite*/
Run;
Title Modelo segmentado de Fang-Borders-Bailey, (2000) [Volumen comercial y ahusamiento
simultáneo];
Proc Model Data=Mixed Converge=0.01 Maxiter=100; /*Se define el nivel de convergencia y número
de iteraciones*/
Parms a0=0.481314 a1=1.890061 a2=0.905129 b1=0.054583 b2=0.396227 b3=0.316511
a0d=0.481314 a0a=0.01 a0ay=0.01 a0l=0.01 a0t=0.01
a1d=1.890061 a1a=0.1 a1ay=0.1 a1l=0.1 a1t=0.1
a2d=0.905129 a2a=0.1 a2ay=0.1 a2l=0.1 a2t=0.1
b1d=0.054583 b1a=0.01 b1ay=0.01 b1l=0.01 b1t=0.01
b2d=0.396227 b2a=0.01 b2ay=0.01 b2l=0.01 b2t=0.01
b3d=0.396227 b3a=0.01 b3ay=0.01 b3l=0.01 b3t=0.01
p1d=0.0401 p1a=0.035 p1ay=0.040 p1l=0.041 p1t=0.037
p2d=0.71 p2a=0.76 p2ay=0.68 p2l=0.73 p2t=0.74 p1=0.040185 p2=0.668939 p1d1=0.64
p2d1=0.23; /*Se definen los parámetros globales y específicos iniciales para las especies Pinus
durangensis es la especie base a la cual se le suman los efectos de las demás especies*/
k=Constant('pi')/4; */CONSTANTE CUANDO EL Dn ES DADO EN m;
z=(Hm)/(H+0.00001);
I1=(Max((z-p1),0)/(z-p1))*(Max((p2-z),0)/(p2-z));
I2=Max((z-p2),0)/(z-p2);
If Esp='Pa' Then S=1.96550; /*Parámetros del modelo de potencia que corrige la
heterocedasticidad*/
If Esp='Pay' Then S=1.25288;
If Esp='Pd' Then S=1.63552
If Esp='Pl' Then S=1.66197;
If ESP='Pt' Then S=1.57590;
Ia=0; /*Se definen las variables indicadoras para las especies, Pd es la especie base*/
If Esp='Pa' Then Ia=1;
Iay=0;
If Esp='Pay' Then Iay=1;
Il=0;
If Esp='Pl' Then Il=1;
It=0;
If Esp='Pt' Then It=1;
a0=a0d+a0ay*Iay+a0l*Il+a0t*It; /*Se reescriben los parámetros con variables indicadoras con
efectos aditivos a Pd*/
a1=a1d+a1a*Ia+a1t*It;
a2=a2d+a2ay*Iay+a2l*Il;
b1=b1d+b1ay*Iay;
b2=b2d+b2a*Ia+b2ay*Iay;
b3=b3d+b3l*Il;
b=(b1**(1-(I1+I2)))*(b2**I1)*(b3**I2);
```

```

f1=(1-p1)**(((b2-b1)*k)/(b1*b2));
f2=(1-p2)**(((b3-b2)*k)/(b2*b3));
t2=(1-p2)**(k/b2);
t1=(1-p1)**(k/b1);
p0=(Hb/H);
t0=(1-p0)**(k/b1); /*di es el modelo de ahusamiento y Vc de volumen comercial*/
c1=sqrt((a0*(Dn**a1)*H**a2)*H**(-k/b1)/(b1*(t0-t1)+b2*(t1-f1*t2)+b3*f1*t2));
di=((c1*sqrt(H**((k-(b1))/(b1))*((1-z)**((k-b)/b))*f1**(I1+I2))*(f2**I2)))-
d1*p1d1**dist1*ZLag1(Resid.di)-d2*p2d1**dist2*ZLag2(Resid.di); /*Estructura Autorregresiva Car(2) para
corregir autocorrelación en la ecuación de ahusamiento*/
Vc=((c1**2)*H**k/(b1))*((b1)*t0+(I1+I2)*((b2)-(b1))*t1+I2*(b3-(b2))*f1*t2-b*(1-
z)**k/b)*f1**(I1+I2)*f2**I2);
Resid.vc=resid.vc/((Dn**2*H)** (S))**0.5; /*Estructura de potencia que corrige heterocedasticidad
en el volumen comercial*/
Fit di Vc/ Out=Resid Outpredict Outest=Parms dw; /*Se guardan las salidas de los parámetros y
valores predichos y se obtiene el estadístico de Durbin-Watson para medir autocorrelación*/
Run;
Quit;
/*Termina el procedimiento*/

```

7.8.2. Programa SAS para el modelo de crecimiento 3.M6

```

/*Programa para ajustar el modelo de crecimiento en Dn Strand generalizado, Strand, (1964) en
forma GADA, Sharma et al. (2011), el ajuste se realiza bajo el procedimiento "nested iterative procedure"
descrito por Tait et al. (1988), para el ajuste de parámetros globales y específicos, el criterio para
estabilizar el ajuste es cuando el Cuadrado Medio del Error (MSE) es menor a 0.0001 entre dos
iteraciones o estabilizando los parámetros a las 100 iteraciones*/;
/*Llama el fichero de datos*/
Data DatosG; /*Crea el fichero de datos a partir de la información de entrada, Di=diámetro normal,
age=edad*/
Set Bdf01;
Where Esp=Pd; /*En este caso el ajuste consideraba a Pd=Pinus durangensis*/
Ds=25; /*Se fija el parámetro específico como el Dn promedio a la edad de 65 años*/
Run;
Title 'GADA Modelo de Strand 1964 (Sharma, et al., 2011) a=(X), b=((b1+b2x)';
%Macro Ajiter(Base); /*Inicia el procedimiento con la macro Ajiter, la base es la edad de referencia
que se fija al final*/
Proc Model Data=DatosG;
Parms b3=0.716148 b1=0.002512 b2=-0.00239 p1=0.7 p2=0.3; /*Ajusta los parámetros globales
iniciales*/
X0=&base*(Ds**(-1/b3)-b1)/(1+b2*&base);
Di=(age/(X0+age*(b1+b2*X0)))*b3-d1*p1**dist1*ZLag1(Resid.Di)-d2*p2**dist2*ZLag2(Resid.Di);
FIT Di / Outest=SalG Outs=Matrix; /*Ajusta el modelo y genera la matriz de parámetros y los
pone a disposición de la macro para la siguiente iteración*/
Run;
%Let Msechk=1;
%Let i=1;
%Do %Until (&Msechk Lt 0.0001 Or &i=100);
/*La i es el número de iteraciones y Msechk es el Cuadrado Medio del Error (MSE)*/
Data Parmsg;
Set SalG;
Keep b3 b1 b2;
Run;
Data MatrixG;
Set matrix;
Keep Di;
Run;
Data DatosP;
Set DatosG;
If _N_=1 Then Set Parmsg; /*Mezcla las bases de los parámetros globales con la base de datos
iniciales de entrada*/

```

```

Run;
Proc Model Data=DatosP Noprint; /*Ajustar parámetros específicos a partir de los parámetros
globales*/
  By Narbol;
  Parms Dsparm=25;
  X0=&base*(Dsparm**(-1/b3)-b1)/(1+b2*&base);
  Di=(age/(X0+age*(b1+b2*X0)))**b3;
  Fit Di /Outest=SalP;
  Run;
  Data ParmsP; /*Mezcla las bases considerando el ajuste de los parámetros específicos y los pone
a disposición de la macro*/
  Set SalP;
  Keep Narbol Dsparm;
  Run;
  Data Prov;
  Merge DatosG ParmsP;
  By Narbol;
  Ds=DsParm;
  Drop Dsparm;
Run;
  Data DatosG;
  Set Prov;
  Run;
Proc Model Data=DatosG; /*Ajusta nuevamente los parámetros globales considerando la iteración
anterior*/
  Parms b3=0.716148 b1=0.002512 b2=-0.00239 p1=0.7 p2=0.3;
  X0=&base*(Ds**(-1/b3)-b1)/(1+b2*&base);
  Di=(age/(X0+age*(b1+b2*X0)))**b3-d1*p1**dist1*ZLag1(Resid.Di)-d2*p2**dist2*ZLag2(Resid.Di);
  Resid.Di=Resid.Di*(Pred.Di**0.5)**0.5;
  Fit Di /Outest=SalG Outs=Matrix Estdata=ParmsG Out=Rm4Pa Outall DW=4 Dwprob;
  /*Estabiliza el procedimiento y genera las salidas de los parámetros y pruebas de bondad*/
RUN;
  Data MSEGnew;
  Set matrix;
  Keep Di;
  Run;
  Data MSEGold;
  Set MatrixG;
  PDi=Di;
  Drop Di;
Run;
  Data Todoparms;
  Set MSEGnew;
  Set MSEGold;
  Set SalG;
  /*Pone a disposición de la macro los parámetros ajustados*/
  Msechk=Abs(PDi-Di);
  Iter=&i;
  Call Symput('Msechk',Msechk);
Run;
%Let i = %Eval(&i+1);
%End;
%Mend AJiter;
%AJiter(65); /*Aquí se pone la edad de referencia para el ajuste*/
Quit; /*Finaliza el procedimiento de la macro, el ajuste se repite hasta estabilizar el ajuste de
acuerdo a las condiciones del MSE o las iteraciones*/

```

7.8.3. Programa SAS para la ecuación dinámica 4.E1

/*Programa para el ajuste de la ecuación dinámica de crecimiento en altura dominante e índice de sitio, la ecuación generada se basa en el modelo base de Chapman-Richards (Richards, 1959). El ajuste

se hace considerando variables indicadoras como efectos aditivos a *Pinus durangensis* de las especies de *Pinus arizonica*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla* y *Pinus ayacahuite*. Se considera una Estructura Autorregresiva de tercer orden Car(3) para corregir la autocorrelación debida a las mediciones de altura en el mismo árbol, además se usa una función de potencia para corregir la heterocedasticidad. El ajuste se hace con el procedimiento "nested iterative procedure" descrito por Tait *et al.*, (1988)*/

```

/*Llama la base de datos de un fichero SAS*/
Data Mi; /*Se crea la base de datos a partir de pares de edad-altura de árboles de análisis
troncales*/
  Set Ae;
  dist1=H-Lag1(H); /*Se calcula la diferencia en altura de la observación actual y la anterior (Lag)*/
  If dist1<=0 Then dist1=.; /*Cuando se calcula la diferencia para el primer retardo se asume '.*'/
  d1=1;
  If dist1=. Then d1=0; /*Se asume 0 cuando el d1='.*'/
  If dist1=. Then dist1=0; /*Se asume 0 para el primer retardo*/
  dist2=H-Lag2(H); /*Se calcula la diferencia en altura de la observación actual y el segundo
retardo (Lag2)*/
  If dist2<=0 Then dist2=.; /*Cuando se calcula la diferencia para el primer retardo se asume '.*'/
  d2=1;
  If dist2=. Then d2=0; /*Se asume 0 cuando el d2='.*'/
  If dist2=. Then dist2=0; /*Se asume 0 para los primeros datos de cada árbol contra el segundo
retardo*/
  dist3=H-Lag3(H); /*se calcula la diferencia en altura de la observación y el tercer retardo (Lag3)*/
  If dist3<=0 Then dist3=.; /*Cuando se calcula la diferencia para el primer retardo se asume '.*'/
  d3=1;
  If dist3=. Then d3=0; /*Se asume 0 cuando el dist2='.*'/
  If dist3=. Then dist3=0; /*Se asume 0 para el tercer retardo*/
  Keep Sitio Esp Edad H d1 dist1 d2 dist2 d3 dist3;
  Rename Edad=Age H=H2 Sitio=Narbol; /*Se renombran las variables*/
Run;
Data DatosG; /*Se crea la base de entrada para la macro el parámetro específico para cada árbol,
el cual fue el promedio de la altura a la edad de 60 años*/
  Set Mi;
  Ds=15;
Run;
Title 'Chapman Richards a0=Exp(m1+m2/x) a3=0+1/x Se usa la función lineal inversa
Y=a+b*(1/X)';
%Macro AJiter(Base); /*Inicia el procedimiento iterativo de la macro para el ajuste de parámetros
globales y específicos*/
  Proc Model Data=DatosG;
  Parns m10=3.50 m1a=0.1 m1t=0.9 m1l=0.5 m1ay=0.3 m20=-0.10 m2a=0.001 m2t=0.001
m2l=0.001 m2ay=0.001 a20=0.005 a2a=0.0001 a2t=0.0001 a2l=0.0001 a2ay=0.0001 p1=0.84
p2=0.77 p3=0.45; /*Se definen los parámetros globales considerando variables indicadoras para
las especies de estudio*/
  /*Esp=2 es Pinus durangensis, Esp=1 es Pinus arizonica, Esp=3 Es Pinus teocote, Esp=4 es Pinus
leiophylla y Esp=8 es Pinus ayacahuite*/
  Ia=0;
  If Esp Eq 1 Then Ia=1;
  It=0;
  If Esp Eq 3 Then It=1;
  Il=0;
  If Esp Eq 4 Then Il=1;
  Iay=0;
  If Esp Eq 8 Then Iay=1;
  m1=m10+m1a*Ia+m1t*It+m1l*Il+m1ay*Iay;
  m2=m20+m2a*Ia+m2t*It+m2l*Il+m2ay*Iay;
  a2=a20+a2a*Ia+a2t*It+a2l*Il+a2ay*Iay;
  x=(log(1-exp(-a2*&base))+m2)/(log(Ds)-m1);
  H2=exp(m1+m2/x)*(1-exp(-a2*age))**(1/x)-d1*p1**dist1*ZLlag1(Resid.H2)-
d2*p2**dist2*ZLag2(Resid.H2)-d3*p3**dist3*ZLag3(Resid.H2);
  /*Car(3) Estructura para corregir la autocorrelación*/

```

```

Resid.H2=resid.H2/(pred.H2**0.05)**0.5; /*Estructura de potencia para corregir
heterocedasticidad*/
Fit H2 / Outest=SalG OutS=Matrix; /*Ajusta parámetros globales*/
Run;
%Let Msechk=1;
%Let i=1;
%Do %Until (&Msechk lt 0.0001 or &i=50); /*Se define el criterio para parar las iteraciones del
procedimiento, se usó que el cuadrado medio del error (Msechk) fuera menor a 0.0001 o que el
procedimiento parara a las 50 iteraciones*/
Data Parmsg; /*Se extraen los parámetros globales y se ponen a disposición de la macro*/
Set SalG;
Keep m10 m1a m1t m1l m1ay m20 m2a m2t m2l m2ay a20 a2a a2t a2l a2ay;
Run;
Data MatrixG; /*Se genera la matriz del dato predicho con el modelo*/
Set Matrix;
Keep H2;
Run;
Data DatosP; /*Se mezclan los datos con los parámetros globales*/
Set DatosG;
If _N_=1 Then Set Parmsg; /*Mezcla los ficheros aunque Parmsg tenga una única entrada*/
Run;
Proc Model Data=DatosP Noprint; /*Ajusta los parámetros específicos para cada árbol con variables
indicadoras*/
By Narbol;
Parms Dsparm=25;
Ia=0;
If Esp Eq 1 Then Ia=1;
It=0;
If Esp Eq 3 Then It=1;
Il=0;
If Esp Eq 4 Then Il=1;
Iay=0;
If Esp Eq 8 Then Iay=1;
m1=m10+m1a*Ia+m1t*It+m1l*Il+m1ay*Iay;
m2=m20+m2a*Ia+m2t*It+m2l*Il+m2ay*Iay;
a2=a20+a2a*Ia+a2t*It+a2l*Il+a2ay*Iay;
x=(log(1-exp(-a2*&base))+m2)/(log(Dsparm)-m1);
H2=Exp(m1+m2/x)*(1-exp(-a2*age))**(1/x);
Fit H2 /Outest=SalP; /*Pone a disposición de la macro los parámetros específicos*/
Run;
DATA Parmsp;
Set SalP;
Keep Narbol Dsparm;
Run;
Data Prov;
Merge DatosG Parmsp; /*Mezcla las bases de datos*/
By Narbol;
Ds=DsParm;
Drop Dsparm;
Run;
Data DatosG;
Set Prov;
Run;
Proc Model Data=DatosG; /*Ajusta los parámetros globales usando los parámetros específicos*/
Parms m10=3.50 m1a=0.1 m1t=0.9 m1l=0.5 m1ay=0.3 m20=-0.10 m2a=0.001 m2t=0.001
m2l=0.001 m2ay=0.001 a20=0.005 a2a=0.0001 a2t=0.0001 a2l=0.0001 a2ay=0.0001 p1=0.84 p2=0.77
p3=0.45;
Ia=0;
If Esp Eq 1 Then Ia=1;
It=0;
If Esp Eq 3 Then It=1;

```

```

Il=0;
If Esp Eq 4 Then Il=1;
Iay=0;
If Esp Eq 8 Then Iay=1;
mm1=m10+m1a*Ia+m1t*It+m1l*Il+m1ay*Iay;
m2=m20+m2a*Ia+m2t*It+m2l*Il+m2ay*Iay;
a2=a20+a2a*Ia+a2t*It+a2l*Il+a2ay*Iay;
x=(log(1-exp(-a2*&base))+m2)/(log(Ds)-m1);
H2=exp(m1+m2/x)*(1-exp(-a2*age))**(1/x)-d1*p1**dist1*ZLAG1(Resid.H2)-
d2*p2**dist2*ZLAG2(Resid.H2)-d3*p3**dist3*ZLAG3(Resid.H2);
/*Corrige la autocorrelación de los errores con la Car(3)*/
Resid.H2=Resid.H2/(Pred.H2**0.05)**0.5; /*Corrige la heterocedasticidad con el modelo de
potencia*/
Fit H2 /Outest=SalG Outs=Matrix Estdata=Parmsg Out=RES_ESP_M1 Outall DW=4 Dwprob
White;
Run;
Data MseGnew;
Set Matrix;
Keep H2;
Run;
Data MseGold; /*Mezcla las bases usando la matriz de valores predichos*/
Set MatrixG;
PH2=H2;
Drop H2;
Run;
Data Todoparms;
Set MseGnew;
Set MseGold;
Set SalG;
/*Pone los parámetros a disposición de la Macro*/
Msechk=Abs(PH2-H2);
Iter=&i;
Call Symput('Msechk',Msechk);
Run;
%Let i = %Eval(&i+1);
%End;
%Mend AJiter;
%AJiter(60); /*Se fija la edad base*/
Quit; /*Termina el procedimiento de la macro iterativa*/

```

7.8.4. Programa SAS para recuperar los parámetros de la función Weibull por ME

/*Programa para la recuperación de los parámetros de localización (a), forma (b) y escala (c) de la función

Weibull por el método de momentos, relacionando los parámetros con el primero y segundo momento de la distribución diamétrica, diámetro medio y varianza, respectivamente. El parámetro a es estimado por el método propuesto por Zanakis, (1979). Se parte de una base de datos de con diámetro normal (Dn) por parcela. Sp=Especie, h=altura de cada árbol*/

```

Data D2;
Set Base;
If Sp<=8 Then Especie=1; /*Se agrupan las especies de Pinus para trabajar a nivel género, para
este caso*/
Proc Sort
Data=D2 Out=D2; By Parcela Especie Dn; /*Se ordenan los datos para la parcela y el Dn*/
Run;
Data D3;
Set D2(Keep=Parcela Especie Dn h); /*Se mantienen las variables de interés*/
Proc Sql; /*Se crea una consulta para contar el número de árboles por parcela, se obtienen los Dn
mínimo, máximo y medio y la varianza*/

```

```

Create Table DD1 As Select Parcela, Especie, Count(Dn) As Nobs, Min(Dn) AS Dmin, Max(Dn) AS
Dmax, Sum(Dn)/Count(Dn) As Dme, Var(Dn) As VarDn
From D3 Group BY Parcela, Especie; /*Se agrupa por parcela y especie*/
Quit; Run;
Data DD2; /*Se le asigna un contador al árbol por Dn en orden ascendente para cada parcela*/
Set D2(Keep=Parcela especie Dn);
If (Lag(Parcela) Ne Parcela Or Lag(Especie) Ne Especie) Then Do;
Cont=0; End; Cont+1;
Run;
Data DD3;
Set DD2;
Where Cont=2; /*Se seleccionan los árboles del segundo Dn más pequeño*/
DNi=Dn; /*Se renombra la variable Dn*/
Keep Parcela Especie DNi;
Run;
/*Inicia el procedimiento para la recuperación de loa parámetros de la distribución weibull por el
método de momentos*/
Data DD4;
Merge DD1 DD3; BY Parcela Especie;
IF Nobs<10 Then Delete; /*Elimina las parcelas con menos de 15 árboles*/
If (DNi-Dmin)<(Dmax-DNi) THEN a=((Dmin*Dmax)-DNi**2)/((Dmin+Dmax)-2*DNi);
Else a=Dmin; /*Estimador del parámetro de localización (a) Zanakis, (1979)*/
cmax=10; /*Se define el valor máximo para el parámetro de escala c*/
cmin=0.1; /*Valor mínimo que puede tomar el parámetro de escala c*/
Cont=1;
Tmax=((Dme-a)**2)*(gamma(1+(2/cmax))-(gamma(1+(1/cmax)))**2)/((gamma(1+(1/cmax)))**2)-
VarDn;
Tmin=((Dme-a)**2)*(gamma(1+(2/cmin))-(gamma(1+(1/cmin)))**2)/((gamma(1+(1/cmin)))**2)-VarDn;
/*se usa la función gama para obtener el parámetro de escala c*/
If Tmax*Tmin>0 then go to fin;
cmed=(Cmax+Cmin)/2;
Do While (Cont<101);
Tmed=((Dme-a)**2)*(gamma(1+(2/cmed))-(gamma(1+(1/cmed)))**2)/((gamma(1+(1/cmed)))**2)-
VarDn;
If (Tmed*Tmin)=0 THEN go to raiz1;
If (Tmed*Tmin)<0 THEN cmax=cmed;
If (Tmed*Tmin)>0 THEN cmin=cmed;
Cmed2=(Cmax+Cmin)/2;
If Cmed2=0 Then go to Igual;
Ea=Abs((cmed2-cmed)/cmed2)*100;
If Ea<0.0001 THEN go to raiz2; /*Ea es el error relativo máximo admisible=0.0001*/
Igual:cmed=Cmed2;
Cont=Cont+1;
End;
c=999; /*Cuando c=999 significa que el procedimiento no encuentra la solución*/
Go to fin;
Raiz2: c=cmed2;
Go to fin;
Raiz1: c=cmed; /*Termina el algoritmo para recuperar el parámetro c*/
Fin;;
b=(Dme-a)/gamma(1+(1/c)); /*Se calcula el parámetro de forma c con la función gama, usando
los valores calculados de los parámetros a y c*/
Keep Parcela Especie Nobs a b c; /*Se mantienen las variables de interés y los parámetros
calculados*/
Proc Sql; /*Se guardan los parámetros en una base final y mezclan con los datos iniciales*/
Create Table DD5 As Select D3.Parcela, D3.Especie, D3.Dn, Nobs, a, b, c
From D3 Left Join DD4 On (D3.Parcela=DD4.Parcela AND D3.Especie=DD4.Especie)
Where a^=. Order By Parcela, Especie, Dn;
Quit; Run; /*Termina el procedimiento*/

```

El descubrimiento del conocimiento puede causar la locura, pero adquirir el conocimiento produce claridad mental...Gerónimo.